PAMPHLETS

—

MECHANICS

1

PAMPHLETS, MECHANICS.

Contents.

Jahresbericht

über die

Städtische höhere Bürgerschule

womit zu der

am 23. März 1869

Vormittags von 9—12 Uhr und Nachmittags von 2—4 Uhr

stattfindenden

öffentlichen Prüfung

ehrerbietigst einladet

der Rector

Professor **H. Bertram.**

Inhalt:

Berlin, 1869.

Druck von Franz Krüger, Linden-Strasse 40.

Probleme der Mechanik mit Bezug auf die Variationen der Schwere und die Rotation der Erde.

Bei der Beurtheilung der scheinbaren Bewegungen auf der Erde zieht man den Einfluss der Rotation der letzteren meistens mit genügender Schärfe in Betracht, wenn man ausser der, dem Erdradius proportionalen, Centrifugalkraft zu den wirklichen Kräften noch die Coriolis'sche *force centrifuge composée**) hinzunimmt, welche der ersten Potenz der Winkelgeschwindigkeit ω der Erde proportional ist. In einigen Aufgaben der Statik und Dynamik haben indessen verschiedene Autoren eine grössere Genauigkeit dadurch zu erreichen gesucht, dass sie auch solche Glieder berücksichtigten, welche proportional sind dem Produkt aus ω^2 und Längen, welche im Verhältnisse zum Erdradius nur klein sind. In gewissen Fragen ist dies geradezu nothwendig, z. B. wenn die Gleichgewichtslage eines im Schwerpunkt unterstützten Körpers ermittelt werden soll. In den meisten dieser Fälle sind dann aber die Variationen der Schwere, welche kleinen Ortsveränderungen entsprechen, unberücksichtigt geblieben, und doch sind dieselben mit jenen Gliedern nicht nur von gleicher Ordnung, sondern überwiegen sie sogar vollständig. Dies näher zu erörtern ist der Zweck der folgenden Zeilen.

Es ist zwar nicht möglich, das Potential der Erdanziehung genau zu bestimmen, wenn es aber blos auf eine ungefähre Abschätzung ankommt, wird man auf dem von *Hansen* **) betretenen Wege zum Ziele kommen. Wir verfolgen denselben, indem wir bemerken, dass auch *Puiseux* ***) in der Arbeit über die Consequenzen dieser Variationen vermuthlich von denselben Prämissen ausgegangen ist; wenigstens stimmen die von ihm mitgetheilten numerischen Resultate — deren Ableitung er unseres Wissens nicht veröffentlicht hat — mit denen überein, welche weiter unten aus der *Hansen*'schen Annahme entwickelt sind.

---

*) *Coriolis.* Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps. J. de l'École Polyt. Cah. XXIV. Paris 1835.

**) *P. A. Hansen.* Theorie der Pendelbewegung, Danzig 1853, und die verbessernden Zusätze hierzu in Schumacher Astron. Nachrichten No. 897. 1854.

***) *Puiseux.* Mémoire sur les variations de la pesanteur dans une petite étendue de la surface terrestre, et sur quelques effets qui en résultent. (Extrait par l'auteur) C. R. XLII. 683—685.

Das Potential der Erdanziehung.

Wir betrachten die Erde als ein abgeplattetes Rotationsellipsoid, welches durch ähnliche und ähnlich liegende ellipsoidische Flächen in homogene Schichten getheilt werden kann, und denken uns dann ein System von ineinander geschachtelten homogenen Ellipsoiden, deren Begrenzungsflächen jene Schichtflächen und deren Dichtigkeiten so bestimmt sind, dass die Summe der Dichtigkeiten aller Ellipsoide, welche sich in einer gewissen Schicht durchdringen, gleich der wirklichen Dichtigkeit jener Schicht ist. Indem wir dann die Abplattung jedes dieser Ellipsoide als eine kleine Grösse erster Ordnung annehmen, erhalten wir für die Summe der Potentiale aller Ellipsoide einen Ausdruck, welcher zwei von der Vertheilung der Dichtigkeiten abhängende Constanten enthält; diese lassen sich endlich durch die Bedingung numerisch bestimmen, dass die aus dem Potential folgende Intensität der Schwere an der Erdoberfläche mit der von der bekannten empirischen Formel gelieferten übereinstimmt.

Die Rechnung lässt sich so führen:

Es sei der Mittel O_1 eines abgeplatteten Umdrehungsellipsoids der Anfangspunkt der Coordinaten, die Axe $O_1 \mathfrak{Z}$ die Umdrehungsaxe, so dass also die Axen $O_1 \mathfrak{X}$, $O_1 \mathfrak{Y}$ im Aequator liegen; $\mathfrak{a}$ die grosse Halbaxe und e die Excentricität der erzeugenden Ellipse, M die Masse des Ellipsoids, $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Coordinaten des angezogenen Punkts (dem wir die Masse Eins beilegen),

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 = r^2;$$

es sei ferner die Anziehung zweier Massen von der Grösse Eins in der Entfernung Eins gleich Eins, und endlich τ^2 die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{r^2 - \mathfrak{z}^2}{\tau^2 + \mathfrak{a}^2 e^2} + \frac{\mathfrak{z}^2}{\tau^2} = 1,$$

so wird das Potential V des Ellipsoids — wie bekannt —

$$V = \frac{3}{2} M \left\{ \left(1 - \frac{r^2 - 3\mathfrak{z}^2}{2\,\mathfrak{a}^2 e^2}\right) \frac{1}{\mathfrak{a}e} \, Arctg \, \frac{\mathfrak{a}e}{\tau} + \frac{\tau\,(r^2 - \mathfrak{z}^2)}{2\,\mathfrak{a}^2 e^2 (\tau^2 + \mathfrak{a}^2 e^2)} - \frac{\mathfrak{z}^2}{\mathfrak{a}^2 e^2 \tau} \right\}.$$

Vernachlässigen wir überall die in die höhern Potenzen von e^2 multiplicirten Glieder, so kommt:

$$V = \frac{M}{r} + \frac{M \mathfrak{a}^2 e^2}{10\,r^3} - \frac{3\,M \mathfrak{a}^2 e^2 \mathfrak{z}^2}{10\,r^5}.$$

Setzt man

$$\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\alpha,$$
$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = 2\,\mathfrak{a} - \mathfrak{a}\alpha,$$
$$\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2 = \mathfrak{a}^2 e^2 = \mathfrak{a}^2 \alpha\ (2 - \alpha),$$

und vernachlässigt die höhern Potenzen von α, so kommt:

$$V = \frac{M}{r} + \frac{M \mathfrak{a}^2 \alpha}{5\,r^3} - \frac{3\,M \mathfrak{a}^2 \alpha\, \mathfrak{z}^2}{5\,r^5}.$$

Bildet man nun die Summe aller analogen Ausdrücke, welche allen den Ellipsoiden entsprechen, aus denen die Erde zusammengesetzt ist, so erhält man für das Potential V der Erde einen Ausdruck von der Form

$$V = \frac{\mathfrak{A}}{r} + \frac{\mathfrak{B}}{r^3} - \frac{3\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{z}^2}{r^5}$$

und kann die Constanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aus der Bedingung ableiten, dass an der Oberfläche der Erde

$$g = 9^m,78019 + 0^m,050754 \sin^2\varphi$$

ist, wo φ die Polhöhe des Orts und g die Resultante aus der Anziehung und der aus der Rotation der Erde entspringenden Centrifugalkraft bedeutet.

Bevor wir diese Bestimmung vornehmen, wollen wir den Ausdruck von V zunächst dadurch transformiren, dass wir den Anfangspunkt der Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ in einen Punkt O der $\mathfrak{X}\mathfrak{Z}$ Ebene verlegen, dessen Entfernung OO_1 von O_1 gleich $\mathfrak{a}_1$, während $OO_1\,\mathfrak{X} = \varphi_1$ ist; die Richtung der neuen Coordinatenaxen bleibt der ursprünglichen parallel, so dass

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{a}_1 \cos\varphi_1 + \mathfrak{x}_1,$$
$$\mathfrak{y} = \mathfrak{y}_1,$$
$$\mathfrak{z} = \mathfrak{a}_1 \sin\varphi_1 + \mathfrak{z}_1$$

und

$$r^2 = \mathfrak{a}_1^2 \left\{1 + 2\,\frac{(\mathfrak{x}_1 \cos\varphi_1 + \mathfrak{z}_1 \sin\varphi_1)}{\mathfrak{a}_1} + \frac{\rho^2}{\mathfrak{a}_1^2}\right\}$$

wird, wo

$$\rho^2 = \mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{y}_1^2 + \mathfrak{z}_1^2$$

gesetzt ist.

Es seien nun $\frac{\mathfrak{x}_1}{\mathfrak{a}_1}, \frac{\mathfrak{y}_1}{\mathfrak{a}_1}, \frac{\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{a}_1}$ so klein, dass nur die Glieder, welche von der zweiten Ordnung in Bezug auf diese Grössen sind, in der Entwickelung von V mitgenommen zu werden brauchen, dann wird:

$$\begin{aligned} V = {} & \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1}\left\{1 - \frac{\mathfrak{x}_1 \cos\varphi_1 + \mathfrak{z}_1 \sin\varphi_1}{\mathfrak{a}_1} - \frac{1}{2}\,\frac{\rho^2}{\mathfrak{a}_1^2} + \frac{3}{2}\,\frac{(\mathfrak{x}_1 \cos\varphi_1 + \mathfrak{z}_1 \sin\varphi_1)^2}{\mathfrak{a}_1^2}\right\} \\ & + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^3}\left\{1 - 3\,\frac{(\mathfrak{x}_1 \cos\varphi_1 + \mathfrak{z}_1 \sin\varphi_1)}{\mathfrak{a}_1} - \frac{3}{2}\,\frac{\rho^2}{\mathfrak{a}_1^2} + \frac{15}{2}\,\frac{(\mathfrak{x}_1 \cos\varphi_1 + \mathfrak{z}_1 \sin\varphi_1)^2}{\mathfrak{a}_1^2}\right\} \\ & - \frac{3\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^5}\left\{1 - 5\,\frac{(\mathfrak{x}_1 \cos\varphi_1 + \mathfrak{z}_1 \sin\varphi_1)}{\mathfrak{a}_1} - \frac{5}{2}\,\frac{\rho^2}{\mathfrak{a}_1^2} + \frac{35}{2}\,\frac{(\mathfrak{x}_1 \cos\varphi_1 + \mathfrak{z}_1 \sin\varphi_1)^2}{\mathfrak{a}_1^2}\right\}(\mathfrak{a}_1 \sin\varphi_1 + \mathfrak{z}_1)^2, \end{aligned}$$

oder, indem wir die von $\mathfrak{x}_1\ \mathfrak{y}_1\ \mathfrak{z}_1$ freien Glieder, welche kein Interesse haben, mit V_0 bezeichnen und die Indices an den Coordinaten fortlassen:

$$\begin{aligned} V = V_0 & - (\mathfrak{x} \cos\varphi_1 + \mathfrak{z} \sin\varphi_1)\left\{\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1^2} + \frac{3\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^4} - \frac{15\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^4}\sin^2\varphi_1\right\} - \mathfrak{z}\,\frac{6\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^4}\sin\varphi_1 \\ & - \frac{\rho^2}{\mathfrak{a}_1}\left\{\frac{\mathfrak{A}}{2\,\mathfrak{a}_1^2} + \frac{3\,\mathfrak{B}}{2\,\mathfrak{a}_1^4} - \frac{15\,\mathfrak{B}}{2\,\mathfrak{a}_1^4}\sin^2\varphi_1\right\} - \frac{\mathfrak{z}^2}{\mathfrak{a}_1}\,\frac{3\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^4} \end{aligned}$$

$$+ \frac{(\mathfrak{x} \cos \varphi_1 + \mathfrak{z} \sin \varphi_1)^2}{\mathfrak{a}_1} \left\{ \frac{3}{2} \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1^{\,2}} + \frac{15}{2} \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}} - \frac{105}{2} \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}} \sin^2 \varphi_1 \right\}$$

$$+ \frac{(\mathfrak{x} \cos \varphi_1 + \mathfrak{z} \sin \varphi_1)}{\mathfrak{a}_1} \cdot \mathfrak{z} \frac{30\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}} \sin \varphi_1 .$$

Hiernach wird die Componente der Anziehung parallel der $\mathfrak{Z}$ Axe im Punkte O:

$$\left(\frac{dV}{d\mathfrak{z}}\right)_0 = - \sin \varphi_1 \left\{ \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1^{\,2}} + \frac{9\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}} - \frac{15\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}} \sin^2 \varphi_1 \right\},$$

und parallel der $\mathfrak{X}$ Axe

$$\left(\frac{dV}{d\mathfrak{x}}\right)_0 = - \cos \varphi_1 \left\{ \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1^{\,2}} + \frac{3\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}} - \frac{15\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}} \sin^2 \varphi_1 \right\};$$

fügt man hierzu die von der Umdrehung der Erde herrührende Centrifugalbeschleunigung

$$\mathfrak{a}_1 \, \omega^2 \cos \varphi_1$$

so erhält man für den Winkel φ, welchen die Richtung der Schwere mit der $\mathfrak{X}$ Axe einschliesst, d. h. für die Polhöhe von O:

$$tg\, \varphi = tg\, \varphi_1 \left\{ 1 + \frac{\omega^2 \mathfrak{a}_1 + \dfrac{6\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}}}{\dfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1^{\,2}}} \right\},$$

und also

$$tg\, (\varphi - \varphi_1) = \varphi - \varphi_1 = \frac{\omega^2 \mathfrak{a}_1 + \dfrac{6\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}}}{\dfrac{2\,\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1^{\,2}}} \sin 2\, \varphi_1 .$$

Indem wir $\varphi - \varphi_1$ wieder als eine Grösse erster Ordnung ansehen, können wir nun den Ausdruck für V so umformen, dass wir die Z Axe in die nach oben verlängerte Richtung der Schwere, die X Axe in die Richtung von O nach Süden legen; es ist dann

$$\mathfrak{x} = x \sin \varphi + z \cos \varphi,$$
$$\mathfrak{z} = - x \cos \varphi + z \sin \varphi,$$
$$\mathfrak{y} = y;$$

und also wird

$$\mathfrak{x} \cos \varphi_1 + \mathfrak{z} \sin \varphi_1 = x\, (\varphi - \varphi_1) + z,$$

während ρ unverändert bleibt.

Folglich kommt mit Vernachlässigung der Grössen von der Ordnung α^2:

$$V = V_0 - \Big(x\, (\varphi - \varphi_1) + z\Big) \left\{ \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1^{\,2}} + \frac{3\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}} - \frac{15\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}} \sin^2 \varphi_1 \right\} + x \sin \varphi_1 \cos \varphi \frac{6\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}}$$

$$- z \sin^2 \varphi_1 \frac{6\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}} - \frac{\rho^2}{2\,\mathfrak{a}_1} \left\{ \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1^{\,2}} + \frac{3\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}} - \frac{15\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}} \sin^2 \varphi_1 \right\}$$

$$+ \frac{xz}{\mathfrak{a}_1}\left\{3\,(\varphi - \varphi_1)\,\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1^{\,2}} - \frac{24\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}}\sin\varphi\,\cos\varphi\right\}$$

$$- \frac{x^2}{\mathfrak{a}_1}\,\frac{3\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}}\cos^2\varphi + \frac{z^2}{\mathfrak{a}_1}\left\{\frac{3}{2}\,\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1^{\,2}} + \frac{15}{2}\,\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}} - \frac{51}{2}\,\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}}\sin^2\varphi\right\}.$$

Dies wird, wenn man für $\varphi - \varphi_1$ seinen Werth einsetzt:

$$V = V_0 - x\,\frac{\omega^2\mathfrak{a}_1\sin 2\varphi_1}{2} - z\left\{\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1^{\,2}} + \frac{3\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}} - \frac{9\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}}\sin^2\varphi\right\}$$

$$- \frac{\rho^2}{2\,\mathfrak{a}_1}\left\{\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1^{\,2}} + \frac{3\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}} - \frac{15\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}}\sin^2\varphi\right\} - \frac{x^2}{\mathfrak{a}_1}\,\frac{3\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}}\cos^2\varphi$$

$$+ \frac{z^2}{2\,\mathfrak{a}_1}\left\{\frac{3\,\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1^{\,2}} + \frac{15\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}} - \frac{51\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}}\sin^2\varphi\right\} + \frac{xz}{\mathfrak{a}_1}\left\{3\,\omega^2\,\mathfrak{a}_1 - \frac{6\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}}\right\}\sin\varphi\,\cos\varphi.$$

Nennt man g die Intensität der Schwere im Punkte O, so hat man

$$g = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1^{\,2}} + \frac{3\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}} - \frac{9\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}}\sin^2\varphi - \mathfrak{a}_1\,\omega^2\cos^2\varphi;$$

und dieser Werth muss nun mit dem von der empirischen Formel

$$g = 9^{\mathrm{m}},78019 + 0^{\mathrm{m}},050754\,\sin^2\varphi$$

gelieferten zusammenfallen, wenn der Punkt O auf der Oberfläche der Erde liegt, also $\mathfrak{a}_1$ die Gleichung

$$\mathfrak{a}_1^{\,2}\left\{\frac{\cos^2\varphi}{\mathfrak{a}^2} + \frac{\sin^2\varphi}{\mathfrak{a}^2\,(1 - 2\alpha)}\right\} = 1$$

erfüllt; d. i.

$$\mathfrak{a}_1^{\,2} = \mathfrak{a}\,(1 - \alpha\sin^2\varphi).$$

Dann wird aber

$$g = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}^2} + \frac{3\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}^4} - \mathfrak{a}\,\omega^2 + \sin^2\varphi\left\{\frac{2\,\mathfrak{A}\,\alpha}{\mathfrak{a}^2} - \frac{9\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}^4} + \omega^2\,\mathfrak{a}\right\},$$

und aus der Vergleichung dieser beiden Ausdrücke für g erhält man die Gleichungen

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}^2} + \frac{3\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}^4} - \mathfrak{a}\,\omega^2 = 9{,}78019,$$

$$\frac{2\,\mathfrak{A}\,\alpha}{\mathfrak{a}^2} - \frac{9\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}^4} + \mathfrak{a}\,\omega^2 = 0{,}050754.$$

Zu diesen tritt noch die Bedingung, dass die Richtung der Schwere in den Punkten der Oberfläche des Ellipsoids normal auf dieser stehe. Ist nun ψ der Winkel, welchen die Normale in einem Punkt O der Oberfläche mit dem Aequator einschliesst, φ_1 wieder der Winkel, welchen der Radius Vector OO_1 mit dem Aequator bildet, so hat man:

$$tg\,\psi = tg\,\varphi_1\,(1 + 2\alpha),$$

also

$$tg\,(\psi - \varphi_1) = \psi - \varphi_1 = 2\,\alpha\,\sin\varphi_1\,\cos\varphi_1,$$

und da nun $\psi = \varphi$ werden muss, und in diesem Falle

$$\varphi - \varphi_1 = \frac{\omega^2 \mathfrak{a} + \frac{6\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}^4}}{\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}^2}} \sin\varphi_1 \cos\varphi_1 ,$$

so erhält man:

$$\omega^2 \mathfrak{a} + \frac{6\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}^4} = \frac{2\mathfrak{A}\alpha}{\mathfrak{a}^2} \text{ *)},$$

und folglich auch

$$\varphi - \varphi_1 = \alpha \sin 2\varphi$$

an der Oberfläche.

Nimmt man nun:

$$\mathfrak{a} = 6377398^m,$$
$$\omega = \frac{2\pi}{86164{,}09} = 0{,}00007292117,$$
$$\omega^2 = 5{,}3175 \cdot 10^{-9},$$
$$\omega^2 \mathfrak{a} = 0{,}0339118,$$

so wird:

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}^4} = 0^m{,}00569,$$
$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}^2} = 9^m{,}79703,$$
$$\alpha = 0{,}003473, \text{ oder } \alpha = \frac{1}{288} \text{ **)},$$

und der grösste Werth von $\varphi - \varphi_1$ entspricht einem Winkel von 11′ 56″.

Für die späteren Anwendungen ist es erforderlich den Werth des Potentials der Erdanziehung für einen im Punkte O festgehaltenen Körper zu bestimmen; wir wollen dasselbe mit E bezeichnen. Es ist dann bis auf Constanten, welche kein Interesse haben:

$$E = -\mathfrak{f}\int x\,dm - \mathfrak{g}\int z\,dm - \mathfrak{H}_1\int x^2 dm - \mathfrak{H}_2\int y^2 dm + \mathfrak{H}_3\int z^2 dm + \mathfrak{K}\int xz\,dm,$$

wo die Integrale über alle Massenelemente dm des Körpers ausgedehnt sind, und

$$\mathfrak{f} = \omega^2 \mathfrak{a}_1 \sin\varphi \cos\varphi,$$
$$\mathfrak{g} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1^2} + \frac{3\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^4} - \frac{9\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^4}\sin^2\varphi,$$
$$\mathfrak{H}_1 = \frac{1}{2\mathfrak{a}_1}\left\{\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1^2} + \frac{9\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^4} - \frac{21\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^4}\sin^2\varphi\right\},$$
$$\mathfrak{H}_2 = \frac{1}{2\mathfrak{a}_1}\left\{\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1^2} + \frac{3\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^4} - \frac{15\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^4}\sin^2\varphi\right\},$$

---

*) Diese Gleichung stimmt überein mit der von der allgemeinen Theorie gelieferten, die z. B. *Lipschitz* in Cr. J. LXIII pag. 295 anführt.

**) Auch dieser numerische Werth von α stimmt mit dem von *Lipschitz* angegebenen.

$$\mathfrak{H}_3 = \frac{1}{2\,\mathfrak{a}_1}\left\{\frac{2\,\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1^{\,2}} + \frac{12\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}} - \frac{36\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}}\sin^2\varphi\right\},$$

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{\mathfrak{a}_1}\left\{3\,\omega^2\mathfrak{a}_1 - \frac{6\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}}\right\}\sin\varphi\cos\varphi$$

gesetzt ist.

Ist nun X_1, Y_1, Z_1 ein System von drei durch den Punkt O des Körpers gelegten Hauptaxen, welches mit X, Y, Z consentirt, und sind in Bezug auf jene Axen A, B, C die Trägheitsmomente des Körpers, x_1^0, y_1^0, z_1^0 die Coordinaten des Schwerpunkts und ist M die Masse des Körpers; sind ferner die Richtungscosinus zwischen den Axen X, Y, Z und X_1, Y_1, Z_1 bestimmt durch das Schema (I):

	X	Y	Z
X_1	a_1	b_1	c_1
Y_1	a_2	b_2	c_2
Z_1	a_3	b_3	c_3

so wird mit Fortlassung von Constanten

$$\begin{aligned} E = & -fM(x_1^0 a_1 + y_1^0 a_2 + z_1^0 a_3) - gM(x_1^0 c_1 + y_1^0 c_2 + z_1^0 c_3) \\ & + \mathfrak{H}_1\,(Aa_1^2 + Ba_2^2 + Ca_3^2) + \mathfrak{H}_2\,(Ab_1^2 + Bb_2^2 + Cb_3^2) \\ & - \mathfrak{H}_3\,(Ac_1^2 + Bc_2^2 + Cc_3^2) - \mathfrak{K}\,(Aa_1c_1 + Ba_2c_2 + Ca_3c_3). \end{aligned}$$

Die fictiven Kräfte bei den Bewegungen auf der rotirenden Erde.

In der relativen Bewegung betrachten wir die Aenderungen, welche die Coordinaten eines Punktes erfahren, wenn sowohl dieser, als das Coordinatensystem (das Medium) selbst sich bewegt. Um nun die Differentialgleichungen für die relative Bewegung eines Punktes aufzustellen, muss man zunächst die absoluten Beschleunigungen des Punktes durch seine relativen und durch die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Mediums ausdrücken. Die Bewegung des letzteren lässt sich immer zusammensetzen aus einer Parallel-Verschiebung und einer Drehung um eine durch den Anfangspunkt gelegte Axe. Von der Parallel-Verschiebung kann man vollständig absehen, wenn man die scheinbaren Geschwindigkeiten und Beschleunigungen vermehrt um die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, welche dieser Parallel-Verschiebung entprechen.

Betrachtet man Bewegungen auf der rotirenden Erde, also Bewegungen in Bezug auf unser oben definirtes Axensystem X, Y, Z, so kann man annehmen, dass der Anfangspunkt O in Ruhe sei, und das Coordinatensystem sich um eine durch O parallel zur Erdaxe gelegte Axe drehe, wenn man die Beschleunigungen vermehrt um

$$-\,\omega^2\mathfrak{a}_1\cos\varphi\sin\varphi \qquad \text{parallel der } X \text{ Axe},$$
$$-\,\omega^2\mathfrak{a}_1\cos^2\varphi \qquad \text{parallel der } Z \text{ Axe}.$$

Den Anfangspunkt O denken wir uns also nun ruhend.

Die Drehung des Axensystems lässt sich von Moment zu Moment zerlegen in drei Drehungen um die Axen X, Y, Z, welche den Winkelgeschwindigkeiten α, β, γ entsprechen. Für unser Coordinatensystem wird

$$\alpha = -\omega \cos\varphi, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = \omega \sin\varphi.$$

Ist dann X, Y, Z die Lage des Coordinatensystems zur Zeit t und X_1, Y_1, Z_1 die Lage desselben Systems zur Zeit $t + dt$, so hat man für die cosinus der Winkel zwischen diesen Axen, bis auf Grössen zweiter Ordnung, das Schema

	X	Y	Z
X_1	1	γdt	$-\beta dt$
Y_1	$-\gamma dt$	1	αdt
Z_1	βdt	$-\alpha dt$	1

Hat nun ein Punkt zur Zeit t die Coordinaten x, y, z und die relativen Geschwindigkeiten parallel den (beweglichen) Axen x', y', z', so werden zur Zeit $t + dt$ seine Coordinaten in Bezug auf das System X_1, Y_1, Z_1:

$$x_1 = x + x'dt, \qquad y_1 = y + y'dt, \qquad z_1 = z + z'dt;$$

in Bezug auf die Axen X, Y, Z aber werden sie, bis auf Grössen zweiter Ordnung:

$$x + (x' - y\gamma + z\beta)\, dt, \qquad y + (y' - z\alpha + x\gamma)\, dt, \qquad z + (z' - x\beta + y\alpha)\, dt,$$

hieraus folgt, dass die absoluten Geschwindigkeiten parallel denselben Axen sind:

$$\xi = x' - y\gamma + z\beta, \qquad \eta = y' - z\alpha + x\gamma, \qquad \zeta = z' - x\beta + y\alpha;$$

und wenn man nun x, y, z als Functionen der Zeit ansicht, welche die relativen Coordinaten des Punktes angeben, so ist offenbar:

$$x' = \frac{dx}{dt}, \qquad y' = \frac{dy}{dt}, \qquad z' = \frac{dz}{dt}.$$

Nehmen die absoluten Geschwindigkeiten parallel den beweglichen Axen während dt zu um

$$\xi' dt, \quad \eta' dt, \quad \zeta' dt,$$

so sind nach Verlauf von dt die Geschwindigkeiten nach den Axen X, Y, Z wieder:

$$\xi + (\xi' - \eta\gamma + \zeta\beta)\, dt, \qquad \eta + (\eta' - \zeta\alpha + \xi\gamma)\, dt, \qquad \zeta + (\zeta' - \xi\beta + \eta\alpha)\, dt,$$

und also die absoluten Beschleunigungen:

$$\xi' - \eta\gamma + \zeta\beta, \qquad \eta' - \zeta\alpha + \xi\gamma, \qquad \zeta' - \xi\beta + \eta\alpha.$$

Diese Beschleunigungen vermehren wir nun wieder um die Beschleunigungen des Anfangspunkts O, welche wir mit u_0, v_0, w_0 bezeichnen wollen; so dass schliesslich:

$$\xi' - \eta\gamma + \zeta\beta + u_0, \qquad \eta' - \zeta\alpha + \xi\gamma + v_0, \qquad \zeta' - \xi\beta + \eta\alpha + w_0$$

die absoluten Beschleunigungen des beweglichen Punktes werden. Die Producte aus je einer derselben und der Masse m des beweglichen Punktes müssen gleich den Componenten der wirkenden Kräfte sein; nennen wir z. B. die Componente parallel der x Axe X, so kommt

$$m\,(\xi' - \eta\gamma + \zeta\beta + u_0) = X,$$

oder, wenn man für ξ, η, ζ ihre Werthe substituirt,

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = X - mu_0 + zm\left(\gamma\,\frac{dy}{dt} - \beta\,\frac{dz}{dt}\right) + m\left(y\,\frac{d\gamma}{dt} - z\,\frac{d\beta}{dt}\right)$$
$$+\, mx\omega^2 - m\alpha\,(x\alpha + y\beta + z\gamma).$$

Man kann diese Gleichung in der Weise interpretiren, dass man die auf X folgenden Glieder der rechten Seite als fictive Kräfte auffasst, welche man zu den wirklich vorhandenen hinzunehmen muss, wenn man die relative Bewegung wie eine absolute behandeln will. — Von diesen fictiven Kräften ist die erste $-mu_0$ gleich und entgegengesetzt einer Kraft, welche dem Punkte die Beschleunigung des Anfangspunkts O geben würde; für die Bewegungen auf der Erde ist sie

$$\frac{1}{2}\,m\omega^2\mathfrak{a}_1\,\sin 2\varphi$$

und hebt sich, wie sich aus der oben gemachten Annahme über die Richtung der Z Axe von selbst versteht, gegen die horizontale Componente der Attraction fort.

Parallel der y Axe giebt es in diesem Falle keine solche fictive Kraft.

Parallel der z Axe wird dieselbe

$$m\,\omega^2\mathfrak{a}_1\,\cos^2\varphi;$$

sie wird gewöhnlich vereinigt mit der entsprechenden Componente der Attraction, und liefert dann mit ihr zusammen die Schwerkraft im Puncte O.

Die zweite fictive Kraft ist die von *Coriolis* sogenannte *force centrifuge composée;* sie ist für die Bewegungen auf der Erde proportional ω und für alle diejenigen Fälle von besonderer Bedeutung, wo aus den Bewegungen auf der Erde ein Schluss auf die Drehung der letzteren gemacht werden soll.

Die dritte verschwindet für unsern Fall, weil α, β, γ constant sind.

Die vierte ist die Componente der Centrifugalkraft, welche der Umdrehung um eine durch O parallel zur Erdaxe gelegte Axe und der Winkelgeschwindigkeit ω entspricht; sie ist also wegen der Kleinheit von ω selbst sehr unbedeutend, wenn die Coordinaten x, y, z des beweglichen Punkts im Verhältniss zum Erdradius klein bleiben. Man kann sie wiederum mit den entsprechenden Componenten der Attraction vereinigen, und wird schon hieraus sehen, dass sie im Vergleich zu den mit den Coordinaten veränderlichen Gliedern der Attraction nur klein ist. Sie wird parallel der x Axe:

$$= m\,\omega^2\,\sin^2\varphi\cdot x + m\,\omega^2\cos\varphi\,\sin\varphi\cdot z,$$

während die entsprechende Attractionscomponente (vermindert um das oben erwähnte Glied) ist (für $m = 1$):

$$-\frac{x}{\mathfrak{a}_1}\left\{\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1^{\,2}} + \frac{9\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}} - \frac{21\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}}\sin^2\varphi\right\} + \frac{z}{\mathfrak{a}_1}\left\{3\,\omega^2\mathfrak{a}_1 - \frac{6\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}}\right\}\sin\varphi\,\cos\varphi.$$

Aehnlich ist es mit den beiden andern Componenten.

In statischen Fragen würde es nach Analogie des sonstigen Sprachgebrauchs

passend sein, die Summe aus den Componenten der Attraction und den fictiven Kräften die Componenten der (veränderlichen) Schwere zu nennen, diese sind dann*):

parallel der x Axe:

$$g_x = -\frac{x}{\mathfrak{a}_1}\left\{\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1^{\,2}} + \frac{9\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}} - \frac{21\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}}\sin^2\varphi - \omega^2\mathfrak{a}_1\sin^2\varphi\right\} + \frac{z}{\mathfrak{a}_1}\left\{2\,\omega^2\mathfrak{a}_1 - \frac{3\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}}\right\}\sin 2\varphi$$

$$= -\frac{x}{\mathfrak{a}_1}(9{,}84824 - 0{,}1534018\sin^2\varphi) + \frac{z}{\mathfrak{a}_1}\,0{,}050754\,\sin 2\varphi,$$

parallel der y Axe:

$$g_y = -\frac{y}{\mathfrak{a}_1}\left\{\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1^{\,2}} + \frac{3\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}} - \frac{15\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}}\sin^2\varphi - \omega^2\mathfrak{a}_1\right\} = -\frac{y}{\mathfrak{a}_1}(9{,}7801882 - 0{,}08535\sin^2\varphi),$$

parallel der z Axe:

$$g_z = -g + \frac{z}{\mathfrak{a}_1}\left\{\frac{2\,\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1^{\,2}} + \frac{12\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}} - \frac{36\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}}\sin^2\varphi + \omega^2\mathfrak{a}_1\cos^2\varphi\right\} + \frac{x}{\mathfrak{a}_1}\left\{2\,\omega^2\mathfrak{a}_1 - \frac{3\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}}\right\}\sin 2\varphi$$

$$= -9{,}78019 - 0{,}050754\sin^2\varphi + \frac{z}{\mathfrak{a}_1}(19{,}66234 - 0{,}20484\sin^2\varphi + 0{,}0339118\cos^2\varphi)$$

$$+ \frac{x}{\mathfrak{a}_1}\,0{,}050754\,\sin 2\varphi.$$

Anwendung 1.

Sind zwei Quecksilber-Gefässe in einer Verticalen aufgestellt, das eine, Q, am Fusse eines Thurmes, das andere, Q_1, an der Spitze, h^m höher, und richtet man ein Fernrohr von der Spitze des Thurmes aus zuerst so, dass das Fadenkreuz sich mit seinem Spiegelbild im unteren Quecksilber, dann so, dass es sich mit dem Spiegelbild im oberen deckt, also die Axe des Rohrs die Richtung der Schwere resp. in Q und Q_1 erhält, so ist der Winkel δ, welchen beide Richtungen mit einander einschliessen, gleich dem Winkel, welchen die Richtung der Schwere in Q_1 mit der Z Axe einschliesst. Diesen Winkel erhalten wir, wenn wir die eben genannte X Componente durch die Z Componente dividiren; es wird also

$$\delta = \frac{h}{\mathfrak{a}_1\,g}\left\{2\,\omega^2\mathfrak{a}_1 - \frac{3\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}}\right\}\sin 2\varphi,$$

um diesen Betrag ist also die Polhöhe oben geringer als unten.

Es wird aber:

$$\delta = \frac{h}{\mathfrak{a}_1}\,0{,}0051893;$$

und für $h = 1000^m$, $\varphi = 45^0$, erhält man einen Winkel von 0,″16784**).

---

*) Vgl. *Hansen* in Schum. Astr. Nachr. l. c.

**) *Puiseux* giebt 0,″17 an.

Anwendung 2.

Die Gleichgewichtslage eines homogenen biegsamen Fadens, welcher im Punkte O aufgehängt ist.

Wir nehmen die Z Axe hier im Sinne der Schwere gerichtet; die Dichtigkeit des Fadens gleich Eins. Die Kräfte, welche ein Fadenelement ds angreifen, sind die eben bestimmten Componenten der Schwere $g_x ds$, $g_y ds$, $g_z ds$. Da g_y mit y verschwindet, so wird der Faden im Meridian bleiben. Da ferner, wie leicht zu sehen, x sehr klein bleibt, so brauchen wir von g_x nur den Theil

$$-\frac{z}{\mathfrak{a}_1}\left(2\,\omega^2\,\mathfrak{a}_1 - \frac{3\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}}\right)\sin 2\varphi$$

zu beachten, welchen wir mit $-gkz$ bezeichnen wollen. Endlich überwiegt in g_z der Theil g alle übrigen, so dass wir für g_z schreiben können

$$g - kgx.$$

Rechnen wir nun die Länge des Fadens s von O aus und bezeichnen die Spannung mit T, so erhalten wir, wie bekannt, die Gleichungen:

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) - kgz\,ds = 0,$$

$$d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + (g - kgx)\,ds = 0.$$

Hieraus folgt:

$$T\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dT}{ds}\frac{dx}{ds} - kgz = 0, \qquad \text{(a)}$$

$$T\frac{d^2z}{ds^2} + \frac{dT}{ds}\frac{dz}{ds} + g - kgx = 0,$$

also

$$\frac{dT}{ds} - kgz\frac{dx}{ds} + g\frac{dz}{ds} - kgx\frac{dz}{ds} = 0,$$

$$T + kgzx + gz = Const.,$$

und hier verschwindet wieder $kgzx$ gegen gz. Am untern Ende, für welches wir den Werth von z mit z_1 bezeichnen wollen, ist nun, wenn der Faden frei herabhängt, $T = 0$, also ist

$$gz_1 = Const.,$$

und

$$T = g\,(z_1 - z),$$

und hieraus ergiebt sich nach Gleichung (a),

$$(z_1 - z)\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{dz}{ds} - kz = 0, \qquad \text{(b)}$$

wir können aber auch, da der Faden nur wenig von der Verticalen abweicht, den Bogen $s = z$ und $\frac{dz}{ds} = 1$ setzen, so dass die Gleichung (b) übergeht in

$$(z_1 - z)\frac{d^2x}{dz^2} - \frac{dx}{dz} - kz = 0.$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung würde sein:

$$x = A\,lg\,(z_1 - z) - \frac{1}{2}kz_1 z - \frac{1}{4}kz^2 + B,$$

wo A und B die Integrationsconstanten sind, und dieses Integral bleibt von $z = 0$ stetig bis in die Nähe von $z = z_1$. Die Grössen A und B sind indessen in unserem Falle beide gleich Null; nämlich B, weil für $z = 0$ auch x verschwinden muss, und A, weil am untern Ende das letzte Fadenelement die Richtung der Schwere an der Stelle, wo es sich befindet, haben, also

$$\frac{dx}{dz} = -kz, \quad \text{für } z = z_1$$

sein muss, nun ist aber allgemein

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{A}{z_1 - z} - \frac{1}{2}kz_1 - \frac{1}{2}kz;$$

soll dies in der Nähe von $z = z_1$ übergehen in $-kz_1$, so muss $A = 0$ sein. Es bleibt also:

$$x = -\frac{1}{4}kz\,(2\,z_1 - z). \qquad \text{(c)}$$

Das untere Fadenende weicht von der durch O gelegten Verticalen um

$$x_1 = -\frac{k}{4}z_1^2$$

d. h. nach Norden ab; diese Abweichung entzieht sich aber jeder Messung; denn es ist

$$\frac{k}{4} = \frac{1}{4\,g\,\mathfrak{a}_1}\left(2\,\omega^2\mathfrak{a}_1 - \frac{3\,\mathfrak{V}}{\mathfrak{a}_1^4}\right)\sin 2\varphi$$

d. i. unter der Breite 45°:

$$\frac{k}{4} = \frac{1}{\mathfrak{a}_1}\,1,^{mm}2973;$$

also würde die Abweichung für einen 100^m langen Faden nur etwa $0,^{mm}002$ betragen.

Die Formel (c) stimmt mit dem von *Puiseux* angegebenen allgemeinen Resultat: „Der Faden bildet nahezu einen Parabelbogen. Der Parameter dieser Curve wechselt mit der geographischen Breite, ist aber unabhängig von der Länge des Fadens."

Die Differential-Gleichungen für die relative Bewegung in der Lagrange'schen Form.

Lottner *) — bei einem speciellen Problem — und allgemeiner *E. Bour* **) haben darauf aufmerksam gemacht, dass die Differential-Gleichungen für die relative Bewegung sich leicht auf die *Lagrange*'sche Form der dynamischen Gleichungen bringen lassen.

In der üblichen Bezeichnungsweise würden nämlich die Differential-Gleichungen nach dem Obigen sein:

$$m_i\left(\frac{d\xi_i}{dt} - \eta_i\gamma + \zeta_i\beta + u_0\right) = \frac{\partial U}{\partial x_i} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial L_k}{\partial x_i},$$

$$m_i\left(\frac{d\eta_i}{dt} - \zeta_i\alpha + \xi_i\gamma + v_0\right) = \frac{\partial U}{\partial y_i} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial L_k}{\partial y_i},$$

$$m_i\left(\frac{d\zeta_i}{dt} - \xi_i\beta + \eta_i\alpha + w_0\right) = \frac{\partial U}{\partial z_i} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial L_k}{\partial z_i};$$

lassen sich nun die relativen Coordinaten x_i, y_i, z_i der Punkte des beweglichen Systems durch neue Variabele q in der Weise ausdrücken, dass die Bedingungs-Gleichungen $L_k = 0$ identisch erfüllt werden, und setzt man

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\sum m_i\,(\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2),$$

$$K = -u_0 \sum m_i x_i - v_0 \sum m_i y_i - w_0 \sum m_i z_i,$$

so überzeugt man sich — ganz, wie in dem Falle der absoluten Bewegungen — leicht, dass aus den obigen Gleichungen die neuen folgen:

$$\frac{d\,\dfrac{\partial\mathfrak{T}}{\partial q_r'}}{dt} = \frac{\partial(\mathfrak{T} + U + K)}{\partial q_r}.$$

Diese Gleichungen werden besonders bequem, bei der Betrachtung der

Gleichgewichtslagen eines schweren, um einen festen Punkt O der Erde drehbaren Körpers, und Oscillationen desselben um eine feste Axe.

Die Grösse $\mathfrak{T}$ ist nämlich die lebendige Kraft des Körpers, welche seiner absoluten Bewegung entspricht, wenn von der Bewegung des Anfangspunktes O in der oben angegebenen Weise abgesehen wird.

---

*) Theorie des *Foucault*'schen Gyroskops. Crelle Journ. Bd. 54.

**) Liouville J. 1863, p. 1–51.

Sind also X_1, Y_1, Z_1 die drei Hauptaxen des Körpers, welche durch O gehen, und zwar so gewählt, dass sie mit den positiven Halbaxen X, Y, Z durch Drehung zur Deckung gebracht werden können; sind A, B, C die diesen Axen entsprechenden Trägheitsmomente des Körpers, ferner p, q, r seine (relativen) Winkelgeschwindigkeiten, endlich α_1, β_1, γ_1 die Winkelgeschwindigkeiten des Mediums, beide gerechnet nach den Axen X_1, Y_1, Z_1, so ist offenbar:

$$2\,\mathfrak{T} = A\,(p + \alpha_1)^2 + B\,(q + \beta_1)^2 + C\,(r + \gamma_1)^2.$$

Wenn wir nun für die Axen X_1, Y_1, Z_1 die pag. 9 angegebenen Richtungscosinus nehmen, so wird

$$\alpha_1 = \omega\,(c_1 \sin\varphi - a_1 \cos\varphi),\ \ \beta_1 = \omega\,(c_2 \sin\varphi - a_2 \cos\varphi),\ \ \gamma_1 = \omega\,(c_3 \sin\varphi - a_3 \cos\varphi),$$

und die Function U gleich der oben angegebenen Function E; um endlich K zu bestimmen und zugleich die Rechnung zu vereinfachen, wollen wir annehmen, dass der Schwerpunkt des Körpers auf der Z_1 Axe liege, und die Coordinate $z_1^0 = -s$ habe, ist dann noch M die Masse des Körpers, so wird

$$K = -M\omega^2 \mathfrak{a}_1\, s\,(\cos\varphi \sin\varphi\, a_3 + \cos\varphi\, c_3).$$

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{T}_0$ den Werth, welchen $\mathfrak{T}$ für

$$p = q = r = 0$$

annimmt, so erhalten wir die Bedingungen für das Gleichgewicht des Körpers, wenn wir die Variation von

$$\mathfrak{T}_0 + U + K$$

gleich Null setzen, welche einer kleinen Drehung des Körpers um eine beliebige, durch O gehende Axe entspricht.

Da nun

$$\mathfrak{T}_0 = \frac{1}{2}\,\omega^2 \cos^2\varphi\,(Aa_1^2 + Ba_2^2 + Ca_3^2) + \frac{1}{2}\,\omega^2 \sin^2\varphi\,(Ac_1^2 + Bc_2^2 + Cc_3^2)$$
$$- \omega^2 \sin\varphi \cos\varphi\,(Aa_1c_1 + Ba_2c_2 + Ca_3c_3);$$

$$U = \mathfrak{f}\,M s\, a_3 + \mathfrak{g}\,M s\, c_3 + \mathfrak{H}_1\,(Aa_1^2 + Ba_2^2 + Ca_3^2) + \mathfrak{H}_2\,(Ab_1^2 + Bb_2^2 + Cb_3^2)$$
$$- \mathfrak{H}_3\,(Ac_1^2 + Bc_2^2 + Cc_3^2) - \mathfrak{K}\,(Aa_1c_1 + Ba_2c_2 + Ca_3c_3)$$

und

$$\mathfrak{f} = \omega^2 \mathfrak{a}_1 \cos\varphi \sin\varphi, \qquad \mathfrak{g} - \omega^2 \mathfrak{a}_1 \cos^2\varphi = g$$

sind, so wird

$$\mathfrak{T}_0 + U + K = g\,M s\, c_3 + \mathfrak{Z}_1\,(Aa_1^2 + Ba_2^2 + Ca_3^2) + \mathfrak{Z}_2\,(Ab_1^2 + Bb_2^2 + Cb_3^2)$$
$$- \mathfrak{Z}_3\,(Ac_1^2 + Bc_2^2 + Cc_3^2) - \mathfrak{Z}_4\,(Aa_1c_1 + Ba_2c_2 + Ca_3c_3),$$

wo

$$\mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{H}_1 + \frac{1}{2}\,\omega^2 \cos^2\varphi,\ \mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{H}_2,\ \mathfrak{Z}_3 = \mathfrak{H}_3 - \frac{1}{2}\,\omega^2 \sin^2\varphi,\ \mathfrak{Z}_4 = \mathfrak{K} + \omega^2 \sin\varphi \cos\varphi$$

gesetzt ist.

Die kleine Drehung des Körpers um eine beliebige Axe kann nun ersetzt werden durch die Drehungen $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ um die Axen X_1, Y_1, Z_1. Gelangen hierdurch die Axen X_1, Y_1, Z_1 in die Lagen X_2, Y_2, Z_2, so hat man für die Richtungscosinus zwischen diesen Axen, wie oben, das Schema:

	X_1	Y_1	Z_1
X_2	1	$\delta\gamma$	$-\delta\beta$
Y_2	$-\delta\gamma$	1	$\delta\alpha$
Z_2	$\delta\beta$	$-\delta\alpha$	1

also für die Richtungscosinus zwischen den Axen X, Y, Z und X_2, Y_2, Z_2 das Schema:

	X	Y	Z
X_2	$a_1 + a_2\delta\gamma - a_3\delta\beta$	$b_1 + b_2\delta\gamma - b_3\delta\beta$	$c_1 + c_2\delta\gamma - c_3\delta\beta$
Y_2	$-a_1\delta\gamma + a_2 + a_3\delta\alpha$	$-b_1\delta\gamma + b_2 + b_3\delta\alpha$	$-c_1\delta\gamma + c_2 + c_3\delta\alpha$
Z_2	$a_1\delta\beta - a_2\delta\alpha + a_3$	$b_1\delta\beta - b_2\delta\alpha + b_3$	$c_1\delta\beta - c_2\delta\alpha + c_3$

und aus diesem Schema liest man die Variationen der 9 Cosinus a_1, b_1, c_1 etc. leicht ab. Bildet man nun mit Zugrundelegung dieser Werthe die Variation von $\mathfrak{T}_0 + U + K$, und setzt die Coefficienten der willkürlichen Grössen $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ einzeln gleich Null, so erhält man die drei Gleichgewichtsgleichungen:

$$0 = -g\,M s\,c_2 + 2\,\mathfrak{Z}_1 (B-C)\,a_2 a_3 + 2\,\mathfrak{Z}_2 (B-C)\,b_2 b_3 - 2\,\mathfrak{Z}_3 (B-C)\,c_2 c_3 \\ - \mathfrak{Z}_4 (B-C)\,(a_2 c_3 + a_3 c_2), \tag{1}$$

$$0 = g\,M s\,c_1 - 2\,\mathfrak{Z}_1 (A-C)\,a_1 a_3 - 2\,\mathfrak{Z}_2 (A-C)\,b_1 b_3 + 2\,\mathfrak{Z}_3 (A-C)\,c_1 c_3 \\ + \mathfrak{Z}_4 (A-C)\,(a_1 c_3 + c_1 a_3), \tag{2}$$

$$0 = 2\,\mathfrak{Z}_1 (A-B)\,a_1 a_2 + 2\,\mathfrak{Z}_2 (A-B)\,b_1 b_2 - 2\,\mathfrak{Z}_3 (A-B)\,c_1 c_2 \\ + \mathfrak{Z}_4 (A-B)\,(a_1 c_2 + a_2 c_1). \tag{3}$$

I. Gleichgewichtslagen eines im Schwerpunkt unterstützten Körpers.

Wenn der Körper im Schwerpunkt aufgehängt ist, also $s = 0$ gesetzt wird, kommen in den Gleichungen die Werthe der Trägheitsmomente nicht mehr vor, sondern nur noch die Richtungen der Hauptaxen.

Die Gleichungen (1), (2), (3) werden dann:

$$\mathfrak{Z}_1 a_2 a_3 + \mathfrak{Z}_2 b_2 b_3 - \mathfrak{Z}_3 c_2 c_3 - \frac{1}{2}\,\mathfrak{Z}_4 (a_2 c_3 + c_2 a_3) = 0, \tag{4}$$

$$\mathfrak{Z}_1 a_1 a_3 + \mathfrak{Z}_2 b_1 b_3 - \mathfrak{Z}_3 c_1 c_3 - \frac{1}{2}\,\mathfrak{Z}_4 (a_1 c_3 + c_1 a_3) = 0, \tag{5}$$

$$\mathfrak{Z}_1 a_1 a_2 + \mathfrak{Z}_2 b_1 b_2 - \mathfrak{Z}_3 c_1 c_2 - \frac{1}{2}\,\mathfrak{Z}_4 (a_1 c_2 + c_1 a_2) = 0. \tag{6}$$

Multiplicirt man dieselben der Reihe nach mit $a_1\, b_1\, c_1$, $a_2\, b_2\, c_2$, $a_3\, b_3\, c_3$ und addirt sie, so heben sich die mit $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \mathfrak{Z}_3$ multiplicirten Glieder fort, und man erhält:

$$a_1 a_2 b_1 c_1 c_3 + a_1 a_2 b_2 c_2 c_3 + a_1 a_3 b_3 c_2 c_3 + a_1 a_3 b_1 c_1 c_2 + a_2 a_3 b_2 c_1 c_2 + a_2 a_3 b_3 c_1 c_3 = 0,$$

und wenn man für

$$b_1 c_1 + b_2 c_2 \text{ setzt: } -b_3 c_3, \qquad a_1 b_1 + a_2 b_2 \text{ setzt: } -a_3 b_3,$$

so kommt:

$$-a_1 a_2 b_3 c_3^2 + a_1 a_3 b_3 c_2 c_3 - a_1 a_3^2 b_3 c_1 c_2 + a_2 a_3 b_3 c_1 c_3 = 0$$

oder

$$a_1 b_3 c_3 (a_3 c_2 - c_3 a_2) + a_3 b_3 c_1 (a_2 c_3 - c_2 a_3) = 0$$

d. i.

$$a_1 b_1 b_3 c_3 - a_3 b_1 b_3 c_1 = 0$$

oder

$$b_1 b_2 b_3 = 0,$$

d. h. eine der Hauptaxen muss im Meridian liegen; z. B. die Axe X_1, sodass $b_1 = 0$ wird.

Zur weitern Discussion der Gleichungen wird es erforderlich, die neun Richtungscosinus durch drei unabhängige Variabele auszudrücken. Wir nehmen als solche:

1) Den Winkel δ, um welchen man die durch die Axen Z und X gelegte Ebene um die Z Axe drehen muss, um sie in die Lage der Ebene ZX_1 zu bringen;
2) Den Winkel ξ, um welchen die Axe X_1 über die horizontale Ebene XY gehoben ist;
3) Den Winkel σ, um welchen man die Ebene $X_1\, Z$ um die Axe X_1 drehen muss, um sie in die Lage $X_1\, Z_1$ zu bringen.

Alle diese Drehungen sind direct genommen, so dass eine Drehung um die Z Axe die positive X Axe zunächst in die positive Y Axe führt u. s. f.

Wir erhalten so das Schema (II):

	X	Y	Z
X_1	$\cos\delta \cos\xi$	$\sin\delta \cos\xi$	$\sin\xi$
Y_1	$-\cos\delta \sin\xi \sin\sigma - \sin\delta \cos\sigma$	$\cos\delta \cos\sigma - \sin\delta \sin\sigma \sin\xi$	$\cos\xi \sin\sigma$
Z_1	$\sin\delta \sin\sigma - \cos\delta \sin\xi \cos\sigma$	$-\cos\delta \sin\sigma - \sin\delta \cos\sigma \sin\xi$	$\cos\xi \cos\sigma$

Wenn nun $b_1 = 0$ werden soll, so muss $\delta = 0$ werden*), wir erhalten dann das Schema (III):

	X	Y	Z
X_1	$\cos\xi$	0	$\sin\xi$
Y_1	$-\sin\xi \sin\sigma$	$\cos\sigma$	$\cos\xi \sin\sigma$
Z_1	$-\sin\xi \cos\sigma$	$-\sin\sigma$	$\cos\xi \cos\sigma$

*) Die Annahme $\xi = \frac{\pi}{2}$ ist unstatthaft, weil dann δ und σ unbestimmt werden.

Somit gehen die Gleichungen (4), (5), (6) über in:

$$\sin\sigma\cos\sigma\left\{\mathfrak{Z}_1\sin^2\xi-\mathfrak{Z}_2-\mathfrak{Z}_3\cos^2\xi+\mathfrak{Z}_4\sin\xi\cos\xi\right\}=0,$$
$$\cos\sigma\left\{(\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{Z}_3)\sin 2\xi+\mathfrak{Z}_4\cos 2\xi\right\}=0,$$
$$\sin\sigma\left\{(\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{Z}_3)\sin 2\xi+\mathfrak{Z}_4\cos 2\xi\right\}=0.$$

Hieraus erhellt, das jedenfalls

$$tg\,2\xi=-\frac{\mathfrak{Z}_4}{\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{Z}_3}$$

sein muss, und entweder $\sigma=0$ oder $\sigma=\frac{\pi}{2}$; d. h. also: **Zwei Hauptaxen müssen im Meridian liegen, und zwar muss das obere Ende der einen von der Verticalen nach Süden abweichen um den kleinen Winkel**

$$\xi=\frac{\mathfrak{Z}_4}{2(\mathfrak{Z}_1+\mathfrak{Z}_3)}.$$

Dieser Winkel ist nahezu gleich

$$\frac{\left(2\,\omega^2\mathfrak{a}_1-\frac{3\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1{}^4}\right)}{3\,g}\sin 2\varphi=0{,}0017298\sin 2\varphi,$$

d. i. circa 5′ 57″, für $\varphi=45^0$.

Sind die drei Trägheitsmomente des Körpers von einander verschieden, ist z. B.

$$A>B>C,$$

so ist nur eine der hiernach möglichen Gleichgewichtslagen des Körpers stabil, nämlich die oben angenommene, bei welcher die Axen des grössten und kleinsten Trägheitsmoments im Meridian liegen, und die Axe des kleinsten Trägheitsmoments mit der Verticalen einen kleinen Winkel ξ einschliesst. Dies wird sich aus dem Folgenden ergeben; wir bemerken hier noch, dass dies Resultat eine Verallgemeinerung des von *Puiseux* angegebenen Satzes ist: „Ein im Schwerpunkt aufgehängter Stab sucht sich in die Ebene des Meridians zu stellen, so dass er mit der Verticalen einen kleinen Winkel einschliesst, dessen Werth für die Breite 45⁰ ungefähr 6′ beträgt, und zwar ist auf unserer Halbkugel das untere Ende nach Norden gekehrt."

Dagegen weicht es vollständig ab von *Baehr's**) Behauptung, dass der Körper nur im Gleichgewicht sein könne, wenn eine seiner Hauptaxen parallel der Erdaxe gerichtet sei. Zu diesem unrichtigen Resultat gelangt man, wenn man die Variationen der Erdanziehung ausser Acht lässt**). In der That wird dann

$$\mathfrak{Z}_4=\omega^2\sin\varphi\cos\varphi,\qquad \mathfrak{Z}_1=\frac{1}{2}\,\omega^2\cos^2\varphi,\qquad \mathfrak{Z}_3=-\frac{1}{2}\,\omega^2\sin^2\varphi,$$

---

*) *Grunert* Archiv XXIV, pag. 261.

**) cf. l. c. pag. 247.

also

$$tg 2\xi = - tg 2\varphi$$

und die X Axe kommt in die Richtung der Erdaxe.

Man sieht aber auch, wie willkürlich hier Grössen derselben Ordnung einmal berücksichtigt und dann wieder vernachlässigt sind.

Wir wollen nun noch annehmen, dass eine der Hauptaxen des Körpers in einer von den Gleichgewichtslagen festgehalten werde, und der Körper sich um diese Axe drehen könne. Treten dann nach einer kleinen Verschiebung des Körpers aus der Gleichgewichtslage Oscillationen desselben ein, so war diese Lage stabil.

1) Zuerst sei die Y_1 Axe senkrecht gegen den Meridian festgehalten.

In diesem Falle ist:

$$\sigma = 0,$$

$$p = r = 0, \qquad q = \frac{d\xi}{dt},$$

also wird

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_0 + \frac{1}{2} B \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2,$$

und bis auf Constanten, welche nicht in Betracht kommen:

$$\mathfrak{T}_0 + U + K = (\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3)(A - C)\cos^2\xi - \mathfrak{Z}_4 (A - C)\sin\xi\cos\xi,$$

die Bewegungs-Gleichung

$$\frac{d\,\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \xi'}}{dt} = \frac{\partial(\mathfrak{T} + U + K)}{\partial \xi}$$

geht also über in:

$$B\frac{d^2\xi}{dt^2} = -(A - C)\left\{(\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3)\sin 2\xi + \mathfrak{Z}_4\cos 2\xi\right\};$$

bezeichnen wir den der Gleichgewichtslage entsprechenden Werth von ξ mit ξ_0, und setzen

$$\xi = \xi_0 + u,$$

und nehmen an, dass u anfangs klein sei, so wird anfangs

$$B\frac{d^2u}{dt^2} = -(A - C)\left\{(\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3)(2\xi_0 + 2u) + \mathfrak{Z}_4\right\},$$

und da

$$(\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3)\, 2\xi_0 = -\mathfrak{Z}_4$$

war, so kommt

$$B\frac{d^2u}{dt^2} = -2(A - C)(\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3)\, u;$$

ist nun noch die anfängliche Winkelgeschwindigkeit des Körpers Null, so folgt, dass der Körper nur kleine Oscillationen macht, wenn

$$A > C$$

ist; dann ist also auch die entsprechende Gleichgewichtslage stabil.

Die Schwingungsdauer wird dann:

$$\pi \sqrt{\frac{B}{2(A-C)} \cdot \frac{1}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3}}.$$

Für einen unendlich dünnen Stab wird

$$A = B, \qquad C = 0,$$

kann sich also ein Stab um eine durch seinen Schwerpunkt gehende, von Westen nach Osten gerichtete, Axe drehen, so ist er im stabilen Gleichgewicht, wenn sein unteres Ende nach Norden zeigt, und seine Axe mit der Verticalen einen Winkel ξ_0 einschliesst; wird er aus dieser Lage ein wenig gedreht, so oscillirt er um die Gleichgewichtslage, und zwar ist seine Schwingungsdauer annähernd gleich

$$\pi \sqrt{\frac{a_1}{3g}},$$

d. h. gleich der Schwingungsdauer eines einfachen Pendels, dessen Länge gleich dem dritten Theil des Erdradius ist, d. i. 24,4 Minuten.

Wäre die Erde eine ruhende Kugel, so würde $\mathfrak{Z}_1 = 0$, also auch $\xi_0 = 0$, der Stab würde in der Ruhe senkrecht hängen, aber seine Oscillationsdauer würde den obigen Werth behalten.

2) Wird die Axe X_1 in ihrer Gleichgewichtslage festgehalten, so wird in dem Schema (II) $\delta = 0$, $\xi = \xi_0$, und σ variabel; also

$$p = \frac{d\sigma}{dt}, \qquad q = r = 0, \qquad \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_0 + \frac{1}{2} A \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 - A\,\omega \frac{d\sigma}{dt} \cos(\varphi + \xi_0),$$

und bis auf Constanten und Grössen zweiter Ordnung

$$\mathfrak{T}_0 + U + K = -(B - C)\,(\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{Z}_3) \sin^2\sigma.$$

Die Bewegungsgleichung wird also:

$$A \frac{d^2\sigma}{dt^2} = -(B - C)\,(\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{Z}_3) \sin 2\sigma,$$

war also die Axe Z_1 anfangs nur wenig aus dem Meridian gedreht, so oscillirt der Körper um die Gleichgewichtslage, wenn

$$B > C$$

ist; die Schwingungsdauer ist, ähnlich wie unter (1),

$$\pi \sqrt{\frac{A}{2(B-C)} \cdot \frac{1}{\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{Z}_3}},$$

und für einen unendlich dünnen Stab, d. h. $A = B$, $C = 0$, kommt wieder annähernd

$$\pi \sqrt{\frac{a_1}{3g}}.$$

Dies Resultat liess sich voraussehen, da sich schon oben herausgestellt hat, dass die Schwingungsdauer für eine horizontale Axe von der Abplattung und Rotation der Erde wesentlich unabhängig ist.

3) In dem Falle, wo die Axe Z_1 in der Gleichgewichtslage festgehalten wird, also im Meridian so liegt, dass ihr oberes Ende um den Winkel

$$\varepsilon = -\xi_0 = \frac{\mathfrak{Z}_1}{2(\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3)}$$

nach Süden von der Verticalen abweicht, ist es bequem, die Lage des Körpers durch den Winkel u zu bestimmen, welchen die Ebene $Z_1 X_1$ mit dem Meridian einschliesst; es wird dann:

	X	Y	Z
X_1	$\cos u$	$\sin u$	$-\varepsilon\cos u$
Y_1	$-\sin u$	$\cos u$	$\varepsilon \sin u$
Z_1	ε	0	1

ferner

$$p = q = 0, \qquad r = \frac{du}{dt},$$

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_0 + \frac{1}{2}C\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + C\omega^2\frac{du}{dt}\sin(\varphi + \varepsilon),$$

und — bis auf Constanten und Grössen zweiter Ordnung —

$$\mathfrak{T}_0 + U + K = (\mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{Z}_2)(A - B)\cos^2 u;$$

also

$$C\frac{d^2u}{dt^2} = -(\mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{Z}_2)(A - B)\sin 2u;$$

hieraus ergiebt sich, dass die Gleichgewichtslage stabil ist, wenn

$$A > B,$$

und dass in diesem Falle die Oscillationen des Körpers um die Gleichgewichtslage die Dauer haben

$$\pi\sqrt{\frac{C}{(A-B)}\cdot\frac{1}{2(\mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{Z}_2)}}.$$

Eine um die Z_1 Axe drehbare Scheibe, für welche

$$A = B + C$$

ist, hat also eine stabile Lage, wenn sie senkrecht gegen den Meridian steht, und oscillirt um dieselbe mit der Schwingungsdauer

$$\pi\sqrt{\frac{1}{2(\mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{Z}_2)}};$$

dies wird, da

$$2(\mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{Z}_2) = \frac{1}{\mathfrak{a}_1}\left\{\frac{6\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{4}} + \omega^2\mathfrak{a}_1\right\}\cos^2\varphi$$

ist:

$$\frac{\pi}{\cos\varphi}\sqrt{\frac{\mathfrak{a}_1}{\frac{6\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{4}} + \omega^2\mathfrak{a}_1}},$$

also unter dem Aequator:

8,4 Stunden circa.

Auch dies Resultat stimmt mit *Puiseux*'s überein.

II. Gleichgewichtslage und Oscillationen eines Körpers, dessen Schwerpunkt vom Aufhängepunkt eine endliche Entfernung hat.

Diese Aufgabe ist von *Lottner**) behandelt, derselbe hat indessen die Variationen der Schwere nicht berücksichtigt; seine Resultate weichen daher in wesentlichen Punkten von den unsrigen ab. In den Gleichungen (1) und (2) (pag. 17) sind jetzt die Glieder $-gMsc_2$ und $gMsc_1$ mit dem Factor gMs multiplicirt, welcher gegen die Coefficienten der übrigen Cosinus so gross ist, dass c_2 und c_1 sehr klein werden müssen; bestimmmt man also die Cosinus nach dem Schema (II), so muss sowohl ξ als σ sehr klein sein; wir können daher sowohl ξ^2, σ^2 und $\xi\sigma$ vernachlässigen, als auch die Producte dieser Grössen in eine der Grössen $\mathfrak{Z}$. Hiernach geht zunächst (II) über in

	X	Y	Z
X_1	$\cos\delta$	$\sin\delta$	ξ
Y_1	$-\sin\delta$	$\cos\delta$	σ
Z_1	$\sin\delta\cdot\sigma$	$-\cos\delta\cdot\sigma$	1

Die Gleichungen (1), (2) und (3) reduciren sich auf

$$gMs\sigma = \mathfrak{Z}_1(B-C)\sin\delta,\quad gMs\xi = -\mathfrak{Z}_1(A-C)\cos\delta,\quad (\mathfrak{Z}_2-\mathfrak{Z}_1)(A-B)\cos\delta\sin\delta = 0.$$

Entweder ist also

$$\sin\delta = 0,\qquad \sigma = 0,\qquad \xi = -\frac{\mathfrak{Z}_1(A-C)}{gMs},$$

oder

$$\cos\delta = 0,\qquad \xi = 0,\qquad \sigma = \frac{\mathfrak{Z}_1(B-C)}{gMs};$$

in beiden Fällen liegt also ausser der den Schwerpunkt enthaltenden Hauptaxe noch eine Hauptaxe im Meridian, und die erstere ist gegen die Verticale um einen kleinen Winkel i so geneigt, das das untere Ende nach Norden abweicht. Wenn $A > B$ ist, so ist die erste Lage stabil, die zweite labil. Dies folgt unmittelbar aus I. 3. Im ersten Falle ist

$$i = \frac{2\omega^2\mathfrak{a}_1 - \dfrac{3\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}}}{\mathfrak{a}_1}\cdot\frac{A-C}{Msg}\sin 2\varphi.$$

Dieser Winkel ist für ein einigermassen messbares s so klein, dass er sich jeder Beobachtung entzieht; er ist aber etwa dreimal so gross, wie der, welchen

---

*) Welchen Einfluss hat die tägliche Umdrehung der Erde auf den Gang einer genau regulirten fest aufgestellten astronomischen Uhr an einem und demselben Orte? Progr. der Realschule zu Lippstadt. 1860.

man erhalten würde, wenn man in den Gleichgewichts-Bedingungen die Variationen der Erdanziehung nicht berücksichtigte.

Die von *Lottner* gefundenen Resultate stimmen mit den obigen Formeln bis auf die Modificationen überein, welche die Variation der Erdanziehung bedingt; sie erscheinen indessen nicht in der für unsere Zwecke significantesten Form. Es ist nämlich nicht der Winkel i berechnet, welchen die Hauptaxe C des Körpers mit der Verticalen einschliesst, sondern der Winkel θ, welchen dieselbe Hauptaxe mit dem zum Aufhängepunkt gehenden Erdradius einschliesst. In unserer Bezeichnungsweise geschrieben ist nämlich die von *Lottner* aufgestellte Gleichung [(15) p. 8]:

$$0 = (C - A)\,\omega^2 \sin(\theta + \varphi_1)\cos(\theta + \varphi_1) + Ms\left\{\omega^2 a_1 \cos\varphi_1 \sin(\theta + \varphi_1) - g_1 \sin\theta\right\},$$

wo φ_1 der Winkel ist, welchen der Erdradius mit dem Aequator einschliesst, g_1 die Intensität der constant gedachten Erdanziehung. Nennen wir nun φ die Polhöhe, g die Intensität der Schwere, so hat man:

$$g = g_1 \cos(\varphi - \varphi_1) - \omega^2 a_1 \cos\varphi_1 \cos\varphi, \qquad 0 = g_1 \sin(\varphi - \varphi_1) - \omega^2 a_1 \cos\varphi_1 \sin\varphi,$$

$$\theta = \varphi - \varphi_1 - i,$$

mithin

$$g \sin i = -g_1 \sin\theta + \omega^2 a_1 \cos\varphi_1 \sin(\theta + \varphi_1),$$

wonach die obige Gleichung übergeht in:

$$\sin i = \frac{\omega^2 (A - C)}{2\,g\,Ms} \sin 2(\varphi - i),$$

oder wegen der Kleinheit von i in:

$$i = \frac{\omega^2 (A - C)}{2\,g\,Ms} \sin 2\varphi.$$

Diese Gleichung würde aus unserer sich ergeben, wenn wir in dem Ausdruck für $\mathfrak{Z}_4$ die Glieder, welche von der Erdanziehung herrühren, fortliessen.

Wir wollen nun zunächst wieder annehmen, dass der Körper sich um die in der Gleichgewichtslage festgehaltene Y_1 Axe drehen könne.

Die Bewegungsgleichung wird dann, wie in II. 1.:

$$B\frac{d^2\xi}{dt^2} = -g\,Ms \sin\xi - (A - C)\left\{(\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3)\sin 2\xi + \mathfrak{Z}_4 \cos 2\xi\right\},$$

und wenn wir

$$\xi = -i + u$$

setzen, und u anfangs klein annehmen, so ist anfangs

$$B\frac{d^2u}{dt^2} = -\left\{g\,Ms + 2(A - C)(\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3)\right\}u,$$

denn das Glied

$$g\,Ms\,i \text{ hebt sich gegen } -\mathfrak{Z}_4 (A - C),$$

und das Glied

$$2(A - C)(\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3)\,i$$

verschwindet gegen die übrigen. Der Körper oscillirt um die Gleichgewichtslage, wenn

$$g M s + 2(A - C)(\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3) > 0$$

ist, und seine Schwingungsdauer T_1 wird

$$T_1 = \pi \sqrt{\frac{B}{Msg} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2(\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3)}{g} \frac{(A - C)}{Ms}}}.$$

Da nun $\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3$ nahezu gleich $\frac{3}{2}\frac{g}{\mathfrak{a}_1}$ ist, so erhält man

$$T_1 = \pi \sqrt{\frac{B}{Msg}} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{3(A - C)}{Ms\mathfrak{a}_1}}},$$

dies wird für ein mathematisches Pendel, für welches

$$B = A = Ms^2, \qquad C = 0$$

ist,

$$\pi \sqrt{\frac{s}{g}} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{3s}{\mathfrak{a}_1}}}.$$

Dieselbe Formel ergiebt sich leicht durch eine directe Betrachtung, wenn man die Erde als eine ruhende Kugel ansieht.

Auf die Schwingungsdauer des im Meridian schwingenden Pendels hat also die Umdrehung der Erde einen bei Weitem geringeren Einfluss, als die Variation der Schwere.

Die von *Lottner* angegebene Formel*) geht aus der unsrigen hervor, wenn wir in den Werthen von $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_3$ die Grössen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_3$ gleich Null setzen, also Glieder fortlassen, welche die beibehaltenen viele Male überwiegen.

Wenn die Axe X_1 in der Gleichgewichtslage festgehalten wird, der Körper also senkrecht gegen den Meridian schwingen kann, so kommt analog wie sub I. 2.

$$A \frac{d^2\sigma}{dt^2} = -\left\{ g M s \sin\sigma + (B - C)(\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{Z}_3) \sin 2\sigma \right\};$$

wenn man noch die Trägheitsmomente A und B vertauscht, so erhält man für die Schwingungsdauer T_2 dieselbe Formel, wie oben für T_1, nur dass $\mathfrak{Z}_1$ durch $\mathfrak{Z}_2$ ersetzt ist.

Die Differenz beider Zeiten ist:

$$T_1 - T_2 = \pi \sqrt{\frac{B}{Msg}} \cdot \frac{\mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{Z}_2}{g} \cdot \frac{A - C}{Ms},$$

d. i.

$$T_1 - T_2 = \pi \sqrt{\frac{B}{Msg}} \cdot \frac{A - C}{2\,Msg} \cdot \frac{1}{\mathfrak{a}_1} \left\{ \frac{6\mathfrak{W}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}} + \omega^2 \mathfrak{a}_1 \right\} \cos^2\varphi.$$

*) l. c. 33, pag. 14.

Schwingt also ein Pendel zuerst im Meridian, und wird sodann seine Drehungsaxe um 90° gedreht, so dass das Pendel nun senkrecht gegen den Meridian schwingt, so wird seine Oscillationsdauer um den obigen Betrag vermindert. Derselbe ist wieder ausserordentlich gering, aber doppelt so gross, wie der von *Lottner* angegebene, dessen Schlussformel aus der unsrigen entsteht, wenn man in ihr $\mathfrak{B} = 0$ setzt.

Für $A = B = Ms^2$, $C = 0$, $\pi\sqrt{\frac{s}{g}} = 1$, $\varphi = 0$, d. h. für ein mathematisches Secundenpendel unter dem Aequator erhält man

$$T_1 - T_2 = \frac{s}{\mathfrak{a}_1}\,\frac{1}{2g}\left\{\frac{6\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}} + \omega^2\,\mathfrak{a}_1\right\};$$

da nun

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{6\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}} + \omega^2\mathfrak{a}_1\right)$$

nahezu = der Abplattung α ist (pag. 8), also gleich $\frac{1}{288}$, so ist

$$T_1 - T_2 = \frac{s}{288\,\mathfrak{a}_1},$$

oder auch, da $\frac{s}{g} = \frac{1}{\pi^2}$:

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{\mathfrak{a}_1\,\pi^2}\left(\frac{6\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,4}} + \omega^2\,\mathfrak{a}_1\right) = \frac{1}{924918400}.$$

Ein im Meridian schwingendes einfaches Secundenpendel würde also gegen ein senkrecht gegen den Meridian schwingendes in 10700 Tagen um einen Schlag zurückbleiben.

In den bisher behandelten Fällen äusserte sich die Rotation der Erde in so schwachen, oder mit den aus den Variationen der Anziehung fliessenden so vermischten Effecten, dass die berechneten Erscheinungen zum Nachweis jener Rotation nicht geeignet sind. Die zusammengesetzte Centrifugalkraft war überall gleich Null. Anders stellt sich das Verhältniss schon in der Betrachtung der

Bewegung eines frei fallenden Körpers auf der rotirenden Erde.

Es ist dies eines der am häufigsten behandelten Probleme der relativen Bewegung. Obgleich schon *Gauss**) und *Laplace* die an sich einfache Frage vollständig erledigt hatten, so hat doch der Wunsch, die Abweichung nach Süden zu

*) *Gauss*. Fundamentalgleichungen für die Bewegung schwerer Körper auf der rotirenden Erde. (Enthalten in: Dr. *Benzenberg's* Versuche über die Umdrehung der Erde. Dortmund 1804, pag. 363—371).

erklären, welche aus den Beobachtungen *Benzenberg*'s und *Reich*'s*) zu folgen schien, aus der Rechnung jener grossen Meister sich aber nicht ergab, wiederholt zu Missverständnissen Veranlassung gegeben.**) Aus der nachstehenden Rechnung wird sich allerdings eine südliche Abweichung ergeben, aber eine so kleine, dass sie den Grund für jene Beobachtungen nicht abgeben kann.

Wir benutzen die oben aufgestellten Differential-Gleichungen für die relative Bewegung eines freien Punktes, und das bisherige Coordinatensystem, so dass die Z Axe nach dem Zenith gekehrt ist. Die Anfangsgeschwindigkeiten seien:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = C.$$

Wir erhalten dann:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega \sin\varphi \frac{dy}{dt} - \frac{x}{\mathfrak{a}_1}\left\{\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1^2} + \frac{9\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^4} - \frac{21\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^4}\sin^2\varphi - \mathfrak{a}_1\omega^2\sin^2\varphi\right\}$$
$$+ \frac{z}{\mathfrak{a}_1}\left\{4\omega^2\mathfrak{a}_1 - \frac{6\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^4}\right\}\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\omega\cos\varphi\frac{dz}{dt} - 2\omega\sin\varphi\frac{dx}{dt} - \frac{y}{\mathfrak{a}_1}\left\{\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1^2} + \frac{3\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^4} - \frac{15\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^4}\sin^2\varphi - \omega^2\mathfrak{a}_1\right\},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\left\{\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1^2} + \frac{3\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^4} - \frac{9\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^4}\sin^2\varphi - \mathfrak{a}_1\omega^2\cos^2\varphi\right\} + 2\omega\cos\varphi\frac{dy}{dt}$$
$$+ \frac{z}{\mathfrak{a}_1}\left\{\frac{2\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1^2} + \frac{12\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^4} - \frac{36\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^4}\sin^2\varphi + \mathfrak{a}_1\omega^2\cos^2\varphi\right\} + \frac{x}{\mathfrak{a}_1}\left\{4\omega^2\mathfrak{a}_1 - \frac{6\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^4}\right\}\sin\varphi\cos\varphi.$$

Um die Ordnung, von wel[...]ner die Coefficienten der Coordinaten auf der rechten Seite sind, anzude[...]ten, setzen wir:

$$\frac{1}{\mathfrak{a}_1}\left\{\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1^2} + \frac{9\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^4} - \frac{21\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^4}\sin^2\varphi - \mathfrak{a}_1\omega^2\sin\varphi\right\} = \omega q_1,$$

$$\frac{1}{\mathfrak{a}_1}\left\{\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1^2} + \frac{3\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^4} - \frac{15\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^4}\sin^2\varphi - \mathfrak{a}_1\omega^2\right\} = \omega q_2,$$

$$\frac{1}{\mathfrak{a}_1}\left\{\frac{2\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1^2} + \frac{12\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^4} - \frac{36\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^4}\sin^2\varphi + \mathfrak{a}_1\omega^2\cos^2\varphi\right\} = \omega q_3,$$

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{a}_1^2} + \frac{3\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^4} - \frac{9\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^4}\sin^2\varphi - \mathfrak{a}_1\omega^2\cos^2\varphi = g,$$

$$\frac{1}{\mathfrak{a}_1}\left(4\omega^2\mathfrak{a}_1 - \frac{6\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^4}\right)\sin\varphi\cos\varphi = \omega^2 k,$$

*) *F. Reich*. Fallversuche über die Umdrehung der Erde, angestellt auf hohe Oberbergamtliche Anordnung in dem „Drei Brüderschachte" bei Freiberg. Freiberg 1832.

**) Vgl. z. B. *Finck*. Chute des corps qui tombent d'une grande hauteur. C. R. LVI. 957—960.

so dass nun die Gleichungen lauten:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\,\omega \sin\varphi \frac{dy}{dt} - \omega q_1 x + \omega^2 kz, \qquad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\,\omega \cos\varphi \frac{dz}{dt} - 2\,\omega \sin\varphi \frac{dx}{dt} - \omega q_2 y, \qquad (2)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g + 2\,\omega \cos\varphi \frac{dy}{dt} + \omega q_3 z + \omega^2 kx. \qquad (3)$$

Da nun bei Aufstellung dieser Differential-Gleichungen die Glieder, welche in höhere Potenzen von ω als die zweite multiplicirt sind, fortgelassen worden sind, so würden auch in den Integralen Glieder dieser Ordnung für das mechanische Problem keinen Sinn haben; wir erhalten also eine innerhalb der gesteckten Grenzen exacte Lösung, wenn wir auch bei der Integration diese Glieder fortlassen. Da nun y und $\frac{dy}{dt}$ verschwinden für $t = 0$, so ist y, wie die zweite Gleichung zeigt, überhaupt von der Ordnung ω, und nach der ersten x von der Ordnung ω^2, also können wir für $\frac{dy}{dt}$ in die dritte Gleichung substituiren:

$$\frac{dy}{dt} = -2\,\omega \cos\varphi \cdot z,$$

und $\omega^2 kx$ fortlassen; dann bleibt

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g - 4\,\omega^2 \cos^2\varphi\, z + \omega q_3 z = -g + \omega\,(q_3 - 4\,\omega \cos^2\varphi)\, z.$$

Behält man von dem (bekannten) Integral dieser Gleichung nur die Glieder bis zur Ordnung ω^2 bei, so kommt:

$$z = Ct \left\{1 + \frac{\omega q_3 - 4\,\omega \cos^2\varphi}{6} t^2 + \frac{\omega^2 q_3^2}{120} t^4\right\}$$
$$- \frac{1}{2} g t^2 \left\{1 + \frac{\omega\,(q_3 - 4\,\omega \cos^2\varphi)}{12} t^2 + \frac{\omega^2 q_3^2}{360} t^4\right\}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in die zweite Gleichung, so erhält man:

$$y = -\omega \cos\varphi\, Ct^2 \left\{1 + \frac{1}{12}\,\omega\,(q_3 - q_2)\, t^2\right\} + \frac{1}{3}\,\omega \cos\varphi\, g t^3 \left\{1 + \frac{1}{20}\,\omega\,(q_3 - q_2)\, t^2\right\}$$

und hieraus:

$$x = \frac{\omega^2 C}{6} \left\{k - 4 \sin\varphi \cos\varphi\right\} t^3 - \frac{\omega^2 g}{24} \left\{k - 4 \sin\varphi \cos\varphi\right\} t^4.$$

Nun ist aber

$$k = 4 \sin\varphi \cos\varphi - \frac{6\,\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,3}} \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{\omega^2},$$

also kommt

$$x = -\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,5}} \sin\varphi \cos\varphi \cdot Ct^3 + \frac{1}{4}\,\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{a}_1^{\,5}}\, g \sin\varphi \cos\varphi\, t^4,$$

d. h. man erhält in der That, für $C = 0$, eine südliche Abweichung, aber sie ist so klein, dass sie sich der Beobachtung völlig entzieht; denn sie würde selbst nach 10″ unter der Breite 45° nicht viel mehr betragen als den 100ten Theil eines Millimeter's.

Man würde aus den obigen Resultaten die von *Finck* angegebenen wieder — bis auf die Grössen von der Ordnung ω^2 — erhalten, wenn man $q_1 = q_2 = q_3 = k = 0$ setzte, d. h. in den Integralen eben die Grössen zweiter Ordnung berücksichtigte, die man in den Differential-Gleichungen weggelassen hat. In Bezug auf z kehrt sich dann das Resultat gerade um; *Finck* muss nämlich, für $C = 0$, bei Berücksichtigung der Grössen von der Ordnung ω^2, wie sich aus unserer Formel ergiebt, erhalten:

$$z = -\frac{1}{2}\, g t^2 \left\{1 - \frac{\omega^2 \cos^2\varphi}{3}\, t^2\right\},$$

also würden die Glieder der zweiten Ordnung das z vermindern, während sie es in der That vermehren. Die südliche Abweichung würde den total verschiedenen Werth

$$\frac{g\,\omega^2 \sin 2\varphi}{12}\, t^4$$

annehmen.

Lässt man nun die Glieder von der zweiten Ordnung fort, so erhält man:

$$x = 0,$$

$$y = -\omega \cos\varphi\; Ct^2 + \frac{1}{3}\,\omega \cos\varphi\, g t^3\,{}^{*)},$$

$$z = Ct + \frac{1}{6}\,\omega q_3\; Ct^3 - \frac{1}{2}\, g t^2 - \frac{1}{24}\, g\, \omega\, q_3 t^4;$$

für ωq_3 können wir hier $\frac{2g}{\mathfrak{a}_1}$ setzen, so dass also die Bewegung parallel der Verticalen nicht von der Rotation der Erde modificirt wird; dabei bleibt für Anfangsgeschwindigkeiten unter 50m und kleine Fallzeiten, wie sie hier nur in Betracht kommen, auch der Einfluss der mit $\frac{zg}{\mathfrak{a}_1}$ multiplicirten Glieder so gering, dass man einfach

$$z = Ct - \frac{1}{2}\, g t^2$$

setzen kann.

---

*) Unberechtigt ist es, wenn *Hansen* l. c. p. 15 auch die dritte Potenz von t fortlässt; die westliche Abweichung für einen senkrecht hochgeworfenen Körper erhält dadurch das Dreifache des wahren Werthes.

Man kann dann leicht berechnen, wie weit westlich von seinem Ausgangspunkt ein vertical hochgeworfener Körper wieder niederfällt. Die ganze Fallzeit beträgt nämlich $\frac{2C}{g}$, mithin wird

$$y = -\frac{4\omega}{3}\cos\varphi\frac{C^3}{g^2}\;{}^{*}).$$

Fällt ein Körper durch die zur Geschwindigkeit C gehörige Fallhöhe mit der Anfangsgeschwindigkeit Null, so wird die östliche Abweichung

$$\frac{1}{3}\omega\cos\varphi\frac{C^3}{g^2},$$

also ist die westliche Abweichung das Vierfache der östlichen.

Auch bei dem freien Fall der Körper übt, wie die Erfahrung bestätigt, die zusammengesetzte Centrifugalkraft, gegenüber den mannigfachen Störungen des Versuches, einen so unbedeutenden Einfluss, dass alle Veranlassung vorlag, nach Erscheinungen zu suchen, welche die Rotation der Erde in helleres Licht zu setzen vermögen. Jene Kraft ist proportional dem Product aus der relativen Geschwindigkeit des beweglichen Punktes und der Winkelgeschwindigkeit der Erde. Es kam also darauf an, den ersten Factor möglichst gross zu machen. Dies ist in genialer Weise erreicht durch *Foucault's* Gyroskop. Die Behandlung desselben gehört nicht zu unserem Thema, und *Lottner***) hat sie in der vollkommensten Weise durchgeführt. Nur um den Gegensatz zwischen dem ruhenden und dem (schnell) rotirenden Körper hervorzuheben, wollen wir schliesslich die Modificationen berühren, welche die oben aufgestellten für das Gleichgewicht eines im Schwerpunkt unterstützten Körpers erfahren, wenn derselbe in ein Gyroskop übergeht, d. h. wenn zwei seiner Trägheitsmomente, z. B. A und B untereinander gleich werden, und der Körper ausserdem eine sehr grosse Winkelgeschwindigkeit um die dritte Axe Z_1 erhält. Es ist dann zu untersuchen, in welcher Lage diese Axe verharren kann.

Die Rechnung wird am bequemsten, wenn man zu einem neuen System von auf der Erde festen Axen übergeht, nämlich die Axe Z_2 parallel der Erdaxe, und X_2 senkrecht darauf nach Süden annimmt. Es ergiebt sich dann, wenn θ der Winkel ist, welchen der nach oben gerichtete Theil der Axe Z_1 mit Z_2 einschliesst, und u' die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um die Axe Z_1, die Gleichung:

---

*) Diese Formel hat auch *Poisson*. cf. Sur le mouvement des projectiles dans l'air, en ayant égard à la rotation de la terre. J. d. l'École Polytechnique. Cah. XXVI. Paris 1838.

**) Cr. J. Bd. LIV.

$$C u' \omega \sin\theta = (C - A) \left\{ \mathfrak{Z}_4 \cos 2(\varphi + \theta) - (\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3) \sin 2(\varphi + \theta) \right\},$$

oder wenn man

$$\mathfrak{Z}_4 = (\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3)\, tg\, 2\varepsilon$$

setzt,

$$C u' \omega \sin\theta = - \frac{(C - A)(\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3)}{\cos 2\varepsilon} \cdot \sin 2(\varphi + \theta - \varepsilon).$$

Wenn nun u' sehr gross wird, so muss $\sin\theta$ sehr klein, also θ nahe an Null oder an 180° sein; man erhält also die beiden Gleichgewichtslagen

$$\theta \text{ oder } \pi - \theta \text{ gleich: } - \frac{(C - A)}{C} \frac{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}_3}{\cos 2\varepsilon \cdot u' \omega} \cdot \sin 2(\varphi - \varepsilon);$$

oder annähernd

$$\theta \text{ oder } \pi - \theta \text{ gleich: } - \frac{C - A}{C} \cdot \frac{3 g}{2 u' \omega a_1} \sin 2\varphi.$$

Die Drehungsaxe weicht also von der Parallelen zur Erdaxe um so weniger ab, je grösser die Winkelgeschwindigkeit des Gyroskops wird.

Schulnachrichten.

Lehrverfassung.

Tertia.

Ordinarius: Hr. Brecher.

Religion. 2 St. Hr. Brecher. — Sommer: Messianische und prophetische Stellen des A. T.'s.; Psalmen; Abschnitte aus Hiob; Mittheilungen aus der Bibelkunde des A. T.'s. — Winter: Das Leben Jesu auf Grundlage der Synoptiker. Mittheilungen aus der Bibelkunde des N. T.'s. — Gelernt wurden: das 4. und 5. Hauptstück des Katechismus mit Luther's Erklärung; ausgewählte Psalmen, Sprüche und die Lieder: „Jesus lebt mit ihm auch ich“, „Wie soll ich dich empfangen“, „Ach bleib mit deiner Gnade“, „O dass ich tausend Zungen hätte“.

Deutsch. 3 St. Hr. Brecher. — Gelesen und erklärt wurden prosaische und poetische Stücke, insbesondere Schiller'sche Balladen. Das Wichtigste über Versmaasse und allgemeine metrische Gesetze wurde mitgetheilt. Vorträge. Uebungen im Disponiren. Alle drei Wochen ein Aufsatz.

Lateinisch. 5 St. Hr. Thieme. Grammatik: Kuhr Schulgrammatik. Im Sommer: Repetition der Formenlehre. Die Lehre vom einfachen Satze bis zum Schluss der Casuslehre. Im Winter: Repetition des im Sommer besprochenen Theiles der Syntax. Die Lehre vom einfachen Satze zu Ende. Lectüre: Im Sommer: Caesar d. b. G. Lib. I, c. 1—30. Im Winter: Lib. II. Wöchentlich ein Extemporale. Im letzten Quartal waren die Schüler in den lateinischen Stunden in zwei Abtheilungen getrennt; die jüngere wurde von Hrn. Kolpe unterrichtet.

Französisch. 4 St. Hr. Wüllenweber. — Grammatik: Im Sommer: Die unregelmässigen Verben. Plötz Schulgrammatik Lekt. 1—24. Im Winter: Die Hülfsverben, die reflexiven und unpersönlichen Verben; das Substantiv, Adjektiv, Adverb, Zahlwort, die Präpositionen; die Wortstellung; die Zeiten. Plötz Lekt. 24—50. — Lektüre: Herrig „Premières lectures françaises“. — Wöchentlich ein Extemporale oder Exercitium.

Englisch. 4 St. Hr. Wüllenweber. — Im Sommer: Die Aussprache; die regelmässige Formenlehre. Schmidt „Elementarbuch“ § 1—12. Im Winter: Wiederholung des Sommerpensums und für die älteren Schüler: Die unregelmässige Formenlehre und die wichtigsten Regeln der Syntax; Schmidt § 13—23. Wöchentlich ein Extemporale oder Exercitium.

Geschichte. 3 St. Hr. Brecher. — Im Sommer: Geschichte Deutschland's bis zum Interregnum. Im Winter: Geschichte Deutschland's bis zum Jahre 1648.

Geographie. 1 St. Hr. Brecher. — Wiederholung der mathematischen Geographie. Europa mit besonderer Rücksicht auf die Verkehrswege und Producte.

Mathematik. 6 St. Hr. Bertram. — Algebra 3 St. Die vier Grundoperationen in Buchstaben, Gleichungen ersten Grades, Potenzen, Wurzeln, Logarithmen. Kambly Elementar-Mathematik Th. 1. Geometrie 3 St. Ausmessung und Aehnlichkeit der Figuren. Wiederholung der früheren Pensen an einfachen geometrischen Aufgaben. Kambly Th. 2. Die ersten Sätze der Stereometrie.

Naturgeschichte 2 St. Hr. **Zettnow.** — Im Sommer: Erklärung des Linne'ischen Systems; Durchnahme einzelner Pflanzen. Bestimmung unbekannter Pflanzen nach *Leunis.* Im Winter: Durchnahme der für den Menschen wichtigsten Ordnungen und Familien der Wirbelthiere nach *Leunis,* „Analytischer Leitfaden der Naturgeschichte“, nämlich von den Säugethieren: die Ordnungen II, IV, VI, VII, VIII, IX; von den Vögeln: die Ordnungen I, II, IV, VI; von den Reptilien: die Ordnungen I, II, III, IV; von den Fischen: Flussbarsch, Karpfen, Häring, Kabliau, Haifisch.

Zeichnen 2 St. Hr. **Sternecker.** — Freihandzeichnen nach Vorlegeblättern (Arabesken, Thiere, Köpfe, Landschaften) und nach Gypsen, insbesondere nach Dupuis'schen Modellen. Elemente der Perspective, bis zur Theilung der Linien in der Grundebene.

Gesang 2 St. Hr. **Magnus.** — Treffübungen, Stimmbildungsübungen, 2- und 3stimmige Lieder und Motetten.

Quarta.

Ordinarius: Hr. **Wüllenweber.**

Religion 2 St. Hr. **Brecher.** — Geschichte des jüdischen Volkes und Geographie von Palästina. Die Perikopen wurden wöchentlich gelesen und erklärt, das Kirchenjahr besprochen. Gelernt: das 3. Hauptstück mit Luther's Erklärung; Sprüche; die Lieder: „Wie gross ist des Allmächt'gen Güte“, „Eine feste Burg“, „Geist vom Vater und vom Sohne“, „Befiehl du deine Wege“.

Deutsch 3 St. im Sommer: Hr. **Wüllenweber,** im Winter: Hr. **Brecher.** — Lesen und Erklären prosaischer und poetischer Stücke aus dem Lesebuche von „*Dielitz* und *Heinrichs*“. Vortrag von Gedichten. Die abhängige Rede; der zusammengesetzte Satz. — Orthographische Uebungen. Alle 3 Wochen ein Aufsatz beschreibenden oder erzählenden Inhaltes.

Lateinisch 6 St. Hr. **Leisering.** — Repetition der Formenlehre. Die Verba mit unregelmässigem Perf. und Sup. Das Allgemeinste über Anwendung von ut, quod, des Accus. c. inf., u. Nomin. c. infin.; das Gerundium und Gerundivum, die Participialconstructionen. *Gedike* Lesebuch. Lectüre: *Gedike* 83 bis Ende mit Auswahl, z. Th. schriftlich übersetzt. — Wöchentlich ein Extemporale oder Exercitium.

Französisch 5 St. Hr. **Wüllenweber.** — Der partitive Genitiv, die regelmässige Conjugation; der Gebrauch der Personalpronomina, das reflexive Verb; die Participien. Einige unregelmässige Verben. *Plötz* „Elementarbuch“, Lekt. 56—91. Wöchentlich ein Extemporale oder Exercitium.

Geschichte u. Geographie 4 St. im Sommer: Hr. **Brecher;** im Winter: Hr. **Wüllenweber.** Geschichte 3 St. im Sommer die griechische, im Winter die römische Geschichte. *Dielitz* „Leitfaden“. Geographie 1 St. im Sommer: Asien, Afrika, Amerika und Australien; im Winter: Wiederholung des Sommerpensums und Europa.

Mathematik 6 St. Hr. **Bertram.** — Rechnen 3 St. Die Decimalbrüche, das abgekürzte Multipliciren und Dividiren, die bürgerlichen Rechnungsarten. Geometrie 3 St. Elemente bis zum Pythagoreischen Lehrsatz. *Kambly,* Elementar-Mathematik, Th. 2.

Naturgeschichte 2 St. Hr. **Zettnow.** — Im Winter: Durchnahme einzelner Wirbelthiere als Repräsentanten der wichtigeren Ordnungen und Familien. Im Sommer: Durchnahme einzelner Pflanzen.

Zeichnen 2 St. Hr. **Sternecker.** — Zeichnen nach Dupuis'schen Modellen, sowohl von geometrischen als figürlichen Gegenständen und nach Vorlegeblättern.

Schreiben 2 St. Hr. **Schobert.**

Gesang 2 St. Mit Tertia combinirt.

Quinta.

Ordinarius: Coetus A. Hr. Thieme, Coetus B. Hr. Mewes.

Religion 3 St. Coet. A. Hr. Brecher, Coet. B. Hr. Mewes. Biblische Geschichten des neuen Testaments nach *Otto Schulz* Bibl. Lesebuch. Gelernt wurden: Die Reihenfolge der bibl. Bücher; das 2. Hauptstück mit Luther's Erklärung; Bibelsprüche; die Lieder: „O Haupt voll Blut und Wunden", „O heil'ger Geist kehr' bei uns ein", „Vom Himmel hoch da komm ich her", „Wenn ich o Schöpfer deine Macht".

Deutsch 4 St. im Sommer: Hr. Thieme, im Winter: Coet. A. Hr. Thieme, Coet. B. Hr. Mewes. Lehre vom einfachen erweiterten Satze und von den leichteren Formen des zusammengesetzten Satzes, von der Interpunction und vom Gebrauch der Casus. Befestigung in der Orthographie. Lesen, Durchsprechen des Gelesenen, Nacherzählen, Auswendiglernen von Gedichten. Alle 14 Tage ein orthographisches Dictat oder ein kleiner Aufsatz.

Lateinisch 6 St. im Sommer: Hr. Thieme, im Winter: Coet. A. Hr. Thieme, Coet. B. Hr. Mewes. — Ausnahmen von der regelmässigen Declination und von den Grundregeln, die gebräuchlichsten der unregelmässigen Verba, Deponentia, Pronomina, Comparative, Zahlwörter, Präpositionen, Adverbien, Verba anomala und defectiva. (*Gedike* 27—47.) Lectüre der dazu gehörigen Sätze und der Fabeln und Erzählungen bis p. 75. Wöchentlich ein Extemporale oder ein Exercitium.

Französisch 5 St. im Sommer: Hr. Wüllenweber, im Winter: Hr. Bieling. — Regeln über die Aussprache. Die Declination: avoir und être, Vorübungen zur regelm. Conjugation; das Pronom possessif, interrogatif, relatif, démonstratif: Zahlwörter. *Plötz*, Elementarbuch Lekt. 1—55, im Anschlusse daran mündliche und schriftliche Uebungen; alle 14 Tage ein Extemporale.

Geschichte u. Geographie. Geographie 2 St. Hr. Thieme. Allgemeine Kenntniss der Erde nach ihrer Bodengestaltung. *Voigt*, Leitfaden, Seite 19—41. Geschichte 1 St. Hr. Thieme. Aus der alten Geschichte und namentlich aus der griechischen Sagengeschichte wurde Einzelnes erzählt und von den Schülern mündlich wiedergegeben.

Rechnen 4 St. im Sommer: Hr. Zettnow, im Winter: Coet. A. Hr. Zettnow, Coet. B. Hr. Mewes. — Einübung der Bruchrechnung und der Anwendung derselben auf die gebräuchlichsten bürgerlichen Rechnungsarten, Regeldetri, Gesellschafts-, Vertheilungs- und Zinsrechnung. *Fölsing*, Rechenbuch, Th. 1 und 2.

Naturgeschichte 2 St. Hr. Zettnow. — Im Winter: Durchnahme einzelner Wirbelthiere als Repräsentanten für die wichtigeren Ordnungen und Familien der Rückgratthiere. Im Sommer: Durchnahme einzelner Pflanzen und Einübung der Terminologie.

Zeichnen 2 St. Hr. Sternecker. — Gemeinschaftliche Uebungen nach Vorzeichnung der Figuren an der Wandtafel. Zeichnen nach Vorlagen. Anwendung von Zirkel und Lineal zu architectonischen Zeichnungen.

Schreiben 2 St. Hr. Bethge. — Deutsche und lateinische Schrift in Wörtern und einfachen Texten. Wöchentlich eine häusliche Arbeit.

Gesang 2 St. Hr. Magnus. — Treffübungen und Bildung der Stimme auf verschiedenen Vokalen. Einübung 2- und 3stimmiger Lieder und Motetten, sowie einstimmiger Choräle.

Sexta.

Ordinarius: Coetus A Hr. Leisering, Coetus B Hr. Bieling.

Religion 3 St. im Sommer: Hr. Brecher, im Winter: Coet. A. Hr. Leisering, Coet. B. Hr. Brecher. — Biblische Geschichten des A. Test. bis zum Schluss der Geschichte der Könige nach *Otto Schulz* bilbl. Lesebuch. Gelernt wurden: Das 1. Hauptstück mit Luther's Erklärung, das 2. und 3. Hauptstück ohne Luther's Erklärung; Bibelsprüche; die Kirchenlieder: „Lobt Gott ihr Christen allzugleich", „Befiehl du deine Wege", „O Welt sieh' hier dein Leben".

Deutsch 4 St. im Sommer: Hr. **Leisering**, im Winter: Coetus A. Hr. **Leisering**, Coetus B. Hr. **Bieling**. — Lesen und Nacherzählen; Erlernen geeigneter Gedichte; Grammatik im Anschluss an das Lesen, Unterscheidung der Redetheile, die Präpositionen, die Glieder des einfachen Satzes. Alle 14 Tage ein Dictat.

Lateinisch 6 St. im Sommer: Hr. **Leisering**, im Winter: Coet. A. Hr. **Leisering**, Coet. B. Hr. **Bieling**. — Declination der Substantiva und Adjectiva, Genusregeln, die 4 regelmässigen Conjugationen; *Gedike* p. 1—26. Gelesen wurden die zugehörigen Stücke, *Ged.* p. 59—65; wöchentlich ein Extemporale oder eine häusliche, schriftliche Uebung.

Geographie 3 St. im Sommer: Hr. **Zettnow**, im Winter: Coet. A. Hr. **Thieme**, Coet. B. Hr. **Mewes**. — Die Vertheilung von Wasser und Land auf der Erdoberfläche nach *Voigt's* Leitfaden. Cursus I.

Rechnen 5 St. im Sommer: Hr. **Zettnow**, im Winter: Hr. **Leisering**. — Die 4 Species mit benannten Zahlen. Addiren und Subtrahiren mit Brüchen.

Naturgeschichte 2 St. Hr. **Zettnow**. — Im Winter: Durchnahme einzelner Wirbelthiere als Repräsentanten für die wichtigeren Ordnungen und Familien der Rückgratthiere. Im Sommer: Durchnahme einzelner Pflanzen und Einübung der Terminologie.

Zeichnen 2 St. Hr. **Sternecker**. — Die Elemente der Formenlehre. Linien in verschiedenen Richtungen und Maassen als Vorbereitung zur Düpuischen Methode mit Benutzung der Vorlegeblätter von Eichens u. A.

Schreiben 3 St. Coet. A Hr. **Toepfer**, Coet. B Hr. **Schobert**. — Deutsche und lateinische Schrift in Buchstaben, Wörtern und Sätzen. Wöchentlich eine häusliche Arbeit.

Gesang 2 St. Hr. **Magnus**. — Erlernen der Notenschrift, Takteintheilung etc. Treffübungen und Uebungen in der Bildung der Stimme. Einübung einstimmiger Choräle und Lieder.

---

1. Vorschulklasse.

Ordinarius: Hr. **Schobert**.

Religion 4 St. Biblische Geschichten nach *Wangemann*, 2. Stufe. Gelernt wurden das 1. Hauptstück mit Luther's Erklärung, Bibelsprüche und 3 Kirchenlieder: „Nun danket alle Gott“, „Lobe den Herren“, „Lobt Gott ihr Christen allzugleich“.

Deutsch 10 St. Berlinisch. Lesebuch. Uebungen im sinngemässen Lesen und verständiger Auffassung des Gelesenen, im Decliniren und Conjugiren. Fürwörter und Zahlwörter. Orthographische Uebungen. Wöchentlich 2 häusliche Arbeiten.

Geographie 2 St. Vorbegriffe, Betrachtung des Globus, Heimathskunde.

Rechnen 6 St. Die 4 Species mit ganzen Zahlen. Resolviren und Reduciren. Fölsing Rechenbuch Theil 1. Wöchentlich 2 häusliche Arbeiten.

Schreiben 4 St. Deutsche und lateinische Schrift in Buchstaben, Wörtern und Sätzen. Wöchentlich 2 häusliche Arbeiten.

---

2. Vorschulklasse.

Ordinarius: Hr. **Bethge**.

Religion 4 St. Ausgewählte biblische Geschichten des alten und neuen Testaments nach *Wangemann*. Bibelsprüche und Liederstrophen. Die 10 Gebote. Das Vaterunser; Morgen-, Abend- und Tischgebete. Psalm 23, Ps. 103, 1—8. Kirchenlieder: „Ach bleib' mit deiner Gnade“, „Gott des Himmels und der Erden“, „Mein erst Gefühl sei Preis und Dank“.

Deutsch 9 St. Leseübungen und Besprechung des Gelesenen. Berlinisches Lesebuch. Eine angemessene Anzahl von Gedichten, Fabeln, Erzählungen u. s. w. memorirt und recitirt. Anfänge der Grammatik, im engsten Anschluss an das Lesebuch. Orthographische Uebungen.

Rechnen 6 St. Die vier Grundrechnungen im erweiterten Zahlenkreise, mündlich und schriftlich; das Einmaleins bis 12.

Schreiben 5 St. Die kleinen und grossen Buchstaben der deutschen Schrift einzeln, in Wörtern und in einfachen Texten.

3. Vorschulklasse.

Ordinarius: Hr. Töpfer.

Religion 4 St. Ausgewählte leichtverständliche Geschichten des alten und neuen Testaments. Gelernt wurden geeignete Liederverse und Gebete.

Sprechübungen 2 St. Besprechung von naheliegenden, anschaulichen Gegenständen, zum Theil nach Strübing's Bildertafeln. Uebungen im Nacherzählen. Erlernung kleiner Gedichte. Besprechung von leichtfasslichen Lesestücken.

Lesen 9 St. I. Abtheilung. Hr. **Toepfer**. Lesen sämmtlicher poetischer und prosaischer Stücke der Handfibel von *O. Schulz*. Uebungen im Lesen lateinischer Schrift. II. Abtheilung Hr. **Bredschneider**. Die ersten Anfänge des Lesens. Lautiren und Lesen einzelner Sylben und Wörter.

Schreiben u. Lesen 6 St. Einübung der kleinen und grossen deutschen Buchstaben, einzeln und in Wörtern. I. Abth. Leichte orthographische Uebungen. Abschreiben von Lesestücken und Lesen des Geschriebenen. Hinweis auf Haupt-, Eigenschafts- und Zeitwort.

Rechnen. Numeriren und die vier Species. II. Abth. im Zahlenkreis von 1—20, I. Abth. im Zahlenkreis von 1—100. Dazu entsprechende schriftliche Uebungen.

Uebersicht der eingeführten Lehrbücher.

1.	3te Vorschulklasse:	Handfibel von O. Schulz. Ausgabe B.
2.	2te u. 1te Vorschulklasse:	Berlinisches Lesebuch.
3.	"	Fölsing. Rechenbuch Th. 1.
4.	Sexta:	O. Schulz. Biblisches Lesebuch.
5.	"	Dielitz und Heinrichs. Deutsches Lesebuch.
6.	"	Gedike. Lateinisches Lesebuch.
7.	"	Voigt. Geographischer Leitfaden und No. 3.
8.	Quinta:	Plötz. Elementarbuch der französischen Sprache.
9.	"	Fölsing. Rechenbuch Th. 2 und No. 3—7.
10.	Quarta:	Dielitz. Grundriss der Weltgeschichte.
11.	"	Kambly. Elementar-Mathematik, Th. 1 und 2.
12.	"	Leunis. Schul-Naturgeschichte, Th. 1 und 2, und No. 5—9.
13.	Tertia:	Caesaris. Comm. de bello gallico.
14.	"	Kuhr. Schulgrammatik der lateinischen Sprache.
15.	"	Plötz. Schulgrammatik der französischen Sprache.
16.	"	Herrig. Premières lectures françaises.
17.	"	J. Schmidt. Elementarbuch der englischen Sprache.
18.	"	Schiller's Gedichte und No. 6, 7, 10, 11, 12.

Verfügungen der Behörden.

Kgl. Provinzial-Schulcollegium. 4. März 1868. Das Prov.-Schulcollegium übersendet die „Instructionen für die Directoren und die Lehrer und Ordinarien an den höheren Unterrichtanstalten der Provinz Brandenburg vom 22. Jan. 1868."

Jd. 20. Juni 1868. Das Prov.-Schulcollegium macht auf die §§ 151—155 der Militair-Ersatz-Instruction für den Norddeutschen Bund vom 26. März 1868 aufmerksam, welche in den „Verordnungen und Gesetzen etc. herausgegeben vom Geheimen Ober-Regierungs-Rath Wiese" pag. 389 ff. abgedruckt sind.

Jd. 27. Juni. Das Provinzial-Schulcollegium genehmigt die eingereichte Schulordnung der Anstalt.

Jd. 13. Juli. Der Herr Minister der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten hat die den Oberlehrern an den hiesigen Gymnasien und Realschulen bewilligte Vergünstigung der Benutzung des Journalzimmers der Königl. Bibliothek hierselbst auch den Oberlehrern der Städtischen höheren Bürgerschule gewährt.

Magistrat. 18. November 1868. Der Magistrat ladet die Lehrer der Anstalt zur Gedächtnissfeier Schleiermacher's am 21. Nov. in der Nicolaikirche ein.

Königl. Prov. Schulcollegium. 24. November 1868. Das Schulcollegium genehmigt, dass nach Massgabe der C.-Verfügung von 4. Mai 1846 bei der Anstalt eine Prüfungs-Commission für junge Leute des Inlandes gebildet werde, welche auf ausländischen Lehranstalten oder privatim unterrichtet worden sind, und zu ihrer Bewerbung um Anstellung im Post-, Steuerfach und anderen Zweigen des öffentlichen Dienstes eines entsprechenden Zeugnisses von einer diesseitigen Schulanstalt bedürfen. Dieselbe soll bestehen: aus dem Rector und den Oberlehrern Dr. Brecher und Dr. Wüllenweber.

Jd. 8. Januar und 25. Januar 1869. Die Ferien werden bestimmt:
Osterferien: 25. März bis 7. April; Pfingstferien: 15. bis 19. Mai; Sommerferien: 4. Juli bis 1. August; Michaelisferien: 3. bis 17. October; Weihnachtsferien 19. December bis 2. Januar 1870.
Die öffentliche Prüfung wird auf den 23. März gelegt.

Jd. 13. Januar 1869. Der Relief-Schulatlas von C. Raaz, Berlin bei Kellner und Giesemann, wird durch den Herrn Minister empfohlen.

Chronik der Anstalt.

Die Errichtung einer höheren Lehranstalt in der Steinstrasse war von den Communalbehörden seit längerer Zeit beschlossen; demgemäss wurde auch das Schulhaus so erbaut, dass es allen Anforderungen, die in Bezug auf das Local einer Real- oder Gewerbe-Schule gestellt werden können, in dem reichsten Masse genügt.

Der Gefälligkeit des Herrn Stadt-Bau-Inspector Hanel verdanken wir die folgenden Angaben: „Der Bau wurde gleichzeitig mit dem angrenzenden Bau des Sophien-Gymnasiums im Monat März 1866 begonnen und so gefördert, dass bereits am 3. November desselben Jahres die Richtefeier stattfinden konnte.

Der innere Ausbau wurde im Jahre 1867 vollendet und das fertige Bauwerk am 30. September desselben Jahres übergeben.

Das Gebäude hat an der Steinstrasse eine Längenausdehnung von 172′ 6″ und in dem zurücktretenden Mittelbau 41′, in den beiden vortretenden Risaliten aber 55′ 7″ Tiefe. Die Front dieses Gebäudes tritt um ein Bedeutendes gegen die alten Häuserfronten zurück, so dass die Strasse an den schmalsten Stellen 64′, an der breitesten Stelle längs der Front des Mittelbaues 69′ 5″ breit ist.

Der anstossende Seitenbau an der linken Seite des Hofes ist 60′ 10½″ lang und 40′ 6″ tief und bildet längs der nachbarlichen Grenze einen mit dem Flügel des Gymnasiums correspondirenden Gebäudetheil.

Der Zugang zur Anstalt liegt an der Steinstrasse. Vor diesem ist ein geräumiges Vestibule angelegt; in der Axe desselben steigt die dreiarmige Haupttreppe von Granit durch alle Stockwerke hinauf, während sich zu beiden Seiten die nach den Gebäudelängen hindurchgehenden Corridore anschliessen und zwar so, dass der Corridor des Hauptgebäudes an der Strassenfront (Steinstrasse) mit directer Beleuchtung, derjenige im Seitenflügel an der Nachbargrenze angelegt ist und an seinem Ende durch einen besondern Lichthof erhellt wird. Sämmtliche Schulräume erhalten also ihr Licht vom Schulhofe her, das Strassengeräusch kann daher keine Störungen des Unterrichts herbeiführen.

Diese Räume sind nun in den einzelnen Stockwerken vertheilt, wie folgt:

I. Im Erdgeschoss.

1) Das Conferenz- und Lehrerversammlungs-Zimmer.
2) Die Bibliothek.
3) Das Amtszimmer des Rectors.
4) Das Archiv.
5) Die chemische Klasse.
6) Das chemische Laboratorium.
7) Das Naturalien-Cabinet.
8) Zwei Klassenzimmer.
9) Eine aus zwei Stuben und Küche bestehende Schuldienerwohnung.

II. Im 1. Stockwerke.

1) Sieben Klassenzimmer zu 40—50 Schülern (durchschnittlich 20′ breit, 26′ tief).
2) Der Zeichensaal für 50—60 Schüler.
3) Die physikalische Klasse.
4) Das Apparatenzimmer.

III. Im 2. Stockwerke.

1) Vier Klassen wie vorher.
2) Der Gesangsaal für 100 Schüler.
3) Der Hörsaal für 600 Schüler mit Vorzimmer.

Im Kellergeschoss, welches aus sanitätlichen Gründen unter dem ganzen Gebäude ausgeführt ist, sind die zur Warmwasserheizung für das ganze Gebäude (ausschliesslich der Schuldienerwohnung) erforderlichen Räume für Kessel und Brennmaterial, so wie ein Utensilienraum untergebracht.

Das Gebäude ist überall massiv, in gutem Backsteinrohbau, unter hauptsächlicher Anwendung des Flachbogens mit überwölbten und gepflasterten Corridoren und mit Schieferbedachung ausgeführt, und umschliesst von zwei Seiten den circa 15,000 □Fuss grossen Erholungshof, welcher mit Kies befestigt, mit Bäumen bepflanzt und durch Thonrohre unterirdisch entwässert ist. Gegen den Hof des Gymnasiums bildet eine 6½' hohe Mauer die Grenze, während an der vierten Hofseite Nachbargebäude stehen. An dieser ist das Latrinengebäude errichtet.

Die Baukosten der Gesammtanlage mit dem Latrinengebäude, den Umwährungsmauern und der Terrain-Regulirung belaufen sich auf 102,500 Thlr., wobei jedoch nicht unerwähnt bleiben darf, dass sich auf dem Bauterrain stellenweise schlechter Baugrund vorfand, und die Fundirung theils unter Wasser erfolgen musste.

Unter Oberleitung des Stadt-Bauraths Gerstenberg wurde der Bau durch den Stadt-Bau-Inspector Hanel ausgeführt."

Nach dem Beschluss der Stadtverordneten-Versammlung vom 14. Februar 1867 wurde für die innere Organisation der Schule der Plan angenommen, dass die Klassen von Sexta bis Secunda übereinstimmend mit den gleichnamigen einer Realschule erster Ordnung eingerichtet, und auch gleiche Berechtigungen, namentlich in Bezug auf den einjährig freiwilligen Militairdienst, gewähren sollten. Die hierzu erforderliche Zustimmung des Herrn Ministers der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten wurde in dem Rescript vom 23. Oct. 1867 in Aussicht gestellt, sobald die Schule bis zur Secunda entwickelt sein werde. Nach der Unterrichts- und Prüfungs-Ordnung vom 6. Oct. 1859 heissen Schulen dieser Art „höhere Bürgerschulen."

Die Schule wurde eröffnet am 20. April pr. mit drei Vorschul-Klassen und den vier Real-Klassen Sexta, Quinta, Quarta, Tertia. Am Dinstag den 28. April fand die feierliche Einweihung durch eine Rede des Herrn Stadtschulrath Dr. Hofmann und des Rectors statt.*) Gesänge, ausgeführt unter der Leitung des Herrn Musik-Director Prof. Bellermann von dem Chor des Berlinischen Gymnasiums zum grauen Kloster erhöhten die Feier. An derselben nahmen die Herren Geh. Regierungs-Rath Reichenau, Provinzial-Schulrath Dr. Klix und Dr. Kiessling, sowie Vertreter des Magistrats, der Stadtverordneten-Versammlung, Directoren der älteren höheren Schulen Berlin's, sowie die Eltern der Schüler, und viele andere Freunde des Schulwesens Theil.

Zu Michaelis wurde die Theilung der Sexta und Quinta in je zwei Parallel-Coetus nothwendig.

Mit Beginn des Sommersemesters soll auch Quarta und Tertia getheilt und eine Secunda errichtet werden.

Lehrer.

Zum Rector der Anstalt wurde der Unterzeichnete, bis dahin Lehrer am Fr. Werder'schen Gymnasium hierselbst, vom Magistrat gewählt und von den Königlichen Behörden bestätigt.

Zu Ostern 1868 wurden ferner angestellt: als Oberlehrer die HH. Dr. Brecher und Dr. Wüllenweber, und als ordentliche Lehrer die HH. Dr. Zettnow und Leisering; als Lehrer der Vorschule die HH. Schobert, Bethge und Töpfer.

Zu Michaelis traten in das Collegium als ordentliche Lehrer ein die HH. Dr. Mewes, Dr. Bieling und Dr. Thieme; von denen der Letztere bereits seit Ostern an der Schule gewirkt hatte.

---

*) Die Reden sind abgedruckt im Communalblatt, 1868 Beilage IX. p. 83 ff.

Hr. Dr. Adolf Brecher, aus Acken a/E., studirte in Halle Theologie und erwarb die licentia concionandi; er widmete sich dann philologischen Studien in Berlin, fungirte ein Semester als Hilfslehrer am Gymnasium zu Greiffenberg i. P., war darauf Mitglied des Candidaten-Convict's am Kloster U. L. F. zu Magdeburg; ward in Halle pro. fac. doc. geprüft und zum Dr. phil. promovirt, und war seit Ostern 1864 ord. Lehrer am hiesigen Friedrichs-Gymnasium und Realschule. Er publicirte 1868 eine „Uebersicht der territorialen Veränderungen des preussischen Staates."

Hr. Dr. Heinrich Wüllenweber, aus Herscheid, Kreis Solingen, studirte in Bonn und Berlin, war hier auch Mitglied des von Prof. Herrig geleiteten Seminars für Lehrer der neueren Sprachen, erlangte bei der wissenschaftlichen Prüfungs-Commission in Berlin die facultas docendi, bei der Universität Halle die Doctorwürde; war als Hilfslehrer und seit dem Anfange des Jahres 1865 als ordentlicher Lehrer an der hiesigen Friedrichs-Werder'schen Gewerbeschule thätig, und ging Michaelis desselben Jahres an die Königstädtische Realschule über.

Hr. Dr. Emil Zettnow, aus Loetzen in Ostpreussen, erhielt seine Schulbildung auf dem hiesigen Joachimsthal'schen und dem Cöllnischen Gymnasium, studirte hier Naturwissenschaften, und ward von der Berliner Universität zum Dr. phil. promovirt auf Grund der Dissertation: De Wolframio ejusque connubiis nonnullis. Nachdem er sich bei der hiesigen wissenschaftlichen Prüfungs-Commission auch die facultas docendi erworben hatte, absolvirte er das pädagogische Probejahr bei der Kgl. Realschule und wurde Michaelis 1867 ordentlicher Lehrer an derselben Anstalt. Er publicirte eine ausführliche deutsche Bearbeitung seiner Dissertation in Poggendorf's Annalen Bd. CXXX, und eine „Anleitung zur qualitativen chemischen Analyse ohne Anwendung von Schwefelwasserstoff und Schwefelammonium. Berlin 1867."

Hr. Hermann Leisering, aus Schwerz bei Landsberg (Prov. Sachsen) gebürtig, studirte in Halle und Berlin Philologie, erwarb bei der wissenschaftlichen Prüfungs-Commission zu Berlin die facultas docendi, und war seit Ostern 1866 als Cand. prob. und später als Hilfslehrer am Cöllnischen Realgymnasium thätig.

Hr. Rudolph Schobert, aus Liegnitz, auf dem Seminar zu Bunzlau für das Lehrfach vorbereitet, fungirte mehrere Jahre als Hauslehrer und an Privatschulen, machte dann einen Cursus auf der hiesigen Central-Turnanstalt durch und erhielt die Qualification zum Turnlehrer; er trat, nachdem er noch einige Jahre an hiesigen Töchterschulen unterrichtet hatte, 1858 in den städtischen Dienst; seit Michaelis 1859 war er Lehrer an der Vorschule der Luisenstädtischen Realschule, und erwarb auch 1867 bei dem Königl. Provinzial-Schulcollegium die Befähigung zur Verwaltung eines Rectorats an einer allgemeinen Stadtschule. Er redigirt: „Stimmen aus der Berliner Lehrerwelt. Eine Zeitschrift in zwanglosen Heften. Berlin 1869."

Hr. Heinrich Bethge, aus Anclam, auf dem Seminar zu Stettin für das Lehrfach vorbereitet, war ein Semester Hilfslehrer an der Prov. Taubstummenschule zu Stettin, zwei Jahr Hauptlehrer der Vorschule in Treptow a/R., 16 Jahre wirkte er als Lehrer in Colberg, theils an der Vorschule, theils an der höheren Töchterschule und der Bürgerschule; nachdem er dann drei Semester an einer hiesigen Privatschule gearbeitet hatte, wurde er zu Ostern 1866 als ordentlicher Lehrer an der Vorschule der Louisenstädtischen Gewerbeschule angestellt.

Hr. Friedrich Toepfer, aus Freienwalde a/O., im Seminar zu Cöpenick für das Lehrfach vorbereitet, fungirte zuerst als Lehrer an der Stadtschule zu Wusterhausen a/D., darauf, nachdem er den Feldzug in Schleswig mitgemacht hatte, an einer hiesigen Privatschule, und während eines Semesters an der Vorschule der Dorotheenstädtischen Realschule. Zugleich erwarb er sich bei der hiesigen Akademie der Künste die Qualification als Zeichenlehrer, und bei der Centralturnanstalt die als Turnlehrer.

Hr. Dr. Wilhelm Mewes, aus Freienwalde a/O., studirte, nach dem Besuch des Friedrichs-Werder'schen Gymnasiums, in Berlin Philologie; ging 1862 bei der Bewerbung um die von der phil. Facultät gestellte Preisaufgabe als Sieger hervor, erhielt von der Berliner wissenschaftlichen Prüfungs-Commission die fac. docendi, war dann kurze Zeit am Berliner Gymnasium zum Grauen Kloster beschäftigt, und ging zu Michaelis 1864 an die Ritterakademie in Brandenburg a/H., wo er als Adjunct

bis Michaelis 1868 thätig war. Die Doctorwürde erhielt er in Halle mit einer Dissertation, welche deutsch bearbeitet im Programme der Ritterakademie v. J. 1868 veröffentlicht ist unter dem Titel: „Untersuchungen über das achte Buch der Thykydideischen Geschichte."

Hr. Dr. Hugo Bieling, aus Berlin, am Berlinischen Gymnasium zum Grauen Kloster vorgebildet, studirte auf der hiesigen Universität Philologie, und war zwei Jahre lang Mitglied des Königl. Seminars für Lehrer der neueren Sprachen. Nachdem er 3 Jahre lang als Lehrer am Victoria-Institut zu Falkenberg fungirt hatte, erwarb er zu Berlin die fac. doc., Michaelis 1866 ging er an die hiesige Friedrichs-Werdersche Gewerbeschule, und Michaelis 1867 an die Dorotheenstädtische Realschule, an welcher er zu Ostern 1868 als ordentl. Lehrer angestellt wurde. Die Doctorwürde ertheilte ihm die Universität Leipzig auf Grund der Dissertation: De hiatus vi atque usu apud poetas epicos qui Augusti aetate floruerunt. Berolini 1868.

Hr. Dr. Otto Thieme, aus Oldisleben in Sachsen-Weimar, erhielt seine Gymnasialbildung in Eisleben unter Fr. Ellendt, studirte in Jena und Leipzig Theologie und Philologie, war dann längere Zeit Erzieher in Berlin und in Pommern, erwarb in Berlin die fac. doc. und ging dann auf drei Jahre als Lehrer an das deutsche Gymnasium zu Wiborg in Finnland; nachdem er sodann längere Reisen besonders in archäologischem Interesse durch Frankreich und Italien gemacht hatte, begann er Ostern 1868 seine Wirksamkeit an unserer Anstalt.

Das pädagogische Probejahr begann Hr. Dr. Kolpe im vierten Quartal cr.

Während einer 14tägigen Krankheit des Hrn. Dr. Zettnow vertrat denselben bereitwillig Hr. Cand. Heller, Mitglied des Königl. Seminars für Lehrer der Mathematik.

Im letzten Semester unterrichteten an der Anstalt ausser dem Rector:

Der 3. Oberlehrer Dr. Brecher,
- 4. - Dr. Wüllenweber,
- 4. ordentl. Lehrer Dr. Mewes,
- 5. - - Dr. Bieling,
- 6. - - Dr. Thieme,
- 7. - - Dr. Zettnow,
- 8. - - Leisering,
- Cand. prob. Dr. Kolpe,
- Gesanglehrer, Organist Magnus,
- Zeichenlehrer, Bildhauer Sternecker,
- 1. Elementar-Lehrer Schobert,
- 2. - Bethge,
- 3. - Toepfer,
- Elementar-Hilfslehrer Bredschneider.

Die Vertheilung der Lehrstunden ergiebt die folgende Tabelle:

6

Uebersicht der im Winter 1868—69 ertheilten Lehrstunden.

Lehrer.	Ordinariat.	III.	IV.	Va.	Vb.	VIa.	VIb.	1.	2.	3.	Insp.	Sa.
Bertram . . .		6 Mathem.	6 Mathem.									12
Brecher . . .	III	2 Religion 3 Deutsch 4 Gesch. u. Geogr.	2 Religion 3 Deutsch	3 Religion			3 Religion					20
Wüllenweber .	IV	4 Franz. 4 Englisch	5 Franz. 4 Gesch. u. Geogr.								4 Insp.	21
Mewes	Vb				3 Religion 4 Deutsch 6 Latein 4 Rechnen		3 Geogr.					20
Bieling	VIb			5 Franz.	5 Franz.		4 Deutsch 8 Latein					22
Thieme	Va	5 Latein		4 Deutsch 6 Latein 3 Gesch. Geogr.	3 Gesch. u. Geogr.	3 Geogr.						24
Zettnow . . .		2 Naturg.	2 Naturg.	2 Naturg. 4 Rechnen	2 Naturg.	2 Naturg.	2 Naturg. 5 Rechnen					21
Leisering . . .	VIa		6 Latein			3 Religion 4 Deutsch 8 Latein 5 Rechnen						26
Kolpe		5 Latein										5
Magnus . . .		2 Gesang		2 Gesang	2 Gesang	2 Gesang	2 Gesang					10
Sternecker . .		2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.					12
Schobert . . .	1		2 Schreib.				3 Schreib.	4 Religion 8 Deutsch 2 Geogr. 6 Rechnen 4 Schreib.				29
Bethge	2			2 Schreib.	2 Schreib.				4 Religion 8 Deutsch 6 Rechnen 6 Schreib.			28
Toepfer . . .	3					3 Schreib.				4 Religion 2 Sprechübungen 6 Lesen, I. Abth. 6 Schreib. u. Lesen 6 Rechnen		27
Bredschneider .										6 Lesen, II. Abth.		6
Zusammen . .		32 (2) (5)	32 (2)	33	33	32	32	24	24	24 (6)	4	288

Turnunterricht.

Während des Sommers leiteten den, auf den Höfen der städtischen höheren Bürgerschule und des Sophien-Gymnasiums ertheilten, Turnunterricht Hr. Wolfgard und Hr. Toepfer. Der erstere gab, vom Sophien-Gymnasium vollständig in Anspruch genommen, seine erfolgreiche Wirksamkeit an unserer Anstalt zu Michaelis auf; an seiner Stelle übernahm Hr. Schobert einen Theil des Turnunterrichts, welcher während des Winters in der Turnhalle des Hrn. Krischen, Schönhauser Allée No. 182 ertheilt wurde.

Frequenz.

Die Zahl der Schüler betrug im Sommer-Semester des verflossenen Schuljahres 241, im Winter-Semester 353. Von diesen waren

	im Sommer:	im Winter:
in Tertia	15	35
- Quarta	30	54
- Quinta A	49	28
- Quinta B		33
- Sexta A	52	45
- Sexta B		45
- der 1. Vorschulklasse	26	33
- der 2. Vorschulklasse	21	27
- der 3. Vorschulklasse	48	53

15 Schüler verliessen die Anstalt wieder bis zum Anfang des Winter-Semesters, und 6 während desselben.

Feierlichkeiten.

Die Anstalt beging den Jahrestag der Schlacht bei Königgrätz durch eine Rede des Hrn. Dr. Brecher, das Reformationsfest durch eine Rede des Rectors; die von dem Magistrat übersandte Denkmünze erhielt der Tertianer Kaumann.

Ferien.

Die Pfingstferien dauerten vom 30. Mai bis 3. Juni, die Sommerferien vom 5. Juli bis 2. Aug., die Michaelisferien vom 27. Sept. bis 11. Oct., die Weihnachtsferien vom 20. Dec. bis 3. Jan.

Ausserdem fiel der Unterricht an 13 Nachmittagen der Hitze wegen aus, und am 21. Novbr. wegen der Feier des Geburtstages Schleiermacher's.

Lehrmittel.

Auch auf die Ausstattung der Schule mit Lehrmitteln hat sich die Fürsorge ihres hochedelen Patrones mit der dankenswerthesten Municifenz erstreckt.

Noch vor der Eröffnung der Schule wurden bewilligt: ein Pianoforte und die erforderlichen Noten für den Gesangunterricht; ferner 100 Thlr. für Erd- und Himmelsgloben, sowie die nöthigen Wandkarten und Bilder für den Anschauungsunterricht; desgleichen 100 Thlr. zu Lehrmitteln für den Zeichenunterricht, aus denen Dupuis'sche Modelle (Stabfiguren und Gypse), Eichens Wandtafeln für den Elementarzeichen-Unterricht, und andere Vorlagen von Domschke, Calame, Hubert u. s. f. angeschafft worden sind.

Aus dem Etat konnten für den Zeichenunterricht noch gegen 150 Vorlegeblätter, ein Apparat zur Demonstration der Elemente der Perspective nebst 6 Glastafeln und 3 Holzmodellen, ferner Photographieen zur Erläuterung derselben Lehren, und ein Apparat zur Demonstration der Elemente der descriptiven Geometrie erworben werden.

Für den naturwissenschaftlichen Unterricht wurden aus dem Etat einige Massstäbe und Gewichte, eine hydrostatische Waage und ein Besteck mit Magnetnadeln; ferner 284 Blätter aus Goldfuss Atlas, und einige Scelette angeschafft. Für die botanischen Stunden wurden die Pflanzen von Hrn. Universitäts-Gärtner Sauer bezogen.

Die Begründung einer schon in der nächsten Zeit den Anforderungen des Unterrichts genügenden Sammlung aber haben Magistrat und Stadtverordnete möglich gemacht durch besondere Bewilligung von 1011 Thlr. für physikalische Apparate, 318 Thlr. 5 Sgr. für das chemische Laboratorium und 250 Thlr. für das naturhistorische Cabinet. Ueber die Verwendung dieser Mittel wird im nächsten Jahre berichtet werden.

Bibliothek.

Für die Lehrerbibliothek wurden angeschafft: Wiese, Das höhere Schulwesen in Preussen. Id. Verordnungen und Gesetze für die höheren Schulen in Preussen. Die Gesetzgebung auf dem Gebiet des Unterrichtswesens in Preussen. Stiehl, Centralblatt. Schrader, Erziehungs- und Unterrichts-Lehre. O. Schulz, Pädagog. Abhandlungen. K. A. Schmid, Encyklopädie des ges. Erziehungswesens. Lief. 1—67. Bonitz, Zeitschrift für Gymnasialwesen. Fleckeisen, Jahrbücher für Phil. Zacher, Zeitschrift für deutsche Philologie. Laas, Der deutsche Aufsatz. Webster, A Complete Dictionary of the english language. Bescherelle, Dictionnaire national. Littré Dictionnaire. Livr. 1—21. Mätzner, Franz. Grammatik. Id. Engl. Grammatik. Koch, Hist. Grammatik der engl. Sprache. Schmitz, Encyklopädie des phil. Stud. der neueren Sprachen, nebst den Supplementen. La Harpe Cours de littérature. Städt. Jahrbuch herausg. v. statist. Büreau der Stadt Berlin. Jahrg. 1867 und 1868. v. Sybel, Historische Zeitschrift. Heusser, Geschichte des Zeitalters der Reformation. v. Kloeden, Handbuch der Erdkunde. Theil 1 u. 2. Poggendorff, Annalen. 1868. Borchardt, Journal für Math. Bd. LVIII u. LIX. Duhamel, Des Méthodes dans les sciences de raisonnement. Poudra, Histoire de la perspective. Id. Compléments de Géometrie fondés sur la perspective Valson, Vie de Cauchy. Thomson and Tait, A treatise on natural philosophy. Brehm, Illustrirtes Thierleben. Bd. 1—5.

Bei der Feier des 100jährigen Geburtstages Schleiermacher's übersandte der Magistrat dessen Werke. 28 Bde.

Das Communalblatt erhielt die Anstalt wöchentlich in 4 Exemplaren.

Schüler-Bibliothek.

Die zu Prämien im Etat für 1868 ausgesetzte Summe wurde mit Genehmigung des Patrons zur Gründung einer Schüler-Bibliothek benutzt, deren Erhaltung und Erweiterung theils durch fernere Zuwendungen aus dem Prämienfonds theils durch das Lesegeld bewirkt werden soll, welches die Schüler zahlen, die die Bibliothek benutzen wollen. Dasselbe beträgt quartaliter praen. 2 Sgr. 6 Pf.

Der Verwaltung der Bibliothek hat sich Hr. Schobert mit dankenswerther Gefälligkeit unterzogen.

Geschenke.

Als Geschenk erhielt die Bibliothek: Pütz Leitfaden bei dem Unterricht in der vergleichenden Erdbeschreibung von dem Hrn. Verf., und das phys. Cabinet einen magnetoelectrischen Rotationsapparat von Hrn. Oberstabsarzt Dr. Keyl. Für diese Geschenke sagen wir den Gebern unseren verbindlichsten Dank.

Ordnung der öffentlichen Prüfung.

Dinstag, den 23. März 1869.

Vormittags von 9 bis 12 Uhr.

Choral: „Lobe den Herrn."

Sexta B:	Naturgeschichte	Hr. **Zettnow.**
Sexta A:	Rechnen	Hr. **Leisering.**
Quinta B:	Latein	Hr. **Mewes.**
Quinta A:	Geographie	Hr. **Thieme.**
Quarta:	Französisch	Hr. **Wüllenweber.**
Tertia:	Geschichte	Hr. **Brecher.**

Gesang der combinirten Gesangclasse.

I. **Vertrauen.** 4stimmiges Lied von R. Magnus.

Es ist ein wunderbares Walten,
Das uns so liebevoll umwebt.
Wir fühlen seine Macht uns halten
Und uns durch seinen Hauch belebt. —
Es braucht uns nimmer bang' zu sein,
Wie's war und ist, so wird es sein!

So seh'n wir Jahr auf Jahr verrinnen
In immer gleichem, sicherm Gleis,
So wird ein neues uns beginnen
Nach heil'gem, liebendem Geheiss —
Und lagert sich um uns die Nacht:
Das Auge Gottes sieht und wacht!

So wandeln wir in Ruhe weiter,
Mit stillem, kindlichem Vertrau'n,
Und so kann unser Auge heiter
In die verhüllte Zukunft schau'n.
Wir sind ja Alle Gottes Theil,
Und was auch kommt, ist uns zum Heil! —

II. **2stimmige Motette von Ed. Groll.**

Wohl dem, der nicht wandelt im Rath der Gottlosen, noch tritt auf den Weg der Sünder, noch sitzet, da die Spötter sitzen: sondern hat Lust zum Gesetz des Herrn, und redet von seinem Gesetz Tag und Nacht. Der ist wie ein Baum, gepflanzet an den Wasserbächen, der seine Frucht bringet zu seiner Zeit, und seine Blätter verwelken nicht; und was er macht, das geräth wohl.

III. Motette von Ed. Grell.

Lobe den Herrn, meine Seele, und was in mir ist seinen heiligen Namen. Lobe den Herrn, meine Seele, und vergiss nicht, was er dir Gutes gethan hat; der dir alle deine Sünde vergiebt, und heilet alle deine Gebrechen; der dein Leben vom Verderben erlöset, der dich krönet mit Gnade und Barmherzigkeit, und deinen Mund fröhlich machet und du wieder jung wirst, wie ein Adler! —

IV. Die Ehre Gottes aus der Natur. Von Beethoven.

Die Himmel rühmen des Ewigen Ehre,
Ihr Schall pflanzt seine Namen fort.
Ihn rühmt der Erdkreis, ihn preisen die Meere;
Vernimm, o Mensch, ihr göttlich Wort!
Wer trägt der Himmel unzählbare Sterne,
Wer führt die Sonn' aus ihrem Zelt?
Sie kommt und leuchtet und lacht uns von ferne,
Und läuft den Weg gleich als ein Held!

Vernimms, und siehe die Wunder der Werke,
Die die Natur dir aufgestellt.
Verkündigt Weisheit und Ordnung und Stärke,
Dir nicht den Herrn, den Herrn der Welt?
Kannst du der Wesen unzählbare Heere,
Den kleinsten Staub fühllos beschau'n?
Durch wen ist Alles? O, gieb ihm die Ehre!
„Mir", ruft der Herr, „sollst du vertrau'n!"

„Mein ist die Kraft, mein ist Himmel und Erde;
An meinen Werken kennst du mich.
Ich bin's, und werde sein, der ich sein werde,
Dein Gott und Vater ewiglich.
Ich bin dein Schöpfer, bin Weisheit und Güte,
Ein Gott der Ordnung und dein Heil!
Ich bin's, mich liebe von ganzem Gemüthe,
Und nimm an meiner Gnade Theil." —

Nachmittags von 2 bis 4 Uhr.

Dritte Vorschulclasse:	Religion	. . . .	Hr. Töpfer.
Zweite do. :	Deutsch	. . . .	Hr. Bethge.
Erste do. :	Geographie	. . . . . .	Hr. Schobert.

Gesang.

Der Sommercursus beginnt am Donnerstag den 8. April. Zur Aufnahme neuer Schüler für die Vorschule und die Classen Sexta bis Secunda werde ich vom 25. März ab an den Wochentagen, Vormittags von 10 bis 1 Uhr, im Schulgebäude Stein-Strasse No. 32—34 anwesend sein.

Bertram.

XXIV.

Bemerkungen über Lagrange's analytische Mechanik.

Von

Herrn Doctor *Heinrich Bley* *)

zu Bernburg.

Die analytische Mechanik Lagrange's ist ein anerkanntes Meisterwerk. Sowohl durch das, was der berühmte Verfasser den wissenschaftlichen Erkenntnissen hinzugefügt hat, als durch die Art, wie er es mit dem bereits Vorhandenen zu einem wohl gegliederten Ganzen verbunden hat, nicht minder endlich durch die klare, ruhige Logik seiner Darstellung, wird die analytische Mechanik für alle Zeiten eine Zierde der mathematischen Literatur bleiben.

Dennoch finden sich auch in diesem Werke manche Fehler und Nachlässigkeiten, wie schon die Noten, welche der von mir benutzten Ausgabe beigefügt sind, beweisen. Ausser demjenigen, was hierin besprochen worden ist, habe ich aber bei einem sorgfältigen Studium der analytischen Mechanik noch manche Stellen gefunden, welche Unrichtigkeiten enthalten, manche andere, zu denen eine Erläuterung mir nicht überflüssig schien; und ich habe geglaubt, meine Bemerkungen um so mehr mittheilen zu dürfen, als es zu wünschen ist, dass das Studium des ausgezeichneten Werkes immer häufiger werde.

Ich habe die von Bertrand besorgte Ausgabe der analytischen Mechanik des Lagrange benutzt, welche unter dem Titel:

---

*) Der Herr Verfasser dieser schon seit geraumer Zeit in meinen Händen befindlichen Bemerkungen über eins der wichtigsten und schönsten mathematischen Werke hat leider den Abdruck derselben nicht mehr erlebt, was für mich um so mehr Antrieb und Herzensbedürfniss gewesen ist, mein gegebenes Versprechen, den Aufsatz in das Archiv aufzunehmen, so bald als es irgend die Umstände gestatteten, zu erfüllen. Die Wichtigkeit des betreffenden berühmten Werks rechtfertigt jedenfalls die Aufnahme vollkommen. In wie weit alle Bemerkungen des Herrn Verfassers richtig und wohl begründet sind, muss natürlich hier dahin gestellt bleiben. Jedenfalls werden sie zu weiterem sorgfältigen Nachdenken anregen. G.

Mécanique analytique, pär J. L. Lagrange. Troisième édition, revue, corrigée et annotée par M. J. Bertrand in den Jahren 1853—55 in zwei Quartbänden bei Mallet-Bachelier in Paris erschienen ist. Sie enthält, ausser kürzeren, unmittelbar unter den Text gedruckten Anmerkungen Bertrand's, ausführlichere Noten von Poinsot, Lejeune-Dirichlet, Bertrand, Puiseux, Serret, Ossian Bonnet, Bravais und von Lagrange selbst, welche hinter dem Texte folgen. Die unter dem Texte befindlichen Noten Bertrand's sind meistens recht zweckmässig und zeugen von einer grossen Belesenheit; doch habe ich bisweilen seine Ansichten nicht theilen können, wie sich aus meinen Bemerkungen ergiebt.

Meine Bemerkungen folgen dem Texte von Paragraph zu Paragraph, und da die Paragraphen niemals sehr lang sind, so wird es leicht sein, die specielle Stelle, auf welche sie sich beziehen, aufzufinden. Sie erstrecken sich auch auf die längeren, hinten angehängten Noten verschiedener Gelehrten. Meine Bemerkungen über diese habe ich zwischen die auf den Text bezüglichen Bemerkungen dahin gestellt, wo sich diese Noten dem Texte anschliessen. In Bezug auf die Benennung der Abtheilungen Lagrange's habe ich noch zu bemerken, dass ich, der bei uns gebräuchlichen Terminologie folgend, das, was Lagrange „Article" nennt, mit „§." bezeichnet habe; das, was Lagrange mit „§." bezeichnet, könnte man durch „Abtheilung" übersetzen.

Analytische Mechanik.

Erster Theil.

Die Statik.

Erster Abschnitt.

§. 2. Am Ende des zweiten Absatzes ist offenbar eine Zeile ausgelassen. Es heisst dort: Donc la charge que supporte le point d'appui du levier qui fait la base du triangle, et qui est chargé à ses deux extrémités de poids égaux, sera égale au poids double du sommet, et, par conséquent, égale à la somme des deux poids. statt: Donc la charge que supporte le point d'appui du levier qui fait la base du triangle, et qui est chargé à ses deux extrémités de poids égaux, sera égale au poids du sommet, et la charge que supporte le levier transversal sera égale au poids double du sommet, et, par conséquent, égale à la somme des poids.

Der Beweis des Satzes wird übrigens durchaus nicht geführt.

§. 3. Wenn der gerade und horizontale Hebel *AB* (Taf. IX. Fig. 18.) in *C* unterstützt ist und zugleich eine Last trägt, und man denkt sich einen zweiten Hebel von gleicher Beschaffenheit und Länge mit dem ersten so verbunden, dass der Unterstützungspunkt *A* des zweiten mit dem einen Ende des ersten Hebels zusammenfällt, und nimmt an, dass der zweite Hebel an seinen beiden Enden gleiche Lasten trägt, so kann man die Combination als einen geraden, einarmigen Hebel betrachten, dessen Unterstützungspunkt in *C* ist, und welcher in *A* und *E*, also in einfacher und doppelter Entfernung von *C*, eine doppelte und eine einfache Last trägt, welche aber in entgegengesetzten Richtungen wirken (indem man statt des Unterstützungspunktes *A* eine der Summe der in *C* und *E* auf den Hebel *EC* wirkenden Lasten gleiche, aber entgegengesetzte Kraft annimmt).

Denkt man sich ferner den zweiten Hebel von ungleicher Länge mit dem ersten, z. B. $\frac{4}{3}$mal so lang als den ersten, und alles Uebrige, wie vorher, so erhält man einen geraden, zweiarmigen Hebel *FB* (Taf. IX. Fig. 19.), welcher in *C* unterstützt ist, und in *D* und *F*, also in einfacher und siebenfacher Entfernung vom Unterstützungspunkte, gleiche Lasten trägt, wozu aber noch die doppelte, aufwärts wirkende Kraft in *A*, also in dreifacher Entfernung von *C*, gerechnet werden muss. Bezeichnen wir die in *F* und *D* wirkenden Kräfte (Momente) mit 7 und 1, so ist die in *A* wirkende Kraft (Moment) $=6$, und da sie der Kraft in *F* entgegenwirkt, so bleibt auf beiden Seiten des Unterstützungspunktes *C* die Kraft 1, und es ist also Gleichgewicht.

Der horizontale Hebel wird also im Gleichgewicht sein, wenn die einander entgegenwirkenden Kräfte (in einem speciellen Falle die Lasten zu beiden Seiten des Unterstützungspunktes) im umgekehrten Verhältnisse ihrer Entfernungen vom Unterstützungspunkte stehen.

§. 5. Der Beweis von Stevin für den Satz, dass die Kraft auf der schiefen Ebene sich zur Last wie die Höhe der schiefen Ebene zur Länge verhalte, genügt nicht: denn eine immerwährende Bewegung der Kette ist keineswegs unmöglich, wenn man die Hindernisse der Bewegung hinwegdenkt.

§. 9. Die Bemerkung Bertrand's zu diesem Paragraphen, in welcher er behauptet: zwei Kräfte, welche nicht in derselben Ebene sind, haben keine Resultirende, ist deshalb unzulässig, weil hier nur von Kräften die Rede sein kann, welche denselben Angriffspunkt haben.

§. 12. Das Varignon'sche Theorem ist nicht ganz richtig

angegeben. Es heisst nämlich, dass, wenn man von irgend einem Punkte in der Ebene eines Parallelogramms Senkrechte auf die Diagonale und die beiden Seiten, welche die Diagonale einschliessen, fällt, das Produkt der Diagonale in ihre Senkrechte gleich ist der Summe oder Differenz der Produkte der beiden Seiten in die entsprechenden Perpendikel, je nachdem der Punkt ausserhalb oder innerhalb des Parallelogramms liegt, statt: je nachdem der Punkt ausserhalb oder innerhalb der beiden Seiten liegt, welche die Diagonale einschliessen, wie es in der Anwendung des Theorems auf die Mechanik richtig heisst.

§. 16. In Bezug auf das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ist noch zu bemerken, dass die sich Gleichgewicht haltenden Kräfte einander entgegen wirken müssen.

§. 17. In dem hier gegebenen Ausdruck des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten wird gewöhnlich das System von Körpern oder Punkten als in einem Punkte oder an einer Axe befestigt gedacht, und die Kräfte wirken auf entgegengesetzten Seiten des Ruhepunkts oder der Axe einander entgegen.

§. 18. Man kann sich allerdings vorstellen, dass das Gleichgewicht des Gewichtes am Flaschenzuge durch ein Hinderniss hervorgerufen werde, welches bewirkt, dass trotz einer versuchten unendlich kleinen Verschiebung des beweglichen Systems das Gewicht nicht sinkt. Indem Bertrand dieser Vorstellungsweise das Beispiel eines auf dem höchsten Punkte einer Curve ruhenden schweren Punktes entgegensetzt, führt er nur eben ein Analogon an: die geringste Verschiebung würde denselben fallen machen, und doch fällt er nicht, eben wegen des Hindernisses, in welchem das Wesen des Gleichgewichtes besteht. Lagrange's Beweis des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten ist vollkommen streng. Denn es kann entweder, während die Punkte des Systems eine unendlich kleine Verschiebung erleiden, das Gewicht dennoch in Ruhe bleiben, weil es wegen seiner Lage nicht mehr sinken kann; dieser Vorstellungsweise setzt Bertrand das Beispiel eines auf dem höchsten Punkte einer Curve ruhenden schweren Punktes entgegen; oder es kann das Gewicht in Ruhe bleiben, weil eine unendlich kleine Verschiebung der Punkte des Systems unmöglich ist.

Zweiter Abschnitt.

§. 1. Für das Gleichgewicht dreier Kräfte P, Q, R wird man haben, wenn ξ, ψ, φ u. s. w. die unabhängigen Variablen sind, als deren Functionen p, q, r gedacht werden können:

$$P\frac{\partial p}{\partial \xi} + Q'\frac{\partial q}{\partial \xi} = 0 \quad \text{und} \quad Q''\frac{\partial q}{\partial \xi} + R\frac{\partial r}{\partial \xi} = 0,$$

folglich:

$$P\frac{\partial p}{\partial \xi} + Q\frac{\partial q}{\partial \xi} + R\frac{\partial r}{\partial \xi} = 0;$$

ebenso:

$$P\frac{\partial p}{\partial \psi} + Q\frac{\partial q}{\partial \psi} + R\frac{\partial r}{\partial \psi} = 0,$$

$$P\frac{\partial p}{\partial \varphi} + Q\frac{\partial q}{\partial \varphi} + R\frac{\partial r}{\partial \varphi} = 0,$$

. . . .

mithin:

$$P\partial p + Q\partial q + R\partial r = 0.$$

Ebenso verfährt man, um das Gleichgewicht von vier und mehreren Kräften analytisch auszudrücken.

§. 7. Damit die Formeln dieses Paragraphen vollkommen richtig sind, muss man annehmen, dass die Centra, nach welchen die Kräfte P, Q, R u. s. w. streben, dem Anfangspunkte der Coordinaten näher liegen, als ihre Angriffspunkte.

§. 8. $\partial p = 0$ wird die Differentialgleichung einer Fläche sein, auf welcher die Richtung der Kraft P senkrecht steht, indem man sich den Angriffspunkt von P in einem beliebigen Punkte der Fläche denkt. Ist also der Mittelpunkt der Kraft P constant, so muss die Fläche nothwendig eine Kugelfläche um denselben bilden; bei einer ebenen Fläche wird sich der Mittelpunkt stetig mit dem Angriffspunkte verändern.

Lagrange behandelt nur den Fall, wo a, b, c constant sind, wo also die Fläche, deren Gleichung $A\partial x + B\partial y + C\partial z = 0$ ist, eine Kugelfläche ist. Sind dagegen die Coordinaten des Mittelpunktes der Kraft veränderlich, während die Gleichung der auf p senkrecht stehenden Fläche sich nicht ändert, so hat man die Gleichungen:

$$A\partial x + B\partial y + C\partial z = 0$$

und

$$\frac{x - x'}{p}(\partial x - \partial x') + \frac{y - y'}{p}(\partial y - \partial y') + \frac{z - z'}{p}(\partial z - \partial z') = 0,$$

folglich:

$$(Ap + x' - x)\partial x + (Bp + y' - y)\partial y + (Cp + z' - z)\partial z$$
$$= (x' - x)\partial x' + (y' - y)\partial y' + (z' - z)\partial z'.$$

Nimmt man nun an, was oft erlaubt ist, dass sich verhalte:

$$x'-x:y'-y:z'-z=Ap+x'-x:Bp+y'-y:Cp+z'-z,$$

so ist:

$$\partial p=\frac{(Ap+x'-x)(\partial x'-\partial x)+(Bp+y'-y)(\partial y'-\partial y)+(Cp+z'-z)(\partial z'-\partial z)}{\sqrt{(Ap+x'-x)^2+(Bp+y'-y)^2+(Cp+z'-z)^2}}.$$

Gelten obige Proportionen nicht, so lässt sich die Gleichung

$$\partial p=\frac{x-x'}{p}(\partial x-\partial x')+\frac{y-y'}{p}(\partial y-\partial y')+\frac{z-z'}{p}(\partial z-\partial z')$$

nicht weiter umändern. Jedoch hat man:

$$\partial p=A\partial x+B\partial y+C\partial z.$$

Es ist übrigens zu bemerken, dass die Flächen, auf welchen die Kräfte P, Q, R u. s. w. senkrecht stehen, von beliebiger Beschaffenheit sind, und keineswegs mit dem System der Angriffspunkte von P, Q, R u. s. w. zusammenzufallen brauchen.

§. 9. Es scheint mir, als ob Bertrand sich hier im Irrthum befände, indem Lagrange mit $P\partial p$ nicht eine Summe von virtuellen Momenten, sondern nur das Moment einer Kraft bezeichnen will. Es ist in der That gar kein Grund für die gezwungene Bertrand'sche Auffassung dieses Paragraphen vorhanden. Wenn p, q u. s. w. hier als Functionen der Coordinaten angesehen werden, so ist damit noch keineswegs gesagt, dass sie auch Differentiale der Coordinaten enthalten.

§. 14. Lagrange sagt mit Bezug auf die beiden Systeme von Kräften P, Q, R u. s. w., und P', Q', R' u. s. w., zwei Systeme von Kräften können nur auf eine Art völlig äquivalent sein, weil die Bewegung eines Körpers immer bestimmt und eine einzige sei. Denn die beiden äquivalenten Systeme von Kräften P, Q, R u. s. w. und P', Q', R' u. s. w. rufen hier ein und dieselbe Bewegung, nicht aber Gleichgewicht hervor, wie Bertrand in seiner unpassenden Note annimmt.

§. 15. Am Ende des ersten Absatzes muss es heissen: et réciproquement, lorsque deux systèmes de forces sont équivalents, et peuvent être substitués l'un à l'autre dans le même système de corps, la somme des moments des forces de l'un de ces systèmes est toujours égale à la somme des moments des forces de l'autre. statt: et réciproquement, lorsque la somme des moments des forces d'un système est toujours égale à la somme des moments des forces d'un autre système, ces deux systèmes

de forces sont équivalents, et peuvent être substitués l'un à l'autre dans le même système de corps.

Bertrand hätte in seiner Note zu diesem Paragraphen noch anführen sollen, dass die Linien ξ, ψ, φ sich rechtwinklig durchschneiden müssen, wenn Ξ, Ψ, Φ die angegebenen Werthe haben. Vergl. Poinsot's Note (Nro. I.).

Dritter Abschnitt.

§. 5. Lagrange's Annahme, dass man die Centra der Kräfte P, P' u. s. w. in einen beliebigen Punkt ihrer Richtung verlegen könne, wodurch $p = P$ wird, lässt sich nicht rechtfertigen. Auch vereinfacht sie die Formeln nur vorübergehend, da sie gleich darauf wieder aufgehoben wird.

Es ist leicht einzusehen, dass die ganze Betrachtung dieses Paragraphen, in welchem angenommen wird, dass ein System von Punkten sich um eine ausserhalb desselben befindliche Axe drehe, sich auch auf den Fall übertragen lässt, wo ein beliebiger Punkt des Systems selbst in die Axe gelegt und zum Anfangspunkt der Coordinaten gemacht wird.

§. 8. Es ist in der That sonderbar, dass Bertrand behauptet, die drei Rotationen um die Axen der x, y, z könnten nicht gleichzeitig, sondern nur nach einander stattfinden. Nur durch Zusammensetzung der gleichzeitigen Rotationen um diese drei Axen lässt sich eine Rotation um eine zwischen ihnen liegende Axe darstellen.

§. 10. Die hier aufgestellten sechs Bedingungsgleichungen sind nicht absolut nothwendig, aber sie sind die einfachsten, welche der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

genügen. Lagrange betrachtet mit Unrecht den Werth von $x^2 + y^2 + z^2$ als mit $x'^2 + y'^2 + z'^2$ identisch: beide Grössen sind nur gleich.

§. 17. Die Zusammensetzung der Momente der Rotationsbewegung folgt denselben Regeln, als die Zusammensetzung der geradlinigen Bewegungen, doch nur unter der Bedingung, dass die Momente den Rotationswinkeln proportional sind.

§. 19. Legt man durch den Schwerpunkt eines Systems eine Verticalebene, und nimmt auf beiden Seiten derselben zwei Kräfte

P und P' (Taf. IX. Fig. 20.) an, die sich Gleichgewicht halten, so hat man, wenn a und b ihre Entfernungen vom Schwerpunkte sind:

$$aP = bP'.$$

Ist nun der Abstand einer zweiten Verticalebene von der durch den Schwerpunkt gehenden c, so ist

$$(a+c)P - (b-c)P' = c(P+P').$$

Nimmt man eine schief liegende Ebene durch den Schwerpunkt an, die z. B. mit der Verticalebene den Winkel α macht, so sind die beiden gleichen Producte in Beziehung auf die durch den Schwerpunkt gelegte Ebene:

$$a\cos\alpha . P = b\cos\alpha . P',$$

und es wird:

$$(a+c)\cos\alpha . P - (b-c)\cos\alpha . P' = c\cos\alpha . (P+P').$$

Was für zwei Kräfte gilt, wird für jede beliebige Zahl gelten, da man sich diese stets auf zwei reducirt denken kann, die sich Gleichgewicht halten.

§. 21. Denkt man sich eine Horizontalebene durch den Schwerpunkt des Systems gelegt und eine damit parallele Ebene durch den Mittelpunkt der Erde, und versteht unter p, q, r u. s. w. die Entfernungen der einzelnen schweren Punkte von dieser letzteren Ebene, so ist $\Pi =$ der Summe der Producte der schweren Punkte in ihre Entfernungen von dieser Ebene, und $\frac{\Pi}{P+Q+R+\ldots} =$ dem Abstande beider Horizontalebenen oder des Schwerpunktes des Systems vom Erdmittelpunkte.

§. 22. Π ist meistentheils ein Minimum oder ein Maximum, wenn das System sich im Gleichgewichte befindet, aber nicht immer; wenn dagegen Π ein Minimum oder ein Maximum ist, so befindet sich das System nothwendig im Gleichgewichte. Vergl. §. 21. Daher ist das System in der Lage des Gleichgewichts, wenn die lebendige Kraft desselben ein Maximum oder ein Minimum ist; aber der umgekehrte Satz gilt nicht immer.

§. 26. Die Kräfte P, Q, R u. s. w. werden hier von Lagrange offenbar mit Recht als constant angenommen, da sie von der Anzahl der Seile abhängen. p, q, r u. s. w. bezeichnen die mittlere Länge der Seile zwischen je zwei Flaschen, also auch hier die Entfernungen der Angriffspunkte der Kräfte von den Centren; und $\Pi = Pp + Qq + Rr + \ldots$ hat denselben Werth wie am Schlusse des §. 21.

§. 27. Offenbar liegt ein Fehler dieses Beweises darin, dass Lagrange einseitig nur die Wirkung des Gewichtes in Betracht zieht, und nicht die des Systems der festen Punkte, von welchen genau dasselbe gilt, wie von dem Gewichte, nur dass die Wirkung gerade entgegengesetzt ist, so dass beide Kräfte sich stets aufheben müssen, und nur die Trägheit wirken kann.

Vierter Abschnitt.

§. 2. Ist die Gleichung des Gleichgewichts

$$P\partial p + Q\partial q + R\partial r + S\partial s = 0,$$

und man hat die Bedingungsgleichungen

$$\partial r + a = 0, \quad \partial s - b + c = 0;$$

so wird durch Elimination von ∂r und ∂s:

$$P\partial p + Q\partial q - aR + (b-c)S = 0,$$

also

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad -aR + (b-c)S = 0.$$

Nach der neuen Methode wird aber:

$$P\partial p + Q\partial q + (R+\lambda)\partial r + a\lambda + (S+\mu)\partial s + \mu(c-b) = 0,$$

also

$$P = 0, \quad Q = 0,$$

$$R + \lambda = 0, \quad S + \mu = 0,$$

$$a\lambda + \mu(c-b) = 0, \quad \lambda = -R, \quad \mu = -S;$$

woraus folgt:

$$a\lambda + \mu(c-b) = -aR + (b-c)S = 0.$$

§. 10. Die Erklärung, welche Lagrange hier giebt, um die mit ∂ bezeichneten Differentiale von den mit δ bezeichneten Variationen zu unterscheiden, ist ungenügend und dunkel, zum Theil sogar fehlerhaft. Erstere bezeichnen die wirklichen Wege, welche die Punkte des Körpers zurücklegen, indem die Lage desselben unendlich wenig verändert wird, wobei es ausser der Lage eines Punktes auch auf die Aenderung ankommt, welche das Gesetz der Verbindung der Punkte während der Bewegung etwa erleidet. Letztere dagegen bezeichnen die Wege, welche die Punkte zurücklegen, indem die Lage des Körpers unendlich wenig verän-

dert wird, wenn die gegenseitige Verbindung der Punkte hiebei als unverändert angesehen wird, sei es, dass sie wirklich constant bleibt oder dass von einer Veränderung derselben abgesehen wird. Vergl. §. 33. des dritten Abschnitts des zweiten Theils. Dieser Unterschied ist jedoch erst für die Dynamik von Wichtigkeit, und deshalb auch hier von Lagrange noch nicht berücksichtigt. Es ist aber falsch, zu sagen, dass die mit δ bezeichneten Variationen von der gegenseitigen Lage der Punkte unabhängig sind.

Man bezeichnet mit ∂ auch Elemente von Linien und Massen, wie ∂x, ∂m. Diese betrachtet man besonders in der Geometrie, und auf sie bezieht sich hier Lagrange.

§. 16. Bertrand giebt richtig den Grund an, weshalb die unbestimmten Bedingungsgleichungen $L=0$, $M=0, \ldots$ der Zahl nach nicht drei sein können. Hätte man deren drei bei nur drei unbestimmten Particulargleichungen des Gleichgewichts $\Xi=0$, $\Sigma=0$, $\Psi=0$, so könnte man auch nur zwei der drei unbestimmten Coefficienten λ, μ, ν eliminiren, den dritten dagegen nur als Function von x, y, z und ihren Differentialen bestimmen.

§. 21. Man hat:

$$\Xi=\frac{1}{\partial x}(\partial U-\partial U)=0.$$

§. 22. Die hier für Ξ, Υ und Ψ gegebenen Werthe gehören vielmehr den Grössen $\Xi\partial x$, $\Upsilon\partial x$ und $\Psi\partial x$ an.

Wenn nur die Variable z von der Bedingungsgleichung $L=0$ abhängt, so ist L von y unabhängig, und man hat:

$$\delta L=\frac{\partial L}{\partial x}\delta x+\frac{\partial L}{\partial z}\delta z+\frac{\partial L}{\partial z'}\delta z'+\ldots=\frac{1}{\partial x}\partial L\,\delta x+\frac{\partial L}{\partial z}\delta v+\frac{\partial L}{\partial z'}\frac{\partial.\delta v}{\partial x}+\ldots,$$

$$\Upsilon=\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{1}{\partial x}\partial.\frac{\partial U}{\partial y'}+\frac{1}{\partial x^2}\partial^2.\frac{\partial U}{\partial y''}-\ldots$$

§. 23. Es ist

$$\delta.\int U\partial x$$

$$=\int(\Upsilon\delta y+\Psi\delta z+\ldots)\partial x+(\Upsilon'\delta y+\Upsilon''\partial\delta y+\ldots+\Psi'\delta z+\Psi''\partial\delta z+\ldots)\partial x.$$

Will man wirklich, obgleich ∂x als constant angesehen wird, auf die Variation von x Rücksicht nehmen, so hat man, ausser der Veränderung, welche δy und δz erleiden, noch $\int\partial U\delta x$ zu dem Werthe von $\delta.\int U\partial x$ zu addiren.

§. 28. Sieht man bei der Lösung der mechanischen Probleme eine der Variablen hinsichtlich der Variationen nach δ als con-

stant an, so erhält man nur zwei Gleichungen, welche noch den unbestimmten Coefficienten λ in sich enthalten. Eliminirt man diesen, so bleibt nur eine Gleichung mit drei Variablen, also eine weniger als nöthig ist.

λ drückt übrigens nicht die Kraft aus, mit welcher das Element ∂m der Wirkung der Kräfte P, Q, R u. s. w. widersteht, sondern

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2},$$

und $\lambda\delta L$ ist das Moment dieser Kraft, welche senkrecht gegen eine Fläche wirkt, die durch die Gleichung $\delta L=0$ dargestellt wird.

§. 31. Lagrange sagt, es seien bisher nur Functionen unabhängiger Variablen betrachtet worden; es wurden aber vielmehr sämmtliche Variablen als von x abhängig angesehen.

§. 32. Ich finde folgende Werthe für $\delta z''$ und $\delta z_{\prime\prime}$:

$$\delta z''=\frac{\partial^2(\delta z-z'\delta x-z_1\delta y)}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2}-z''\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\right)\delta x+\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}-z_1{}'\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\right)\delta y,$$

$$\delta z_{\prime\prime}=\frac{\partial^2(\delta z-z'\delta x-z_1\delta y)}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial^2 z'}{\partial y^2}-z_1{}'\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}\right)\delta x+\left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}-z_{\prime\prime}\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}\right)\delta y.$$

§. 33. Man hat also für δU den Werth:

$$\delta U=\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z''}\left(\frac{\partial z''}{\partial x}-z''\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial U}{\partial z_1{}'}\frac{\partial z_1{}'}{\partial x}+\ldots\right)\delta x$$

$$+\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z''}\left(\frac{\partial z''}{\partial y}-z_1{}'\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial U}{\partial z_1{}'}\frac{\partial z_1{}'}{\partial y}+\ldots\right)\delta y$$

$$+\frac{\partial U}{\partial z}\delta u+\frac{\partial U}{\partial z'}\frac{\partial\delta u}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z_1}\frac{\partial\delta u}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z''}\frac{\partial^2\delta u}{\partial x^2}+\frac{\partial U}{\partial z_1{}'}\frac{\partial^2\delta u}{\partial x\partial y}+\ldots.$$

§. 35. Setzt man in der Gleichung $\Psi=0$

$$U=\sqrt{1+z'^2+z_1{}^2},$$

so dass $SS\partial x\partial y\sqrt{1+z'^2+z_1{}^2}$ der Werth der kleinsten krummen Fläche ist, so hat man:

$$\Psi=0=\frac{\partial.\frac{z'\partial z'}{U}}{\partial x}+\frac{\partial.\frac{z_1\partial z_1}{U}}{\partial y};$$

folglich:

$$\frac{\partial z'^2}{\partial x}+z'\frac{\partial^2 z'}{\partial x}+z'^3\frac{\partial^2 z'}{\partial x}+z_1^2\frac{\partial z'^2}{\partial x}+z'z_1^2\frac{\partial^2 z'}{\partial x}+\frac{\partial z_1^2}{\partial y}+z_1\frac{\partial^2 z_1}{\partial y}+z_1^3\frac{\partial^2 z_1}{\partial y}$$
$$+z'^2\frac{\partial z_1^2}{\partial y}+z'^2 z_1\frac{\partial^2 z_1}{\partial y}=z_1\partial z_1 z'\frac{\partial z'}{\partial x}+z'\partial z' z_1\frac{\partial z_1}{\partial y}.$$

Man erhält also keine identische Gleichung.

§. 36. Es ist

$$\Psi=\lambda\frac{\partial U}{\partial z}-\lambda\left(\frac{\partial U'}{\partial x}\right)-U'\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)-\lambda\left(\frac{\partial U_1}{\partial y}\right)-U_1\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)+\lambda\left(\frac{\partial^2 U''}{\partial x^2}\right)$$
$$+U''\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}\right)+\lambda\left(\frac{\partial^2 U_1'}{\partial x\partial y}\right)+U_1'\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial y}\right)+\ldots.$$

Fünfter Abschnitt.

§. 3. Lagrange behauptet offenbar zu viel, indem er sagt, es sei gleichgültig, in welchen Punkt der Richtungen der Kräfte P, Q, R u. s. w. man die Centra der Kräfte verlege. Es wird es vielmehr nur für einen ganz speciellen Fall $P=p$, $Q=q$, $R=r$ u. s. w. sein.

§. 5. Da der Druck des Körpers auf die Fläche, deren Gleichung $L=0$ ist, offenbar durch $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ vorgestellt wird, so ist der Widerstand der Fläche:

$$-\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2},$$

was auch mit den Formeln des §. 5. des vorigen Abschnitts stimmt.

Note I., von Poinsot.

§. 1. Es ist sonderbar, dass Lagrange die Kräfte Ξ, Π, Σ und Ξ, Ψ, Φ in der ersten Ausgabe neben einander gebraucht.

§. 2. Poinsot sagt, die Formeln des §. 1. gelten nur, wenn ξ, π, σ.... die Entfernungen der Körper von fixen Centren oder von festen Ebenen vorstellen; aber aus §. 7. geht hervor, dass zwei von den Coordinaten auch Winkel oder Kreislinien sein können. Ferner müssen für die gegebenen Werthe von Ξ, Π, Σ die Coordinaten ξ, π, σ rechtwinklige sein.

§. 5. Wenn $\xi=\pi$ ist, so sind die beiden Resultirenden der Kräfte X und Y und der Kräfte Ξ und Π:

$$\sqrt{X^2+Y^2} \quad \text{und} \quad \sqrt{\Xi^2-2\Xi\Pi\cos\alpha+\Pi^2},$$

und es verhalten sich ihre Werthe wie $1:\sin\alpha$.

§. 6. Poinsot nimmt an, man könne die Centra der gegebenen Kräfte $P, Q, R, \ldots$ in einen beliebigen Punkt ihrer Richtung legen, und daher $p, q, r \ldots$ willkührlich bestimmen, so dass man, wie immer die Function f beschaffen sein möge, welche man gewählt hat,

$$f'(p)=P, \quad f'(q)=Q, \quad f'(r)=R, \ldots$$

oder

$$P:Q:R:\ldots=f'(p):f'(q):f'(r):\ldots$$

machen könne. Vielmehr sind aber die Centra der gegebenen Kräfte $P, Q, R, \ldots$ auch gegeben, also $p, q, r, \ldots$ bestimmt; dagegen ist die Function f willkührlich, und kann so gewählt werden, dass man habe:

$$f'(p)=P, \quad f'(q)=Q, \quad f'(r)=R, \ldots$$

oder

$$P:Q:R:\ldots=f'(p):f'(q):f'(r):\ldots$$

Wenn z. B. $P=p^2$, $Q=q^3$, $R=r^4$, so kann man

$$f(p,q,r)=\frac{Pp}{3}+\frac{Qq}{4}+\frac{Rr}{5}=\frac{p^3}{3}+\frac{q^4}{4}+\frac{r^5}{5}=\text{const.}$$

setzen, und es ist:

$$f'(p)=p^2=P, \quad f'(q)=q^3=Q, \quad f'(r)=r^4=R.$$

§. 7. Indem Poinsot sagt, das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten führe nicht so unmittelbar zu den Gleichungen des Gleichgewichts eines festen Systems, als das Princip der Zusammensetzung der Kräfte, da es die drei letzteren Gleichungen nur mittelst einer Coordinatenverwandlung gebe, so wendet sich seine Kritik nur gegen zwei der von Lagrange angewandten Methoden, nämlich gegen die in §. 8. und §. 10. des dritten Abschnitts erörterten.

§. 8. Die von Poinsot beschriebene Methode, um die wahren Werthe von Ξ', Π', Σ' zu gewinnen, ist nicht die von ihm befolgte, vielmehr setzt er:

$$P\partial p+Q\partial q+R\partial r+\ldots=\Xi'\delta\xi+\Pi'\delta\pi+\Sigma'\delta\sigma=\Xi\partial\xi+\Pi\partial\pi+\Sigma\partial\sigma,$$

bestimmt die Werthe von $\delta\xi$, $\delta\pi$, $\delta\sigma$ in $\partial\xi$, $\partial\pi$, $\partial\sigma$, und vereinigt alle Glieder mit $\partial\xi$, mit $\partial\pi$ und mit $\partial\sigma$.

§. 9. Der Werth von Σ' ist:

$$\Sigma' = \frac{\Sigma(1-\lambda^2)+\Xi(\lambda\nu-\mu)+\Pi(\lambda\mu-\nu)}{1-\lambda^2-\mu^2-\nu^2+2\lambda\mu\nu}.$$

§. 10. Die Gleichungen

$$\Xi=0,\quad \Pi=0,\quad \Sigma=0$$

bedingen die Gleichungen

$$\Xi'=0,\quad \Pi'=0,\quad \Sigma'=0,$$

aber nicht umgekehrt.

Es werden also, wenn $P\partial p+Q\partial q+R\partial r+\ldots.=0$ ist, die Gleichungen $\Xi=0$, $\Pi=0$, $\Sigma=0$ stets möglich, wenn auch nicht nothwendig sein.

---

§. 10. In der Formel $m=\frac{4\pi}{3}S\Gamma\partial.\alpha^3$ muss man α als veränderlich von 0 bis α ansehen.

Jedes Glied der durch Entwickelung des Radicals

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2by-2cz+b^2+c^2}}$$

nach den Potenzen von b und c erhaltenen Grösse hat die Form

$$Hb^{2m}c^{2n}$$

und verwandelt sich in:

$$\frac{(1.3.5\ldots.2m-1)(1.3.5\ldots.2n-1)H(B^2-A^2)^m(C^2-A^2)^n}{5.7.9\ldots.2m+2n+3}.$$

Der bei Lagrange noch vorhandene Factor m ist offenbar überflüssig.

Ferner weichen die von mir berechneten Werthe von R, T, V, X, Y, Z.... etwas ab von denen des Textes. Ich finde:

$$R=\frac{1}{r}-\frac{e^2+i^2}{2.5r^3}+\frac{9(e^4+i^4)-6e^2i^2}{8.5.7r^5}-\ldots.,\qquad T=\frac{3e^2}{2.5r^5}-\frac{3e^4+3e^2i^2}{2.10r^7}+\ldots.,$$

$$U=\frac{3i^2}{2.5r^5}-\frac{3i^4+3e^2i^2}{2.10r^7}+\ldots.,\qquad X=\frac{3e^4}{8r^9}-\ldots.,$$

$$Y=\frac{3e^2i^2}{4r^9}-\ldots.,\qquad Z=\frac{3i^4}{8r^9}-\ldots.$$

Diejenige Componente der Attraction des Sphäroides, welche durch das partielle Differential

$$\frac{\partial \Sigma}{r \sin\mu \partial \nu}$$

ausgedrückt wird, steht senkrecht auf $r\sin\mu$, aber nicht auf dem Radius r.

§. 12. Da f und g constant, also auch keiner Verminderung fähig sind, so denkt man sich am besten die drei Körper an den Endpunkten und an dem Drehungspunkte eines messingenen, zweiarmigen Winkelhebels befestigt, dessen Arme leicht drehbar sind.

§. 16. Differenziirt man f nur nach x', y', z', so erhält man:

$$\partial f = \frac{(x'-x'')\partial x' + (y'-y'')\partial y' + (z'-z'')\partial z'}{\sqrt{(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2 + (z'-z'')^2}} = 0,$$

und nimmt man x'', y'', z'' als die Coordinaten des Mittelpunkts der Kugel, der zugleich Anfangspunkt der Coordinaten ist, an, und x', y', z' als die Coordinaten eines beliebigen Punkts der Oberfläche, so wird:

$$\partial f = \frac{x'\partial x' + y'\partial y' + z'\partial z'}{f} = 0.$$

Die Gleichung der Kugel aus dem Mittelpunkte ist aber

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

welche durch Differentiation giebt:

$$0 = x\partial x + y\partial y + z\partial z,$$

wie oben.

§. 18. Obgleich die Formeln für F, G u. s. w. ganz dieselben, als für λ, μ u. s. w. in §. 12. sind, so sind doch die absoluten Werthe beider Arten von Grössen nur in dem Falle identisch, wenn durch die äusseren Kräfte X', Y', Z', X'' u. s. w. keine wirkliche Ausdehnung der Theile des extensiblen Fadens stattgefunden hat. Sobald aber die Länge von f, g u. s. w. zugenommen hat, so sind auch die Werthe der Veränderlichen x', y', z', x'' u. s. w. andere geworden, als in §. 12., und die absoluten Werthe von F, G u. s. w. folglich von denen von λ, μ u. s. w. verschieden.

§. 21. Die ersten drei Gleichungen dieses Paragraphen zeigen, dass die Translationsbewegung des Systems Null ist, die letzten drei, dass die Rotationsbewegung desselben um den Anfangspunkt der Coordinaten Null ist. Da vermöge der Bedin-

gungsgleichungen auch die gegenseitige Lage der Körper unveränderlich ist, so sind hiermit alle Bedingungen des Gleichgewichts erschöpft. Bemerkenswerth ist, dass hier und in §. 23., §. 24. die drei verschiedenen Arten der Bewegung, welche ein System von Körpern überhaupt haben kann, und die in §. 1. des dritten Abschnitts aufgeführt sind, von einander gesondert zur Betrachtung kommen, indem jede ihre drei, respective sechs, besonderen Gleichungen des Gleichgewichts hat.

§. 25. Die Lage eines Punktes ist durch die Entfernungen desselben von drei anderen Punkten bestimmt, wenn diese nicht in einer Ebene liegen, in welchem Falle der Punkt zwei verschiedene Lagen haben kann. Liegen alle vier Punkte in einer Ebene, so ist die Lage des einen durch seine Entfernungen von den drei anderen bestimmt, wenn diese nicht in einer geraden Linie liegen, widrigenfalls zwei Lagen möglich sind. Hierauf muss bei der Bestimmung der Coordinaten x', y', z', x'' u. s. w. für den Fall des Gleichgewichts Rücksicht genommen werden. Man kann die Gleichungen, von welchen man bei der Lösung der Aufgabe ausgeht, stets so auswählen, dass jede Zweideutigkeit verschwindet, ohne eine grössere Zahl von Gleichungen zu bedürfen, als der Paragraph angiebt.

§. 26. Bertrand's Entwicklung der Bedeutung von $E\partial e$ ist sehr gesucht, und ausserdem fehlerhaft: denn $E\partial e$ kann nicht proportional mit ∂e sein, wenn E, wie es der Fall ist, Function von e und also veränderlich ist.

Nimmt man e als bekannt an, so wird, da man $-\frac{Eh}{fg\sin e}$ bestimmen kann, auch $E=\varphi(e)$ sich bestimmen lassen. Was Bertrand in seiner Note über die Unmöglichkeit, E direct zu bestimmen, sagt, ist also unbegründet.

§. 33. Zeile 8 bis 10 dieses Paragraphen muss es heissen: Ainsi, comme les trois premières équations intégrales de l'art. 30 donnent, pour le premier point du fil où les quantités affectées de f deviennent $=0$, statt: Ainsi, comme les trois premières équations intégrales de l'art. 30 donnent, pour le premier point du fil où les quantités affectées de f deviennent alors.

§. 35. Man erhält hier:

$$\lambda''\left(\frac{\partial x''}{\partial s''}+a''\frac{\partial z''}{\partial s''}\right)=0,\quad \lambda''\left(\frac{\partial y''}{\partial s''}+b''\frac{\partial z''}{\partial s''}\right)=0;$$

also entweder

$$\lambda''=0 \quad \text{oder} \quad \partial x''=-a''\partial z'',\quad \partial y''=-b''\partial z'';$$

woraus

$$a''^2 + b''^2 = -1$$

folgt, was unmöglich ist, wenn a'' und b'' reell sind; also:

$$\lambda'' = 0, \text{ und ebenso } \lambda' = 0,$$

so dass, wie in §. 33.,

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0;$$

$$SX\partial m = 0, \quad SY\partial m = 0, \quad SZ\partial m = 0.$$

§. 38. Um die Lage des Fadens auf der krummen Fläche, deren Gleichung

$$\partial z = p\partial x + q\partial y$$

ist, für den Zustand des Gleichgewichts zu bestimmen, muss man die Werthe von $\partial x'$, $\partial y'$, $\partial z'$ und von $\partial x''$, $\partial y''$, $\partial z''$ aus den bestimmten und den unbestimmten Gleichungen ableiten. Nimmt man hierzu noch die Gleichungen der Curve des Fadens, so ist seine Lage so weit als möglich bestimmt.

§. 40. Der Druck, welchen jedes Element des Fadens auf die krumme Fläche ausübt, auf welcher er liegt, ist $\mu\sqrt{1+p^2+q^2}$. Also ist der Gesammtausdruck des Fadens auf die Unterlage $\frac{m\mu\sqrt{1+p^2+q^2}}{\partial m}$, vorausgesetzt, dass $\mu\sqrt{1+p^2+q^2}$ eine Constante ist.

§. 41. Gegen die Gleichung $\partial\lambda = 0$ ist zu erinnern, dass sie aus §. 30. abgeleitet ist, wo nur die Unausdehnsamkeit des Fadens als Bedingung vorausgesetzt wird, während sie sich aus §. 38., wo auch die zweite Bedingung, dass der Faden auf der krummen Fläche liegt, eingeführt ist, nicht ergiebt. In der That weiss man auch nur von einem freien oder auf einer Ebene ruhenden Faden, auf dessen Enden Kräfte spannend wirken, dass seine Spannung in allen Theilen gleich ist.

Aus $\delta s = 0$, was sich aus der Gleichung

$$\lambda S\delta\partial s + S\mu(\delta z - p\delta x - q\delta y) = 0$$

ergiebt, geht noch nicht mit Nothwendigkeit hervor, dass die Länge der Curve s des Fadens ein Maximum oder ein Minimum ist.

Wie sich aus dem Vorstehenden leicht ergiebt, sind die Resultate dieses Paragraphen nicht begründet.

§. 42. Auch hier, wie bei §. 18., ist zu bemerken, dass, ob-

gleich die algebraischen Ausdrücke von F und λ ganz dieselben sind, ihre absoluten Werthe doch nur dann übereinstimmen, wenn die Elemente ∂s der Curve des extensiblen Fadens keine wirkliche Ausdehnung erlitten haben. Dagegen entsprechen den algebraisch identischen Gleichungen der Curven des ausdehnsamen und des unausdehnsamen Fadens stets gleiche absolute Zahlwerthe, auch wenn die Elemente des ersteren ausgedehnt worden sind, weil die Verhältnisse von $\partial x:\partial y:\partial z$ unverändert geblieben sind, wie die Formeln des §. 30. zeigen. Beide Curven haben daher völlig gleiche Form.

§. 44. Wenn man

$$\delta U=\frac{\partial U}{\partial x}\delta x+\frac{\partial U}{\partial y}\delta y+\frac{1}{U}\left(z'\frac{\partial\delta z}{\partial x}-z'^2\frac{\partial\delta x}{\partial x}+z_1\frac{\partial\delta z}{\partial y}-z_1{}^2\frac{\partial\delta y}{\partial y}\right)$$

(§. 32. des vierten Abschnitts) setzt, so erhält man ganz andere, minder einfache Gleichungen des Gleichgewichts und einen complicirteren Werth von F, aber dieselbe Gleichung der krummen Fläche, wie Lagrange, abgesehen von dem Werthe von F.

§. 45. Setzt man in der Gleichung der krummen Fläche $U=1$, so wird sie:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial z}=\frac{\partial.(\Pi+a)\frac{\partial z}{\partial x}}{\partial x}+\frac{\partial.(\Pi+a)\frac{\partial z}{\partial y}}{\partial y};$$

setzt man ferner $\Pi=-gz$ und vernachlässigt alle zweiten Potenzen von z, so geht sie über in:

$$g=-a\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right).$$

§. 46. Da keine unendlich kleinen Grössen dritter Ordnung in dem Werthe von $\sin^2 e$ vorkommen, so hat man:

$$\sin^2 e=\frac{\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2-\partial^2s^2}{\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2+2\partial s\partial^2s+\partial s^2},$$

$$e=\sqrt{\frac{\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2-\partial^2s^2}{\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2+2\partial s\partial^2s+\partial s^2}}.$$

§. 47. Es ist

$$\delta e=\frac{(\partial s+\partial^2s)^2(\partial^2x\delta\partial^2x+\partial^2y\delta\partial^2y+\partial^2z\delta\partial^2z)}{(\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2-\partial^2s^2)^{\frac{1}{2}}(\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2+2\partial s\partial^2s+\partial s^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Man muss also setzen:

$$J = \frac{E(\partial s + \partial^2 s)^2}{(\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2 - \partial^2 s^2)^{\frac{1}{2}} (\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2 + 2\partial s \partial^2 s + \partial s^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

§. 48. Für obigen Werth von J wird:

$$\frac{E^2 \partial s^2 (\partial s + \partial^2 s)^4}{(\partial s^2 + 2\partial s \partial^2 s + \partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2)^3}$$

$$= [F + \int(A + \int X \partial m)\partial y - \int(B + \int Y \partial m)\partial x]^2$$
$$+ [G + \int(A + \int X \partial m)\partial z - \int(C + \int Z \partial m)\partial x]^2$$
$$+ [H + \int(B + \int Y \partial m)\partial z - \int(C + \int Z \partial m)\partial y]^2.$$

Wenn der elastische Faden eine Curve einfacher Krümmung bildet, für welchen Fall Lagrange's Behandlung des Problems ausreichend ist, so hat man:

$$f^2 = \partial x^2 + \partial y^2 = \partial s^2,$$

$$g^2 = \partial s^2 + 2\partial s \partial^2 s + \partial^2 x^2 + \partial^2 y^2,$$

$$h^2 = 4\partial s^2 + 4\partial s \partial^2 s + \partial^2 x^2 + \partial^2 y^2;$$

$$J = \frac{E(\partial s + \partial^2 s)^2}{(\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 - \partial^2 s^2)^{\frac{1}{2}} (\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + 2\partial s \partial^2 s + \partial s^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Gleichung der Curve des Fadens ist:

$$J(\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x) = F + \int(A + \int X \partial m)\partial y - \int(B + \int Y \partial m)\partial x.$$

§. 49. Man hat:

$$J = \frac{K(\partial s + \partial^2 s)^2}{\partial s(\partial^2 x^2 + \partial^2 y^2 + \partial^2 z^2 + 2\partial s \partial^2 s + \partial s^2)^2},$$

also nicht constant. Deshalb bestimmt man λ am besten aus einer der drei durch die erste Integration erhaltenen Gleichungen des §. 48.:

$$\lambda = [A + \int X \partial m + \partial.(J\partial^2 x)]\frac{\partial s}{\partial x} = [B + \int Y \partial m + \partial.(J\partial^2 y)]\frac{\partial s}{\partial y}$$
$$= [C + \int Z \partial m + \partial.(J\partial^2 z)]\frac{\partial s}{\partial z}.$$

Lagrange setzt in seiner Lösung $\partial m = \Gamma \partial s$ und bestimmt Γ als die Dicke des Fadens, indem er stillschweigend dessen Dichtigkeit $= 1$ setzt.

§. 50. Die Integration der drei ersten Gleichungen dieses Paragraphen ist nur für den von Lagrange berechneten Werth von J möglich.

Wenn der elastische Streifen eine Curve einfacher Krümmung bildet, so wird die erste dieser Gleichungen:

$$K\frac{\partial\varphi}{\partial s}=F+A\int\sin\varphi\partial s-B\int\cos\varphi\partial s.$$

Ferner hat man:

$$\partial s=\frac{\partial\varphi\sqrt{K}}{\sqrt{2D-2A\cos\varphi-2B\sin\varphi}},$$

$$y=\frac{Bx-F}{A}+\frac{K}{A}\sqrt{2D-2A\cos\varphi-2B\sin\varphi}.$$

Für den von mir berechneten Werth von J ist eine weitere Integration der Gleichung

$$J\partial s^2\partial\varphi=F+A\int\sin\varphi\partial s-B\int\cos\varphi\partial s$$

unmöglich.

§. 52. In dem letzten Absatze dieses Paragraphen muss es heissen: Mais la tension du fil qui est exprimée par λ, lorsque le fil n'est pas élastique, ou par F, lorsqu'il est élastique (art. 43), etc. statt: Mais la tension du fil qui est exprimée par λ ou par F, lorsque le fil n'est pas élastique (art. 43), etc.

Weil ∂s in dem Werthe von δe veränderlich ist für den Fall der Ausdehnbarkeit des elastischen Fadens, so muss nach dem von mir berechneten Werthe von e zu dem Werthe von δe noch hinzugefügt werden:

$$-\frac{\partial^2 s\delta\partial^2 s}{\sqrt{(\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2-\partial^2s^2)(\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2+2\partial s\partial^2s+\partial s^2)}}$$

$$-\frac{e(\partial^2 s\delta\partial s+\partial s\delta\partial^2 s+\partial s\delta\partial s)}{\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2+2\partial s\partial^2s+\partial s^2}.$$

Zu dem Werthe von $SE\delta e$ sind also noch hinzuzufügen die Glieder:

$$-S\frac{E(e\partial^2s+\partial s)}{\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2+2\partial s\partial^2s+\partial s^2}\delta\partial s-SE\left(\frac{e\partial s}{\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2+2\partial s\partial^2s+\partial s^2}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 s}{\sqrt{(\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2-\partial^2s^2)(\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2+2\partial s\partial^2s+\partial s^2)}}\right)\delta\partial^2 s.$$

Das letztere verwandelt sich in:

$$-\frac{E''e''\partial s''}{\partial^2x''^2+\partial^2y''^2+\partial^2z''^2+2\partial s''\partial^2s''+\partial s''^2}\partial\delta s''$$

$$-\frac{E''\partial^2s''}{\sqrt{\left\{\begin{array}{l}(\partial^2x''^2+\partial^2y''^2+\partial^2z''^2-\partial^2s''^2)\\ \times(\partial^2x''^2+\partial^2y''^2+\partial^2z''^2+2\partial s''\partial^2s''+\partial s''^2)\end{array}\right\}}}\partial\delta s''$$

$$+\frac{E'e'\partial s'}{\partial^2x'^2+\partial^2y'^2+\partial^2z'^2+2\partial s'\partial^2s'+\partial s'^2}\partial\delta s'$$

$$+\frac{E'\partial^2s'}{\sqrt{(\partial^2x'^2+\partial^2y'^2+\partial^2z'^2-\partial^2s'^2)(\partial^2x'^2+\partial^2y'^2+\partial^2z'^2+2\partial s'\partial^2s'+\partial s'^2)}}\partial\delta s'$$

$$+S\partial.\frac{Ee\partial s}{\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2+2\partial s\partial^2s+\partial s^2}\delta\partial s$$

$$+S\partial.\frac{E\partial^2s}{\sqrt{(\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2-\partial^2s^2)(\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2+2\partial s\partial^2s+\partial s^2)}}\delta\partial s.$$

Also müssen zu dem Werthe von $SE\delta e$ hinzugefügt werden die Glieder:

$$-\frac{E''e''\partial s''}{\partial^2x''^2+\partial^2y''^2+\partial^2z''^2+2\partial s''\partial^2s''+\partial s''^2}\partial\delta s''$$

$$-\frac{E''\partial^2s''}{\sqrt{\left\{\begin{array}{l}(\partial^2x''^2+\partial^2y''^2+\partial^2z''^2-\partial^2s''^2)\\ \times(\partial^2x''^2+\partial^2y''^2+\partial^2z''^2+2\partial s''\partial^2s''+\partial s''^2)\end{array}\right\}}}\partial\delta s''$$

$$+\frac{E'e'\partial s'}{\partial^2x'^2+\partial^2y'^2+\partial^2z'^2+2\partial s'\partial^2s'+\partial s'^2}\partial\delta s'$$

$$+\frac{E'\partial^2s'}{\sqrt{(\partial^2x'^2+\partial^2y'^2+\partial^2z'^2-\partial^2s'^2)(\partial^2x'^2+\partial^2y'^2+\partial^2z'^2+2\partial s'\partial^2s'+\partial s'^2)}}\partial\delta s'$$

$$-S\Bigg(\frac{E(e\partial^2s+\partial s)}{\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2+2\partial s\partial^2s+\partial s^2}$$

$$-\partial.\frac{Ee\partial s}{\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2+2\partial s\partial^2s+\partial s^2}$$

$$-\partial.\frac{E\partial^2s}{\sqrt{(\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2-\partial^2s^2)(\partial^2x^2+\partial^2y^2+\partial^2z^2+2\partial s\partial^2s+\partial s^2)}}\Bigg)\delta\partial s.$$

§. 54. In der Entwicklung der Gleichung dieses Paragraphen finden sich im Texte Druckfehler; sie wird:

$$
\begin{aligned}
0 = \; & S[X\partial m - \partial.(\lambda\partial x) + \partial^2.(\mu\partial^2 x) - \partial^3.(\nu\partial^3 x)]\delta x \\
& + S[Y\partial m - \partial.(\lambda\partial y) + \partial^2.(\mu\partial^2 y) - \partial^3.(\nu\partial^3 y)]\delta y \\
& + S[Z\partial m - \partial.(\lambda\partial z) + \partial^2.(\mu\partial^2 z) - \partial^3.(\nu\partial^3 z)]\delta z \\
& + [\lambda''\partial x'' - \partial.(\mu''\partial^2 x'') + \partial^2.(\nu''\partial^3 x'')]\delta x'' \\
& + [\mu''\partial^2 x'' - \partial.(\nu''\partial^3 x'')]\partial\delta x'' \\
& + \nu''\partial^3 x''\partial^2\delta x'' \\
& + [\lambda''\partial y'' - \partial.(\mu''\partial^2 y'') + \partial^2.(\nu''\partial^3 y'')]\delta y'' \\
& + [\mu''\partial^2 y'' - \partial.(\nu''\partial^3 y'')]\partial\delta y'' \\
& + \nu''\partial^3 y''\partial^2\delta y'' \\
& + [\lambda''\partial z'' - \partial.(\mu''\partial^2 z'') + \partial^2.(\nu''\partial^3 z'')]\delta z'' \\
& + [\mu''\partial^2 z'' - \partial.(\nu''\partial^3 z'')]\partial\delta z'' \\
& + \nu''\partial^3 z''\partial^2\delta z'' \\
& - [\lambda'\partial x' - \partial.(\mu'\partial^2 x') + \partial^2.(\nu'\partial^3 x')]\delta x' \\
& - [\mu'\partial^2 x' - \partial.(\nu'\partial^3 x')]\partial\delta x' \\
& - \nu'\partial^3 x'\partial^2\delta x' \\
& - [\lambda'\partial y' - \partial.(\mu'\partial^2 y') + \partial^2.(\nu'\partial^3 y')]\delta y' \\
& - [\mu'\partial^2 y' - \partial.(\nu'\partial^3 y')]\partial\delta y' \\
& - \nu'\partial^3 y'\partial^2\delta y' \\
& - [\lambda'\partial z' - \partial.(\mu'\partial^2 z') + \partial^2.(\nu'\partial^3 z')]\delta z' \\
& - [\mu'\partial^2 z' - \partial.(\nu'\partial^3 z')]\partial\delta z' \\
& - \nu'\partial^3 z'\partial^2\delta z'.
\end{aligned}
$$

§. 58. Aus $\nu' = 0$ folgt nothwendig $\partial\nu' = 0$ (vergl. auch §. 54. und §. 56.), so dass man hat:

$$
\begin{aligned}
\mu'(\partial y'\partial^2 x' - \partial x'\partial^2 y') &= Ay' - Bx' + F, \\
\mu'(\partial z'\partial^2 x' - \partial x'\partial^2 z') &= Az' - Cx' + G, \\
\mu'(\partial z'\partial^2 y' - \partial y'\partial^2 z') &= Bz' - Cy' + H;
\end{aligned}
$$

also durch Elimination von μ':

$$
\begin{aligned}
A(y'\partial z' - z'\partial y') + B(z'\partial x' - x'\partial z') + C(x'\partial y' - y'\partial x') \\
+ F\partial z' - G\partial y' + H\partial x' = 0,
\end{aligned}
$$

welche Gleichung sich umformen lässt in:

$$
\begin{aligned}
\partial z' S[X(y-y') - Y(x-x')]\partial m - \partial y' S[X(z-z') - Z(x-x')]\partial m \\
+ \partial x' S[Y(z-z') - Z(y-y')]\partial m = 0.
\end{aligned}
$$

In dieser Gestalt ist die Gleichung besonders geeignet, um nachzuweisen, dass für den Fall, wo der steife Faden die Form einer geraden Linie hat, das erste Glied von selbst Null wird, worin die völlige Unbeweglichkeit des Fadens ausgesprochen ist.

Durch Elimination von μ' erhält man ferner die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial y'\partial^2 x' - \partial x'\partial^2 y'}{\partial z'\partial^2 x' - \partial x'\partial^2 z'} = \frac{Ay' - Bx' + F}{Az' - Cx' + G},$$

$$\frac{\partial y'\partial^2 x' - \partial x'\partial^2 y'}{\partial z'\partial^2 y' - \partial y'\partial^2 z'} = \frac{Ay' - Bx' + F}{Bz' - Cy' + H};$$

welche die Bedingungen des Gleichgewichts der auf den steifen Faden wirkenden Kräfte angeben.

§. 59. Mit Unrecht behauptet Lagrange, dass λ, μ, ν die Kräfte ausdrücken, welche der Variation der Functionen α, β, γ unter der Einwirkung der auf den Faden wirkenden Kräfte Widerstand leisten; diese Kräfte haben vielmehr die Werthe:

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)^2},$$

$$\mu\sqrt{\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)^2},$$

$$\nu\sqrt{\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)^2}.$$

§. 60. Nähme man $\partial^8 z - \frac{\partial^3 y \partial^2 z}{\partial^2 y} = 0$ an, so würde daraus $y = az$ folgen, wo a constant ist, was bei einem Körper, welcher drei Dimensionen hat, nicht möglich ist, und eben so wenig bei einer Curve.

§. 63. Die Gleichungen des ersten und zweiten Falls des vorigen Paragraphen entsprechen den Gleichungen der zweiten Abtheilung des zweiten Capitels und die Gleichung des dritten Falls der des §. 58. Die Gleichungen des dritten Abschnitts entsprechen nur im Allgemeinen den hier behandelten Fällen.

Sechster Abschnitt.

Die Gestaltveränderung, welche die Theilchen einer Flüssigkeit bei einer unendlich kleinen Verschiebung erleiden, wird durch

die Formel des Gleichgewichts ausgedrückt; dagegen wird die leichte Beweglichkeit der Theilchen nicht in die Sprache des Calcüls übersetzt. Jedoch kommt sie in anderen, abgeleiteten Formeln zum Ausdruck: z. B. in §. 33. des siebenten Abschnitts.

Siebenter Abschnitt.

§. 2. Eigentlich resultirt die Variation δs aus den Variationen δp, δq, δr u. s. w. der Linien p, q, r u. s. w.

§. 6. Die beiden Kräfte Π' und Π'' sind den Flächen ω' und ω'', auf welche sie wirken, direct proportional.

§. 7. Da die Gleichung

$$S(P\partial p + Q\partial q + R\partial r + \ldots.) = 0$$

für einen beliebig gestalteten Canal gilt, so gilt sie für die ganze Masse der Flüssigkeit, da man sich diese aus vielen Canälen zusammengesetzt denken kann.

§. 8. In der Gleichung

$$\delta\Psi = P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots. + S(\delta P\partial p - \partial P\delta p + \delta Q\partial q - \partial Q\delta q \\ + \delta R\partial r - \partial R\delta r + \ldots.)$$

ist $P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots.$ nothwendig $=0$, weil in der allgemeinen Gleichung des Gleichgewichts die Glieder ausserhalb des Zeichens Null sein müssen. Aber selbst dann, wenn die Flüssigkeit sich in einem an beiden Enden verschlossenen Canal befindet, können Verschiebungen der äussersten Theile des Fluidums nach der Seite der Flüssigkeit hin eintreten, und δp, δq, δr u. s. w. sind also nicht $=0$.

Ferner ist P gewöhnlich nur Function von p, Q von q, R von r, u. s. w., und deshalb $P\partial p + Q\partial q + R\partial r + \ldots.$ ein vollständiges Differential.

§. 9. Wenn $P\partial p + Q\partial q + R\partial r + \ldots.$ in $X\partial x + Y\partial y + Z\partial z$ verwandelt wird, wo X Function von x, y, z ist, und ebenso Y und Z, so findet die Methode des vorigen Paragraphen ihre Anwendung, und man hat:

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0.$$

§. 11. Von den drei Grössen $\frac{\partial\delta x}{\partial x}$, $\frac{\partial\delta y}{\partial y}$ und $\frac{\partial\delta z}{\partial z}$ muss min-

destens **eine** einen negativen Werth haben, da nicht alle drei Seiten des Parallelepipedums bei der Verschiebung, welche das Volum nicht abändert, grösser werden können.

§. 13. Der Werth von $\cos\alpha$ ist nicht nothwendig unendlich klein, sondern kann, als Summe zweier Differentialquotienten, eine endliche Grösse sein. Ebenso die Werthe von $\cos\beta$ und $\cos\gamma$ in §. 14.

Bei der Berechnung des Werthes von $\cos\alpha$ vernachlässigt man die Potenzen von der zweiten Ordnung an; aber diese sind nicht nothwendig unendlich klein, weshalb die ganze Berechnung fehlerhaft wird.

§. 17. Es wird bei dieser ganzen Entwickelung vorausgesetzt, dass die Kräfte, welche auf die Theile der ringsum freien Flüssigkeit einwirken, sich selbst das Gleichgewicht halten, ein Fall, der in der Wirklichkeit nur selten vorkommt. Nimmt man an, die Flüssigkeit befinde sich in einem Gefässe und der Widerstand der Gefässwände rufe das Gleichgewicht hervor, so geht die allgemeine Gleichung des Gleichgewichts in §. 10. über in:

$$S(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\partial m + S\lambda\delta L - S(X'\delta x + Y'\delta y + Z'\delta z) = 0,$$

wo X', Y', Z' den Widerstand jedes Punktes der Wände und des Bodens des Gefässes nach den Richtungen der Axen der x, y und z bezeichnen. Diese Gleichung verwandelt sich durch die Substitutionen in

$$S[(\Gamma X - \frac{\partial\lambda}{\partial x} - \frac{X'}{\partial x\partial y\partial z})\delta x + (\Gamma Y - \frac{\partial\lambda}{\partial y} - \frac{Y'}{\partial x\partial y\partial z})\delta y$$

$$+ (\Gamma Z - \frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{Z'}{\partial x\partial y\partial z})\delta z]\partial x\partial y\partial z + S(\lambda''\delta x'' - \lambda'\delta x')\partial y\partial z$$

$$+ S(\lambda''\delta y'' - \lambda'\delta y')\partial x\partial z + S(\lambda''\delta z'' - \lambda'\delta z')\partial x\partial y = 0.$$

Man hat also folgende unbestimmte particuläre Gleichungen des Gleichgewichts:

$$X' = (\Gamma X - \frac{\partial\lambda}{\partial x})\partial x\partial y\partial z,$$

$$Y' = (\Gamma Y - \frac{\partial\lambda}{\partial y})\partial x\partial y\partial z,$$

$$Z' = (\Gamma Z - \frac{\partial\lambda}{\partial z})\partial x\partial y\partial z.$$

Nimmt man an, dass das ganz mit Flüssigkeit angefüllte Ge-

fäss die Form eines Würfels habe, dessen innerer Rauminhalt n^3 sei, und dass g die Schwere bezeichne, so ist:

$$SZ\partial m = n^2(1+2+3+\ldots+n)g\partial m = n^3.\frac{n+1}{2}g\partial m,$$

$$SY\partial m = 2(1+2+3+\ldots+n)ng\partial m = n^2(n+1)g\partial m,$$

$$SX\partial m = n^2(n+1)g\partial m;$$

ferner:

$$Z\partial m = ng\partial m,\quad (n-1)g\partial m,\quad (n-2)g\partial m, \ldots g\partial m;$$

$$Y\partial m = X\partial m = g\partial m,\quad 2g\partial m,\quad 3g\partial m, \ldots ng\partial m;$$

folglich:

$$X' = (g\Gamma - \frac{\partial\lambda}{\partial x})\partial x\partial y\partial z,\quad (2g\Gamma - \frac{\partial\lambda}{\partial x})\partial x\partial y\partial z,\quad (3g\Gamma - \frac{\partial\lambda}{\partial x})\partial x\partial y\partial z, \ldots,$$
$$(ng\Gamma - \frac{\partial\lambda}{\partial x})\partial x\partial y\partial z;$$

$$Y' = (g\Gamma - \frac{\partial\lambda}{\partial y})\partial x\partial y\partial z,\quad (2g\Gamma - \frac{\partial\lambda}{\partial y})\partial x\partial y\partial z,\quad (3g\Gamma - \frac{\partial\lambda}{\partial y})\partial x\partial y\partial z, \ldots,$$
$$(ng\Gamma - \frac{\partial\lambda}{\partial y})\partial x\partial y\partial z;$$

$$Z' = (ng\Gamma - \frac{\partial\lambda}{\partial z})\partial x\partial y\partial z,\quad [(n-1)g\Gamma - \frac{\partial\lambda}{\partial z}]\partial x\partial y\partial z,\quad [(n-2)g\Gamma - \frac{\partial\lambda}{\partial z}]\partial x\partial y\partial z,$$
$$\ldots,\ (g\Gamma - \frac{\partial\lambda}{\partial z})\partial x\partial y\partial z.$$

Für jeden Punkt der horizontalen Oberfläche der Flüssigkeit hat man, wie in §. 18., die Gleichung $\lambda = 0$. Aber $\frac{\partial\lambda}{\partial x}$, $\frac{\partial\lambda}{\partial y}$ und $\frac{\partial\lambda}{\partial z}$ bleiben in obigen Gleichungen unbestimmt. Man müsste λ, d. h. den Druck, welcher auf jedes Flüssigkeitstheilchen von allen Seiten gleichmässig einwirkt, kennen, um $\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{\partial\lambda}{\partial y} = \frac{\partial\lambda}{\partial z}$ berechnen zu können.

Es folgt aus der Gleichheit von $\frac{\partial\lambda}{\partial x}$, $\frac{\partial\lambda}{\partial y}$ und $\frac{\partial\lambda}{\partial z}$, dass X', Y' und Z' für jedes Flüssigkeitstheilchen in derselben Horizontalschicht gleich sind.

§. 20. Die Dichtigkeit muss in jeder wagerechten Schicht, welche von zwei unendlich nahen wagerechten Flächen begrenzt wird, gleichförmig sein; sie kann aber wegen der Unzusammen-

drückbarkeit der Flüssigkeit, welche bei **Lagrange** noch als Gesetz gilt, in wagerechten Schichten von jeder noch so grossen Dicke gleichförmig sein, und es müssen sich die Schichten nur von oben nach unten nach ihrer zunehmenden Dichtigkeit anordnen.

§. 21. Die Formel für den Druck in jedem Punkte der Flüssigkeit ist:

$$\int \Gamma(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z) \quad \text{oder} \quad \int \Gamma(P\partial x + Q\partial y + R\partial z).$$

§. 26. Die Bedingungen für die Identität der beiden Gleichungen

$$\Sigma - \frac{f(y^2+z^2)}{2A} = \text{const.} \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$$

sind:

$$\frac{mMA-f}{mLA} = \frac{A^2}{B^2}, \quad \frac{mNA-f}{mLA} = \frac{A^2}{C^2}.$$

Note IV., von Bertrand.

Statt f ist in den Gleichungen (1) und (2) zu setzen: $\frac{f}{A}$.

Durch Elimination von $\frac{f}{A}$ zwischen (1) und (2) erhält man:

$$(3) \qquad (M-N)(1+\lambda^2)(1+\lambda'^2) = L(\lambda'^2-\lambda^2),$$

$$(4) \qquad (\lambda'^2-\lambda^2)\left[(1+\lambda^2)(1+\lambda'^2)\int_0^1 \frac{x^4\partial x}{H^3} - \int_0^1 \frac{x^2\partial x}{H}\right] = 0.$$

---

§. 28. Die Gleichung der Gestalt der äusseren, freien Oberfläche der Flüssigkeit ist:

$$\int \Gamma(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z) = K$$

und nicht

$$S\Gamma(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z) = K.$$

§. 33. Im dritten Absatze dieses Paragraphen muss es heissen: On voit d'abord que l'introduction des variations $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ n'apporte aucun changement aux équations qui doivent avoir lieu pour tous les points du fluide, et qui résultent des termes affectés d'une triple intégration, parcequ'en égalant à zéro les coéfficients de

δx, δy, δz dans ces termes, les termes qui contiennent les variations $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ disparaissent en même temps. statt: On voit d'abord que .... parcequ'en égalant à zéro les coëfficients de δx, δy, δz dans ces termes, les variations $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ disparaissent en même temps.

§. 36. Gegen den in diesem Paragraphen geführten Beweis lässt sich einwenden, dass die Integration von

$$S\lambda\left(\frac{\partial\delta\xi}{\partial x}+\frac{\partial\delta\eta}{\partial y}+\frac{\partial\delta\zeta}{\partial z}\right)\partial x\partial y\partial z$$

ein blosser Formalismus ist, da jedes dieser Integrale ohne Weiteres $=0$ ist wegen der Unabhängigkeit der Variationen $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ beziehungsweise von x, y, z.

§. 39. Nach Lagrange's Methode erhält man keinen besonderen Ausdruck für den Widerstand des Bodens und der Wände des Gefässes, in welchem sich die Flüssigkeit befindet, obgleich dieser Widerstand eine wesentliche Bedingung des Gleichgewichts aller, auch der inneren Flüssigkeitstheile ist. Die Summe der Momente der auf die inneren und die begrenzenden Theile der Flüssigkeit wirkenden Kräfte ist $=0$: das ist die Formel des Gleichgewichts, in welcher der Widerstand der Gefässwände stillschweigend als bekannte Grössen vorausgesetzt wird. Man hat also die Formel so zu deuten, dass die Summe der Momente der der Flüssigkeit eigenthümlichen Kräfte und die Summe der Momente des Widerstandes der Wände sich Gleichgewicht halten, für den Fall des unbeweglichen Gefässes.

Diese Formel ist, was die darin wirklich ausgedrückten Kräfte betrifft, unabhängig von dem Gesetze der Gleichheit des Druckes nach jeder Richtung, Lagrange's Plane (§. 6.) gemäss, während die von mir zu §. 17. gegebene Formel sich auf dieses Gesetz stützt.

Achter Abschnitt.

§. 4. Es ist

$$\varepsilon = \text{const.} - \int \Gamma(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z).$$

§. 5. Man muss hier die Wärme Θ nach der durch sie hervorgerufenen Ausdehnung der Gasarten bestimmen, so dass z. B.

$$\begin{aligned} 0^0\text{C.} &= 1, \\ 266^0, 6\text{C.} &= 2, \\ 533^0, 2\text{C.} &= 3, \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

gesetzt wird.

§. 7. Auch für ein in ein Gefäss eingeschlossenes Gas könnte man die Gleichung anwenden, die ich zu §. 17. des vorigen Abschnitts aufgestellt habe, indem man blos λ mit $-\varepsilon$ vertauscht, und es gelten alle daraus abgeleiteten Folgerungen, ausser dass man, wegen des ringsum geschlossenen Gefässes, nirgends $\varepsilon = 0$ hat.

§. 11. Der richtige Werth von $\int \frac{\partial x}{\theta}$ ist:

$$\frac{x}{k}\left(1 - \frac{T+t}{2k} + \frac{T^2 + Tt + t^2}{3k^2} - \ldots\right).$$

Zweiter Theil.

Die Dynamik.

Erster Abschnitt.

§. 2. Lagrange sagt, man könne den Werth der beschleunigenden Kraft, welche in jedem Augenblicke auf das Bewegliche wirkt, bestimmen, indem man die in diesem Augenblick hervorgerufene Geschwindigkeit mit der Dauer dieses Augenblicks, oder den vermöge derselben in diesem Augenblick durchlaufenen Raum mit dem Quadrate der Dauer dieses Augenblicks vergleiche. Letztere Behauptung ist ungenau: denn man hat, wenn g die Schwere, ∂v die in einem Augenblick ∂t durch dieselbe hervorgerufene Geschwindigkeit und ∂s den durchlaufenen Raum bezeichnet:

$$g = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial s}{t \partial t} = \frac{2 \partial s}{\partial . t^2},$$

aber nicht:

$$g = \frac{\partial s}{\partial t^2},$$

Formeln, welche für jede gleichförmig beschleunigte Bewegung gelten.

§. 15. Im zweiten Absatze muss offenbar gelesen werden: D'Alembert a donné depuis, à ce principe, une plus grande étendue, en faisant voir que si chaque corps est sollicité par une force accélératrice constante et qui agisse suivant des lignes parallèles, ou qui soit dirigée vers un point fixe et agisse en raison de la distance, le centre de gravité doit décrire la même droite ou courbe que si les corps étaient libres; statt: D'Alembert ....,

le centre de gravité doit décrire la même courbe que si les corps étaient libres.

Zweiter Abschnitt.

§. 6. Es ist falsch, wenn hier gesagt wird, dass die Kräfte $\frac{m\partial^2 x}{\partial t^2}$, $\frac{m\partial^2 y}{\partial t^2}$, $\frac{m\partial^2 z}{\partial t^2}$, im entgegengesetzten Sinne genommen, so dass sie die Linien x, y, z zu verkleinern streben, den wirklichen Kräften P, Q, R u. s. w., welche als die Linien p, q, r u. s. w. zu verkleinern strebend angesehen werden, das Gleichgewicht halten müssen: denn im vorhergehenden Paragraphen haben wir die Gleichung:

$$S\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\delta x + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\delta y + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\delta z\right)m = -S(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots.)m.$$

§. 8. Nach den Feststellungen des §. 7. hat man, streng genommen,

$$x - l = Dx,\quad y - m = Dy,\quad z - n = Dz,$$

und Ds als das Element der Curve; also auch:

$$\frac{x-l}{r} = \frac{Dx}{Ds},\quad \frac{y-m}{r} = \frac{Dy}{Ds},\quad \frac{z-n}{r} = \frac{Dz}{Ds},\ \text{u. s. w.}$$

$D\alpha$, $D\beta$, $D\gamma$ werden offenbar als constant angenommen; sind sie ebenfalls veränderlich, so wird der Werth für δr:

$$\delta r = \frac{Dx - D\alpha}{D\sigma}(\delta x - D\delta\alpha) + \frac{Dy - D\beta}{D\sigma}(\delta y - D\delta\beta) + \frac{Dz - D\gamma}{D\sigma}(\delta z - D\delta\gamma).$$

Da der Widerstand proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit des sich Bewegenden wächst, also ebenfalls eine regelmässig beschleunigende Kraft ist, welche aber der Bewegung des Systems der Körper entgegenwirkt, so nimmt die allgemeine Formel der Dynamik folgende Form an:

$$S\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\delta x + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\delta y + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\delta z\right)m - S\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\delta x + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\delta y + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\delta z\right)$$
$$+ S(P\delta p + Q\delta q + \ldots.)m + R\delta r = 0.$$

§. 11. Wirken die Stosskräfte P, Q, R u. s. w. auf alle Körper des Systems unmittelbar ein, so hat man:

$$S(\dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y + \dot{z}\delta z)m + S(P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots.) = 0.$$

Wirken sie aber nur auf irgend einen Körper m des Systems unmittelbar ein, die Bewegung wird aber von diesem dem ganzen System mitgetheilt, so wird die Bewegungsgleichung:

$$S(\dot{x}\delta x + \dot{y}\delta y + \dot{z}\delta z)m + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots = 0$$

Dritter Abschnitt.

§. 9. Das Princip der Flächenräume wird hier nur für den Fall bewiesen, wo das ganze System der Körper eine gemeinsame Drehung um einen festen Punkt hat; es gilt aber auch für ein ganz freies System von Körpern, die verschiedene Drehungsgeschwindigkeiten besitzen können (§. 16. des ersten Abschnitts).

§. 10. Es ist

$$y\partial z - z\partial y = (\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')(x'\partial y' - y'\partial x') + (\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')(z'\partial x' - x'\partial z') + (\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')(y'\partial z' - z'\partial y'),$$

folglich:

$$A = (\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')C' + (\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')B' + (\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')A'.$$

§. 11. Indem man die drei Gleichungen

$$S\left(\frac{x'\partial y' - y'\partial x'}{\partial t}\right)m = C',$$

$$S\left(\frac{z'\partial x' - x'\partial z'}{\partial t}\right)m = 0,$$

$$S\left(\frac{y'\partial z' - z'\partial y'}{\partial t}\right)m = 0$$

auflöst, und die daraus sich ergebenden Werthe in die Gleichungen

$$S\left(\frac{x\partial y - y\partial x}{\partial t}\right)m = \gamma''C',$$

$$S\left(\frac{z\partial x - x\partial z}{\partial t}\right)m = \gamma'C',$$

$$S\left(\frac{y\partial z - z\partial y}{\partial t}\right)m = \gamma C'$$

substituirt, nachdem man vorher die Werthe von x, y, z in x', y', z' eingeführt hat, erhält man schliesslich die drei Gleichungen des §. 10.:

$$\gamma = \alpha'\beta'' - \beta'\alpha'', \quad \gamma' = \beta\alpha'' - \alpha\beta'', \quad \gamma'' = \alpha\beta' - \beta\alpha'.$$

§. 15. Wenn in ganz freien Systemen Rotationen um irgend einen Punkt im Raume durch Stosskräfte hervorgerufen werden, so kann man, wie in diesem Paragraphen gezeigt wird, eine solche Bewegung stets in eine Rotation des Systems um seinen Schwerpunkt und in eine Translationsbewegung des Schwerpunktes zerlegen. Dasselbe findet natürlich Statt bei Rotationen eines ganz freien Systems um irgend einen Punkt im Raume, die durch äussere beschleunigende Kräfte hervorgerufen werden (§. 12.).

§. 17. Z. 7. und Z. 13. dieses Paragraphen muss $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ statt x, y, z gelesen werden.

Wirken bei einem festen Körper von beliebiger Gestalt die Stosskräfte nur auf einen Punkt desselben ein, so sind deren Momente:

$$C = Xy - Yx, \quad B = Zx - Xz, \quad A = Yz - Zy,$$

während die Werthe von A, B, C in $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ unverändert bleiben. Wirken die Stosskräfte auf mehrere Punkte x, y, z, x', y', z' u. s. w. des festen Körpers ein, so sind deren Momente:

$$C = Xy + X'y' + \ldots - Yx - Y'x' - \ldots,$$

$$B = Zx + Z'x' + \ldots - Xz - X'z' - \ldots,$$

$$A = Yz + Y'z' + \ldots - Zy - Z'y' - \ldots.$$

§. 18. Wenn irgend ein rotirendes System von Körpern durch die gegenseitige und allmähliche Einwirkung seiner Körper unveränderlich oder zu einem einzigen festen Körper wird, so erleidet die Rotationsbewegung keine Aenderung, es mögen die sich anziehenden Körper ihre relative Lage ändern oder nicht (vergl. §. 7.).

Note V., von Bertrand.

Die Integrale a, b, c sind stets positiv, dagegen können von den Integralen d, e, f zwei negativ sein; folglich ist def stets positiv, und es muss also immer $abc > def$ sein, wenn $a^2b^2c^2 > d^2e^2f^2$ ist.

Wie Bertrand selbst anführt, wird aber für eine gerade Linie, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, der Ausdruck (3) gleich Null, und also ist die Gleichung (1) doch nicht schlechthin unmöglich.

---

§. 20. Offenbar ist Lagrange durch seinen vor der Vollendung der zweiten Ausgabe der analytischen Mechanik erfolgten Tod verhindert worden, seine am Ende dieses Paragraphen ausgesprochene Absicht, später (im neunten Abschnitte) directe Mittel anzugeben, um zu den Gleichungen dieses Paragraphen zu gelangen, auszuführen.

§. 24. Betrachtet man in den drei Gleichungen des §. 22. $\dot{\vartheta}$ als constant, so erhält man in den drei Gleichungen des §. 24. auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens 0, und erspart also Lagrange's Entwickelung, die sich auf die unmögliche Annahme gründet, dass $\dot{\vartheta}$ veränderlich sei, wenn A, B, C constant sind.

§. 25. Die Gleichung zur Bestimmung von s ist:

$$\begin{aligned}&[gh(m-n)+f(g^2-h^2)]s^3\\ &+[g(l-m)(m-n)+fh(n-2l+m)+g(g^2+h^2-2f^2)]s^2\\ &+[f(l-m)(n-l)+gh(n-2m+l)+f(f^2+h^2-2g^2)]s\\ &+fh(l-n)+g(f^2-h^2)=0.\end{aligned}$$

§. 27. Setzen wir $g=0$, $h=0$ und für diesen Fall f', l', m', n' statt f, l, m, n, so erhalten wir:

$$s[f'(l'-m')(n'-l')+f'^3]=0, \quad u=\frac{(l'-m')s}{f'}.$$

Diesen Formeln entspricht:

1) $s=0$, $u=0$. 2) $f'=0$. Also nach den Gleichungen des §. 25. $l'=m'=n'$. Mithin s und u willkührlich.

3) $f'=\sqrt{(l'-m')(l'-n')}$. Daher nach den Gleichungen des §. 25.:

$$u=s\sqrt{\frac{l'-m'}{l'-n'}},$$

und, wenn wir die Gleichung $\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu=1$ zu Hülfe nehmen,

$$s=\tang\lambda\sqrt{\frac{l'-n'}{2l'-m'-n'}},$$

$$u=\tang\lambda\sqrt{\frac{l'-m'}{2l'-m'-n'}}.$$

Nehmen wir an, es sei $\cos\lambda=0$, so dass $\cos^2\mu+\cos^2\nu=1$, so ist $\lambda=90^\circ$, und, wenn sowohl $\cos\mu$, als $\cos\nu$ grösser als 0 ist, $s=\infty$, $u=\infty$.

Aber es ist dies nur einer von den vielen möglichen Fällen, und die Annahme, dass diese Werthe von λ, s und u den beiden anderen Wurzeln der Gleichung des dritten Grades von s entsprechen, daher eine rein willkührliche.

Streng genommen ist

$$\cos\nu = \pm\sqrt{1-\cos^2\mu} = \pm\sin\mu,$$

$$\tang 2\mu = \pm\frac{2f'}{m'-n'},$$

woraus sich für den Winkel μ zwei Paare von Werthen ergeben, in deren jedem die Winkel um 90^0 differiren. Man kann sich aber beide Paare der in der Ebene der y, z liegenden und sich rechtwinklig treffenden Linien mit den Axen der y und z zusammenfallend denken, so dass sie sich zugleich decken, wenn man $f'=0$ setzt.

Setzt man $\cos\lambda=0$ und $\cos\mu$ und $\cos\nu$ abwechselnd $=1$ und $=0$, so erhält man die zweite und dritte Rotationsaxe unmittelbar mit den Axen der y und z zusammenfallend. Man hat nämlich für $\cos\lambda=0$, $\cos\mu=1$, $\cos\nu=0$:

$$s=\infty,\quad u=\frac{0}{0},$$

$$\lambda=90^0,\quad \mu=0^0,\quad \nu=90^0,$$

wodurch die Lage der zweiten Rotationsaxe, mit der Axe der y zusammenfallend, bestimmt wird.

Dagegen hat man für $\cos\lambda=0$, $\cos\mu=0$, $\cos\nu=1$:

$$s=\frac{0}{0},\quad u=\infty,$$

$$\lambda=90^0,\quad \mu=90^0,\quad \nu=0^0,$$

wodurch die Lage der dritten Rotationsaxe, mit der Axe der z zusammenfallend, bestimmt wird.

Die Gleichung

$$f'(\cos^2\nu-\cos^2\mu)+(m'-n')\cos\mu\cos\nu=0$$

liefert für beide Fälle $f'=0$.

§. 29. Die hier gemachte Annahme $l>m$, $m>n$ widerspricht der gegebenen Gleichung $f'=0$. Denn für $f'=0$ muss nach den Gleichungen des §. 25. entweder $l'=m'=n'$ sein, oder wenigstens $l'=m'$ oder auch $l'=n'$.

Die Annahme $l' = m' = n'$ liefert keine Maxima und Minima dieser Functionen von t. Setzt man aber abwechselnd $l' = m'$ und $l' = n'$, so erhält man Maxima und Minima, und zugleich die Lage der zweiten und dritten Rotationsaxe mit der der Axen der y und z übereinstimmend.

Man hat nämlich für $l = m$, $m > n$:

l und m Maximum, n Minimum. $l + m$ Maximum, $l + n$ und $m + n$ Minimum,
$s = \infty$, $u = 0$, (vergl. meine Note zu §. 27., unter 3))
$\lambda = 90^0$, $\mu = 0^0$, $\nu = 90^0$,

so dass die zweite Rotationsaxe mit der Axe der y zusammenfällt.

Man hat ferner für $l = n$, $n > m$:

l und n Maximum, m Minimum. $l + n$ Maximum, $l + m$ und $m + n$ Minimum,
$s = 0$, $u = \infty$,
$\lambda = 90^0$, $\mu = 90^0$, $\nu = 0^0$,

so dass die dritte Rotationsaxe mit der Axe der z zusammenfällt.

Wenn Lagrange in diesem Paragraphen das Massenelement Dm „Molecül" nennt, so darf man darunter nicht das „Molecül" oder „Atom" der Physiker verstehen, indem das Massenelement Dm schon ein Haufen von Atomen ist. (Vergl. den achten Abschnitt des ersten Theils, §. 3.)

§. 31. Da die Lage der Axen der x, y, z, welche zugleich die Hauptaxen des Körpers sind, ganz beliebig ist, so ist es unnöthig, in die für diese Coordinaten geltenden Formeln die Coordinaten x', y', z' einzuführen. Die drei Gleichungen des §. 17. geben:

$$(m + n)\dot{\psi} = A,$$

$$(l + n)\dot{\omega} = B,$$

$$(l + m)\dot{\varphi} = C.$$

Wird $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, so wird auch $\dot{\psi} = 0$, $\dot{\omega} = 0$, $\dot{\varphi} = 0$, weil l, m, n für einen Körper von drei Dimensionen nie Null werden kann. Aber selbst, wenn der rotirende Körper eine gerade Linie ist, kann man den Hauptaxen eine solche Lage geben, dass keine der Grössen l, m, n Null ist, dass also $\dot{\psi}$, $\dot{\omega}$, $\dot{\varphi}$ Null werden.

Die Hauptaxen können nicht im Körper fest, also zugleich mit ihm drehbar sein; mithin sind l, m, n ursprünglich veränder-

lich. Aber da die obigen Gleichungen für jeden Werth von l, m, n, der einer beliebigen gegebenen Lage des Körpers entspricht, gelten, so sind diese Grössen als willkührliche Constanten zu betrachten.

§. 37. Wenn man annimmt, dass die mit δ bezeichneten Variationen endlich seien, so erhält man:

$$\delta . Sm(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = -2Sm[(\delta\dot{x})^2 + (\delta\dot{y})^2 + (\delta\dot{z})^2],$$

woraus man ersieht, dass die Variation der lebendigen Kräfte negativ und gleich der doppelten Summe der lebendigen Kräfte ist, welche von dem Geschwindigkeitsverlust der verschiedenen Punkte herrühren.

Bertrand bemerkt mit Recht, dass die Ausdehnung des in diesem Paragraphen vorgetragenen Satzes auf ein System von Körpern, welche auf veränderliche Weise mit einander verbunden sind, nicht zu rechtfertigen ist.

§. 39. Ich vermisse in der Fassung, welche Lagrange dem Princip der kleinsten Wirkung giebt, die Angabe der Bedingung, dass die Verbindungen der verschiedenen Körper des Systems unter einander unveränderlich sein müssen, welche aus dem Princip der lebendigen Kräfte hervorgeht.

§. 40. Wenn Lagrange sagt, die Gleichung

$$\int \partial t S \left(\begin{matrix} P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots \\ \ldots + \delta x \partial . \frac{\partial x}{\partial t^2} + \delta y \partial . \frac{\partial y}{\partial t^2} + \delta z \partial . \frac{\partial z}{\partial t^2} \end{matrix} \right) m = 0$$

gelte für alle möglichen Variationen, so ist dieser Ausdruck allerdings zu unbestimmt; aber er ist richtig, sobald man ihn nur auf die vermöge der Bedingungsgleichungen möglichen Variationen bezieht.

Die Unterdrückung des Integralzeichens $\int$ bedarf keiner weiteren Rechtfertigung, indem die Differentiation der Gleichung des Maximums oder Minimums stets ausführbar ist, wohl aber die Division der differenziirten Gleichung durch ∂t dadurch, dass ∂t eine ganz willkührliche, aber von Null verschiedene, unendlich kleine Grösse ist.

Uebrigens kommt es Lagrange nur darauf an, zu beweisen, dass die Gleichung

$$S \left(\begin{matrix} P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \ldots \\ \ldots + \delta x \partial . \frac{\partial x}{\partial t^2} + \delta y \partial . \frac{\partial y}{\partial t^2} + \delta z \partial . \frac{\partial z}{\partial t^2} \end{matrix} \right) m = 0$$

für jeden Augenblick gilt. Mir scheint es, dass er sie wegen dieser Eigenschaft eine **unbestimmte** Gleichung nennt.

§. 42. Eine genauere Betrachtung des Integrals $\int \partial t\, S m u^2$ zeigt, dass das Princip der kleinsten Wirkung sich auf folgenden Ausdruck bringen lässt: das Integral des Productes aus dem Element der Zeit in die Summe der augenblicklichen lebendigen Kräfte aller Körper, von dem Augenblicke an genommen, wo die Körper von den gegebenen Anfangspunkten ausgehen, bis zu dem, wo sie an anderen gegebenen Punkten anlangen, ist ein Maximum oder Minimum.

Es erhellet hieraus, dass die Benennung: **Princip der grössten oder kleinsten lebendigen Kraft** auch nicht recht passend ist.

Vierter Abschnitt.

§. 1. Der Vortheil der hier angewandten Methode der Transformation der Variablen besteht namentlich darin, dass die Variationen der neu eingeführten Variablen vom Integralzeichen S unabhängig werden, indem man letztere so auswählt, dass deren Variationen für alle Körper des Systems identisch sind.

§. 2. Eine Vergleichung mit §. 3. des zweiten Abschnitts zeigt, dass **Lagrange** mit Unrecht von den Kräften $m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, $m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, $m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ behauptet, sie rühren nur von der Trägheit der Körper des Systems her.

§. 6. Betrachtet man das erste Glied der Gleichung

$$A\delta x + B\delta y + C\delta z + \ldots\ldots - A'\delta\xi - B'\delta\psi - C'\delta\varphi - \ldots\ldots = \partial Z' - \partial Z$$

genauer, so sieht man, dass es zwar ebenfalls Differentiale mit der Charakteristik ∂ in sich enthält, aber kein genaues Differential ist.

§. 7. Es erhellet leicht, dass die umgewandelte Grösse nur unter der Voraussetzung richtig ist, dass die Variationen $\delta\xi$, $\delta\psi$, $\delta\varphi$ u. s. w. vom Integralzeichen S unabhängig sind.

§. 10. Wenn man keine Variablen anwenden kann oder will, deren Variationen vom Integralzeichen S unabhängig sind, so bleibt nichts übrig, als unbestimmte partikuläre Gleichungen der Bewegung zu bilden, welche für jeden einzelnen Körper des

Systems gelten, und diese mit den Bedingungsgleichungen zu combiniren, entweder mittelst der Eliminationsmethode oder mittelst der Methode der Multiplicatoren.

§. 14. Am Ende des ersten Absatzes dieses Paragraphen müsste es heissen:

Quoique nous ayons déjà montré comment ce principe résulte de notre formule générale de la Dynamique (sect. III., art. 34.), il ne sera pas inutile de faire voir que les équations particulières déduites de cette formule fournissent toujours une équation intégrable dont l'intégrale contient le principe de la conservation des forces vives. statt: Quoique nous ayons déjà montré .... fournissent toujours une équation intégrable, qui est celle de la conservation des forces vives.

Wenn die Grössen T, L, M u. s. w. auch die Variable t enthielten, so würde dadurch weder die Bildung der Differentiale ∂T, ∂L, ∂M u. s. w., noch die Integration der Gleichung verhindert werden; wohl aber wird dadurch, dass V nicht existirt, die Bildung der Gleichung unmöglich, welche das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte liefert.

§. 15. Die vollständige Variation von F ist:

$$\frac{\delta F}{\delta x}\delta x + \frac{\delta F}{\delta y}\delta y + \ldots.$$

Weil aber $\delta x = \alpha x$, $\delta y = \alpha y$ u. s. w., so wird obiger Ausdruck:

$$\frac{\delta F}{\delta x}\alpha x + \frac{\delta F}{\delta y}\alpha y + \ldots.$$

Wenn α unendlich klein gesetzt wird, so muss δF unendlich klein sein, so dass es $= n\alpha F$ wird, mit Vernachlässigung der Glieder, welche höhere Potenzen von α enthalten.

Note VI., von Bertrand.

II.

Der Werth von Q_m als Function von U ist:

$$Q_m = \frac{\partial . \Sigma U}{\partial q_m},$$

und man hat folglich:

$$H = \Sigma U - T.$$

$-U$ entspricht dem, was Lagrange Πm nennt, und $-\Sigma U$ der Function V.

Da bei Lagrange

$$H = T + V$$

ist, so hat H in dieser Note von Bertrand denselben Werth, wie $-H$ in der Mécanique analytique.

III.

In dem am Ende von §. III. befindlichen Satze ist zu lesen: On peut remarquer que les équations qui composent la deuxième ligne du groupe (8) forment un système à part, dans lequel ne figurent pas $p_1, p_2, \ldots. p_k$, et permettent, par conséquent, de calculer les inconnues $q_1, q_2, \ldots. q_k$ en fonction du temps et de toutes les valeurs initiales $(q_1)_0, (q_2)_0, \ldots. (q_k)_0, (p_1)_0, (p_2)_0, \ldots. (p_k)_0$. statt: On peut remarquer que les équations qui composent la première ligne du groupe (8) forment un système à part, dans lequel ne figurent pas $p_1, p_2, \ldots. p_k$, et qui permettent, par conséquent, de calculer les inconnues $q_1, q_2, \ldots. q_k$ en fonction du temps et de toutes les valeurs initiales $(q_1)_0, (q_2)_0, \ldots. (q_k)_0, (p_1)_0, (p_2)_0, \ldots. \ldots. (p_k)_0$.

IV.

Die Gleichung (2) wird durch die Substitution von $\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots. \ldots. \frac{\partial S}{\partial q_k}$ in die Functionen $\frac{\partial q_1}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial p_1}, \frac{\partial q_2}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial p_2}, \ldots. \frac{\partial q_k}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial p_k}$ eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, nicht aber zweiten Grades rücksichtlich der partiellen Differentialquotienten von S.

Die Gleichungen (16) sind:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial p_2}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial q_2}, \ldots., \quad \frac{\partial p_k}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial q_k};$$

folglich auch:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{\partial (U - T)}{\partial q_1} = \frac{\partial H}{\partial q_1}.$$

V.

Das Zeichen δ in dem Werthe von δV bezieht sich auf die Variation aller Constanten, welche in $q_1', q_2', \ldots. q_n', p_1, p_2, \ldots. p_n$ enthalten sind.

H ist constant zufolge des Princips der Erhaltung der lebendigen Kräfte, also δH von t unabhängig.

Auffallend ist, dass **Bertrand** nur ein Theorem von **Hamilton** mittheilt.

Fünfter Abschnitt.

§. 3. V ist nur Function von ξ, ψ, φ u. s. w., wenn die Kräfte nach fixen Centren oder nach Körpern desselben Systems hin wirken, und Functionen der Entfernungen von den Centren sind. Ohne die Erfüllung dieser Bedingungen giebt es überhaupt keine Function V nach den Feststellungen des §. 9. des vorigen Abschnitts.

§. 4. δ bezieht sich hier einzig auf die Variationen der willkührlichen Constanten, welche in den Werthen der Variablen ξ, ψ, φ u. s. w., ξ', ψ', φ' u. s. w., von welchen Z Function ist, enthalten sind.

§. 7. Wenn man in den Ausdruck

$$\Delta\xi\delta.\frac{\partial T}{\partial\xi'}+\Delta\psi\delta.\frac{\partial T}{\partial\psi'}+\Delta\varphi\delta.\frac{\partial T}{\partial\varphi'}+\ldots.$$

$$-\delta\xi\Delta.\frac{\partial T}{\partial\xi'}-\delta\psi\Delta.\frac{\partial T}{\partial\psi'}-\delta\varphi\Delta.\frac{\partial T}{\partial\varphi'}-\ldots.$$

die aus irgend einer Aufgabe der Dynamik abgeleiteten Werthe der Variablen ξ, ψ, φ u. s. w., ξ', ψ', φ' u. s. w., welche als Functionen von t und den willkührlichen Constanten ausgedrückt sind, substituirt, so verschwindet die Variable t von selbst, wie immer die Variationen der willkührlichen Constanten in den mit den Charakteristiken δ und Δ versehenen Grössen beschaffen sein mögen.

T ist der halbe Werth der lebendigen Kraft des ganzen Systems.

§. 10. Mir scheint die Bemerkung **Bertrand**'s zu diesem Paragraphen nicht nur überflüssig, sondern selbst ungenau. Er sagt, $\delta\xi$, $\delta\psi$, $\delta\varphi$ u. s. w. bezeichnen die Variationen der Functionen, welche die willkührlichen Constanten ersetzen und welche in jedem Probleme vollkommen bestimmt sind, so dass ihr Werth eine Function der Zeit ist, deren Variation nichts Willkührliches hat. $\delta\xi$, $\delta\psi$, $\delta\varphi$ u. s. w. bezeichnen die Variationen der Functionen ξ, ψ, φ u. s. w. doch nur, insofern man blos die Veränderlichkeit der willkührlichen Constanten berücksichtigt; und nur, indem man die Variation der Zeit vernachlässigt, kann man sagen,

dass diese Variationen nichts Willkührliches in sich enthalten, weil sie nämlich gleich Null werden.

§. 13. Wenn ξ, ψ, φ u. s. w. als Functionen von α, β, γ u. s. w., α', β', γ' u. s. w. und t gegeben sind, so kann man sie auch als Functionen von α, β, γ u. s. w., λ, μ, ν u. s. w. und t darstellen.

Sei z. B.

$$\xi = \alpha + \alpha' t, \quad \psi = \beta + \beta' t, \quad \varphi = \gamma + \gamma' t;$$

$$T = \xi\psi\varphi\xi'\psi'\varphi';$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi'} = \xi\psi\varphi\psi'\varphi', \quad \text{also} \quad \lambda = \alpha\beta\gamma\beta'\gamma';$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi'} = \xi\psi\varphi\xi'\varphi', \quad ,, \quad \mu = \alpha\beta\gamma\alpha'\gamma';$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \xi\psi\varphi\xi'\psi', \quad ,, \quad \nu = \alpha\beta\gamma\alpha'\beta';$$

so hat man:

$$\xi = \alpha + t\sqrt{\frac{\mu\nu}{\alpha\beta\gamma\lambda}}, \quad \psi = \beta + t\sqrt{\frac{\lambda\nu}{\alpha\beta\gamma\mu}}, \quad \varphi = \gamma + t\sqrt{\frac{\lambda\mu}{\alpha\beta\gamma\nu}}.$$

§. 22. Die Gleichungen des §. 8. sind unvollständig, da zu dem ersten Gliede ein Ausdruck addirt werden muss. Daher ist auch die Gleichung

$$T + V = H + \int\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\partial\xi + \frac{\partial\Omega}{\partial\psi}\partial\psi + \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi}\partial\varphi + \ldots\right)$$

unvollständig. Sie wird aber richtig, wenn man H und die in den Werthen von T und V enthaltenen willkührlichen Constanten als veränderlich betrachtet; und da für den Fall der Abwesenheit störender Kräfte

$$\partial(T + V) = \partial H = 0$$

ist, so muss, wenn störende Kräfte da sind, ebenfalls

$$\partial(T + V) = 0, \quad \text{(vergl. §. 10.)},$$

also

$$-\partial H = \frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\partial\xi + \frac{\partial\Omega}{\partial\psi}\partial\psi + \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi}\partial\varphi + \ldots$$

sein; und da $-H$ als willkührliche Constante in $+H$ umgeändert werden kann.

$$\partial H = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \partial \xi + \frac{\partial \Omega}{\partial \psi} \partial \psi + \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \partial \varphi + \ldots$$

§. 24. T bezeichnet auch hier die Hälfte der lebendigen Kraft des Systems.

Uebrigens kommen die Eigenschaften, welche in diesem Abschnitte an der Function T aufgefunden worden sind (§. 7., §. 24.), ebenso der Function $2T$ zu.

Note VII., von Bertrand.

I.

Das zweite Glied der Gleichung (5) ist $=0$, weil die Indices i und i' unter einander vertauscht werden können.

Ganz unverständlich ist mir übrigens folgender Satz: Si l'on déduit des équations (8), (9), (10), (11) les valeurs de $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial p_{i'}}$, $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial q_{i'}}$, $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \beta}{\partial p_{i'}}$, $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \beta}{\partial q_{i'}}$ pour toutes les valeurs de l'indice i', et qu'on les reporte dans l'équation (5) que nous voulons démontrer, on obtiendra une identité (?).

II.

Wenn

$$A = F_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2k}) = F_1(\alpha, \beta, \ldots, \varkappa;\ \beta, \gamma, \ldots, \lambda),$$
$$B = F_2(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2k}) = F_2(\alpha, \beta, \ldots, \varkappa;\ \beta, \gamma, \ldots, \lambda)$$

ist, so ist

$$(A, B) = \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \frac{\partial F_2}{\partial \beta} - \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} - \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \frac{\partial F_2}{\partial \beta} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\partial F_1}{\partial \varkappa} \frac{\partial F_2}{\partial \lambda} - \frac{\partial F_1}{\partial \lambda} \frac{\partial F_2}{\partial \varkappa},$$

aber man sieht nicht ein, wie

$$(A, B) = (\alpha, \beta)\left(\frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \frac{\partial F_2}{\partial \beta} - \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \frac{\partial F_2}{\partial \alpha}\right) + (\alpha, \gamma)\left(\frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} - \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \frac{\partial F_2}{\partial \alpha}\right)$$
$$+ \ldots + (\beta, \gamma)\left(\frac{\partial F_1}{\partial \beta} \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} - \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \frac{\partial F_2}{\partial \beta}\right) + \ldots + (\eta, \lambda)\left(\frac{\partial F_1}{\partial \eta} \frac{\partial F_2}{\partial \lambda} - \frac{\partial F_1}{\partial \lambda} \frac{\partial F_2}{\partial \eta}\right)$$

sein kann.

III.

Der Beweis dieses Lehrsatzes ist zu vag.

IV.

Es bliebe zu beweisen übrig, dass die beiden Fälle, in welchen der Poisson'sche Lehrsatz illusorische Resultate giebt, mittelst des in §. III. bewiesenen Lehrsatzes innig verknüpft worden sind.

Die Gleichung, welche ausdrückt, dass β ein Integral ist, hat folgende Form:

$$\frac{\partial\beta}{\partial t}+\Sigma\frac{\partial\beta}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}-\frac{\partial\beta}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}=0;$$

Bertrand vernachlässigt das Glied $\frac{\partial\beta}{\partial t}$ ohne Weiteres.

In dem Beweise des Lehrsatzes, welcher den eigentlichen Gegenstand dieses Paragraphen ausmacht, ist auf S. 427. zu lesen: Si μ est moindre que $2k-2$, il existera des intégrales indépendantes de celles là, ainsi que de α et de β_1. statt: Si $\mu+1$ est moindre que $2k-2$, il existera des intégrales etc.

Der Beweis dieses Lehrsatzes ist übrigens vielfach ungenau: namentlich wird vorausgesetzt, aber nicht bewiesen, dass es μ Integrale giebt, welche von α und β_1 verschieden sind, und mit α combinirt der Poisson'schen Gleichung die Form $0=0$ geben; ferner werden die beiden verschiedenen Fälle eines identisch constanten Integrals und eines solchen, welches Function der vorhergehenden ist, als identisch betrachtet.

Sechster Abschnitt.

§. 1. Der letzte Satz des ersten Absatzes dieses Paragraphen: La même chose aura lieu etc. fiele am besten weg: als Erläuterung aber müsste er anders gestaltet werden.

Die Ausdrücke

$$x=a+a1\xi+a2\psi+a3\varphi+\dots+a'1\xi^2+\dots,$$

$$y=b+b1\xi+b2\psi+b3\varphi+\dots+b'1\xi^2+\dots,$$

$$z=c+c1\xi+c2\psi+c3\varphi+\dots+c'1\xi^2+\dots$$

gelten für jeden Körper m des Systems; es haben also z. B. x', x'', x''' u. s. w. denselben Werth, wie x. Vergl. den folgenden Paragraphen.

§. 3. Aus den Gleichungen $V=H$ und $T=0$, welche für den Zustand des Gleichgewichts gelten, erhellet, dass die Verbindung der einzelnen Körper des Systems unabhängig von t gedacht wird, was im Zustande des Gleichgewichts offenbar stattfinden muss. Es findet aber nach §. 1. auch im Zustande der Bewegung statt.

Die Differentialgleichungen der Bewegung müssen auch für den Zustand des Gleichgewichts gelten: denn man hat für letzteren $\partial V=0$, und nach Abschnitt II. des ersten Theils, §. 13.:

$$\frac{\delta V}{\delta \xi}=0, \quad \frac{\delta V}{\delta \psi}=0, \quad \frac{\delta V}{\delta \varphi}=0, \ldots;$$

folglich ist es nur nöthig, dass $\partial . \frac{\delta T}{\delta \partial \xi}$, $\partial . \frac{\delta T}{\delta \partial \psi}$, $\partial . \frac{\delta T}{\delta \partial \varphi}, \ldots$, Null werden, was wegen $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}=0$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}=0$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}=0, \ldots$ wirklich stattfindet. Lagrange's Grund: puisque le système y étant une fois, y resterait toujours de lui-même, ist nichts anderes, als der Ausdruck in Worten für die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}=0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}=0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}=0, \ldots$$

§. 4. Im zweiten Absatze dieses Paragraphen muss offenbar gelesen werden: et il n'est pas difficile de voir, par les formules générales d'élimination, que la résultante en k sera d'un degré égal au nombre des équations, et, par conséquent, égal à celui des équations différentielles proposées; statt: et il n'est pas difficile de voir, par les formules générales d'élimination, que la résultante en k sera d'un degré égal à celui des équations etc.

Um die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}+k\xi=0$$

integriren zu können, muss man $\xi=f(t)$ setzen. Man kann hierzu, wie Lagrange, $f(t)=E\sin(t\sqrt{k}+\varepsilon)$ wählen; aber man könnte noch einfacher auch $f(t)=\sin(t\sqrt{k})$ oder $f(t)=\cos(t\sqrt{k})$ setzen, mit Hinweglassung der willkührlichen Constanten.

Dass man die Grössen

$$\frac{[1]+[1,2]f+[1,3]g+\ldots}{(1)+(1,2)f+(1,3)g+\ldots},\quad \frac{[2]f+[1,2]+[2,3]g+\ldots}{(2)f+(1,2)+(2,3)g+\ldots},$$

$$\frac{[3]g+[1,3]+[2,3]f+\ldots}{(3)g+(1,3)+(2,3)f+\ldots},\ \ldots,$$

einander gleichsetzen, mit k bezeichnen, und aus diesen Gleichungen die n verschiedenen Werthe von k, von f, von g u. s. w. bestimmen muss, ergiebt sich aus der Beschaffenheit der Differentialgleichungen der Bewegung (§. 3.): denn nur die hiernach bestimmten Werthe von ξ, ψ, φ u. s. w. (§. 4.) genügen denselben.

§. 6. Der Differentialquotient von $\frac{2K\partial^2K-\partial K^2}{\partial f^2}$ nach f ist $\frac{2K\partial^3K}{\partial f^3}=0$.

§. 7. Lagrange behauptet, dass, wenn eine von den Wurzeln k', k'' u. s. w. imaginär wird, reelle Exponentialgrössen an die Stelle der entsprechenden Sinusse oder Cosinusse treten. Setzt man z. B. $k'=\sqrt{-1}$, so wird:

$$\cos(t\sqrt{k'}+\varepsilon)=\frac{e^{t\sqrt[4]{-1}+\varepsilon\sqrt{-1}}}{2}+\frac{1}{2e^{t\sqrt[4]{-1}+\varepsilon\sqrt{-1}}}$$

$$=\frac{e^{t\sqrt[4]{-1}}}{2}\left[1-\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^4}{24}-\ldots+\varepsilon\sqrt{-1}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{6}+\ldots\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2e^{t\sqrt[4]{-1}}\left[1-\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^4}{24}-\ldots+\varepsilon\sqrt{-1}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{6}+\ldots\right)\right]},$$

$$\sin(t\sqrt{k'}+\varepsilon)=\frac{e^{t\sqrt[4]{-1}+\varepsilon\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}-\frac{1}{2\sqrt{-1}\,e^{t\sqrt[4]{-1}+\varepsilon\sqrt{-1}}}$$

$$=\frac{e^{t\sqrt[4]{-1}}}{2\sqrt{-1}}\left[1-\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^4}{24}-\ldots+\varepsilon\sqrt{-1}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{6}+\ldots\right)\right]$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{-1}\,e^{t\sqrt[4]{-1}}\left[1-\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^4}{24}-\ldots+\varepsilon\sqrt{-1}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{6}+\ldots\right)\right]},$$

wo die Exponentialgrössen imaginär sind.

§. 8. **Aus der Formel**

$$T = S\left(\frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{2\partial t^2}\right)m$$

geht, da $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$ stets reell sind, nothwendig hervor, dass T stets positiv ist. Da nun A aus T entsteht, indem man in dem in §. 2. gegebenen Werthe von T die Differentialquotienten $\frac{\partial \xi}{\partial t}$, $\frac{\partial \psi}{\partial t}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ u. s. w. in 1, f, g u. s. w. verwandelt, d. h. indem man T durch $\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2$ dividirt, so folgt, dass auch A nothwendig positiv ist, weil $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ nothwendig stets reell ist. Hingegen ist es falsch, zu sagen, dass T in dem Werthe des §. 2. aus der Summe mehrerer Quadrate, welche mit positiven Coefficienten versehen sind, bestehe: dies gilt nur von dem ersten Theile dieser Grösse; der zweite dagegen enthält f, g u. s. w. und Producte aus je zweien derselben, multiplicirt mit positiven oder negativen Coefficienten. Es ist also auch falsch, zu sagen, dass A nothwendig stets positiv ist, wenn f, g u. s. w. reelle Grössen sind.

Die Grösse B ist nothwendig positiv, wenn die darin befindlichen Coefficienten dasselbe Vorzeichen haben, wie die entsprechenden Coefficienten von A; ist dies nicht der Fall, so kann sie negativ werden. Da die Coefficienten constante Grössen sind, so folgt, dass, wenn B positiv ist, und die darin befindlichen Coefficienten dasselbe Vorzeichen haben, wie die entsprechenden Coefficienten von A, die n verschiedenen Werthe von B alle positiv sind, was mithin ebenso von den n verschiedenen Werthen von k gilt. Stimmen die in B befindlichen Coefficienten mit den entsprechenden Coefficienten in A hinsichtlich des Vorzeichens nicht durchaus überein, so können die n verschiedenen Werthe von B, folglich auch von k, entweder alle negativ, oder positiv, oder ein Theil positiv, ein Theil negativ sein. Nur wenn alle Werthe von k positiv sind, ist die Auflösung anwendbar.

Da die Variablen ξ, ψ, φ u. s. w. nothwendig stets reell sind, so sind auch f, g u. s. w. nothwendig stets reell; und da die constanten Coefficienten in B nothwendig reell sind, so ist B selbst, mithin auch k stets reell. Imaginäre Wurzelwerthe von k können also nur scheinbar sein.

§. 9. Im ersten Absatze dieses Paragraphen kann hinter den

Worten: „Or, comme l'on a $V = H + V'$, et que V' ne contient les variables ξ, ψ, φ etc., qu'à la seconde dimension, il s'ensuit que V sera un minimum ou un maximum“ zugesetzt werden: „dans l'état d'équilibre,“.

Wenn V im Zustande des Gleichgewichts ein Maximum ist, so ist V', also auch B stets negativ, und alle Werthe von k sind folglich auch negativ; daher enthalten die Werthe der Variablen ξ, ψ, φ u. s. w. nur solche Glieder, wo t ausserhalb des Sinus- und Cosinuszeichens steht, und das Gleichgewicht kann nicht stabil sein.

§. 10. Wenn V im Zustande des Gleichgewichts weder Maximum, noch Minimum ist, so sind einige von den Werthen von $\sqrt{k}$ nothwendig imaginär; von den übrigen reellen können einige gleich sein. Dann enthalten die entsprechenden Glieder der Werthe von ξ, ψ, φ u. s. w. reelle Exponentialgrössen von t und algebraische Potenzen des Kreisbogens; und das Gleichgewicht kann nur bedingungsweise stabil werden, wenn die Coefficienten dieser Glieder Null werden, was vom Initialzustande des Systems abhängt.

§. 11. Die sehr kleinen Excursionen der verschiedenen Körper des Systems sind in §. 1. mit α, β, γ bezeichnet worden, wo man α, β, γ als die respectiven Excursionen eines jeden derselben nach den Richtungen der Axen der x, y, z betrachten muss. Man hat für α den Werth:

$$\alpha = a1\xi + a2\psi + a3\varphi + \ldots + a'1\xi^2 + \ldots = (a1 + a2f' + a3g')E'\sin(\pi + \varepsilon')$$
$$+ (a1 + a2f'' + a3g'')E''\sin(\pi + \varepsilon'') + (a1 + a2f''' + a3g''')E'''\sin(\pi + \varepsilon''')$$
$$+ \ldots + (a'1 + a'2f'^2 + a'3g'^2)E'^2\sin^2(\pi + \varepsilon') + \ldots$$

und für β und γ ganz analoge Werthe. Der Ausdruck für eine ganze geradlinige Schwingung jedes Körpers m des Systems ist also:

$$2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$
$$= 2\sqrt{[(A'^2 + B'^2 + C'^2)E'^2\sin^2(\pi + \varepsilon') + (A''^2 + B''^2 + C''^2)E''^2\sin^2(\pi + \varepsilon'')}$$
$$+ 2(A'A'' + B'B'' + C'C'')E'E''\sin(\pi + \varepsilon')\sin(\pi + \varepsilon'')$$
$$+ (A'''^2 + B'''^2 + C'''^2)E'''^2\sin^2(\pi + \varepsilon''')$$
$$+ 2(A'A''' + B'B''' + C'C''')E'E'''\sin(\pi + \varepsilon')\sin(\pi + \varepsilon''')$$
$$+ 2(A''A''' + B''B''' + C''C''')E''E'''\sin(\pi + \varepsilon'')\sin(\pi + \varepsilon''') + \ldots],$$

wo

$$A' = a1 + a2f' + a3g', \quad B' = b1 + b2f' + b3g', \ldots$$
$$A'' = a1 + a2f'' + a3g'', \quad B'' = b1 + b2f'' + b3g'', \ldots$$

. . . .

ξ, ψ, φ u. s. w. bezeichnen halbe Schwingungen eines oder mehrerer Körper des Systems, mittelst deren die halben Schwingungen sämmtlicher Körper bestimmt werden. Von 2ξ, 2ψ, 2φ kann gesagt werden, dass sie als aus einfachen Schwingungen, welche denen der Pendel von den Längen $\frac{g}{k'}$, $\frac{g}{k''}$, $\frac{g}{k'''}$ u. s. w. analog sind, zusammengesetzt angesehen werden können: aber nicht von den Schwingungen jedes Körpers m des Systems, wie obiger Ausdruck für $2\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$ zeigt, in welchem nur auf die ersten Potenzen von ξ, ψ, φ u. s. w. in den Werthen von α, β, γ Rücksicht genommen worden ist; auch nicht von 2α, 2β, 2γ.

Alle Folgerungen, welche Lagrange in diesem Paragraphen aus seiner Behauptung zieht, sind mithin falsch, wie schon Bertrand, in einer anderen Beziehung, bemerkt hat.

§. 12. Wenn die Werthe der Grössen $\sqrt{k'}$, $\sqrt{k''}$, $\sqrt{k'''}$ u. s. w. incommensurabel sind, so sind es auch die Schwingungszeiten, und der Körper, welcher die Excursionen ξ macht, kann nur in dem Falle wieder in seine frühere Lage zurückkehren, wenn die Coefficienten E', E'', E''' u. s. w. alle, mit Ausnahme eines einzigen, Null sind.

§. 13. Wenn in der Bedingungsgleichung $L=0$ die Glieder der ersten Dimension fehlen, so ist nicht nur $A=0$, sondern auch jeder seiner ersten partiellen Differentialquotienten.

Wenn man die in diesem Paragraphen angegebene Methode der Lösung von Aufgaben, welche Bedingungsgleichungen enthalten, in denen die Glieder der ersten Dimension fehlen, anwendet, so erhält man Differentialgleichungen von derselben Form, wie in §. 4., mit dem Unterschiede jedoch, dass sie die unbestimmten Coefficienten λ, μ u. s. w. enthalten. Lagrange schlägt vor, diese zu eliminiren oder zu bestimmen, wenn sie als constant angesehen werden können; da man aber nur so viel Gleichungen hat, als unbekannte Grössen k, f, g u. s. w., so ist es schwer, einzusehen, wie hier eine Elimination oder Bestimmung von λ, μ u. s. w. möglich sein soll.

§. 14. Es ist sonderbar, dass Lagrange, indem er die Kraft Φ als von einem Körper zum anderen variabel betrachtet, nicht

auf die Ursache dieser Veränderlichkeit zurückgeht, sondern äusserlich Φ als eine Function der Zahl jedes Körpers in der Reihe ansieht. Offenbar ist Φ auch Function der Masse der sich anziehenden oder abstossenden Körper; und indem man nur die Wirkung der zunächst an einander gelegenen Körper in Betracht zieht, und die der von einander entfernteren wegen ihrer Kleinheit vernachlässigt, hat man:

$$V = S\Pi D\dot{m} + S_1 DmDm \int \Phi \partial Ds,$$

wo ${}_1DmDm$ das Product der Massen zweier zunächst gelegenen Körper vorstellt.

§. 16. Der Werth des vollständigen Integrals SyD^2x ist:

$$SyD^2x = y_i Dx_i - x_{,i} Dy_i - y_0 Dx_0 + x_{,0} Dy_0 + Sx_{,,} D^2 y.$$

§. 19. Dx, Dy, Dz sind Elemente von Linien. a, b, c sind in der Zeit constant, aber im Raume veränderlich, weil sie die Coordinaten der verschiedenen Körper des Systems für die Lage des Gleichgewichts sind. Daher kann man sie nicht nach ∂, wohl aber nach D differenziiren. ξ, η, ζ dagegen sind sowohl in der Zeit, wie im Raume veränderlich; sie können also ebensowohl nach ∂, als nach D, differenziirt werden. Die Werthe von Dx, Dy, Dz sind mithin $Da + D\xi$, $Db + D\eta$, $Dc + D\zeta$.

Φ kann, als Function von Ds, $= Ds^n$ gesetzt werden; also

$$\Phi = Ds^n = (Df + \alpha)^n = Df^n + n\alpha Df^{n-1} = F + \frac{F'}{Df}\alpha,$$

indem man die sehr kleine Grösse $\frac{Da}{Df}D\xi + \frac{Db}{Df}D\eta + \frac{Dc}{Df}D\zeta$ mit α bezeichnet und deren zweite und höhere Potenzen vernachlässigt. Folglich ist

$$\frac{\Phi}{Ds} = Ds^{n-1} = (Df + \alpha)^{n-1} = Df^{n-1} + (n-1)\alpha Df^{n-2} = \frac{F}{Df} + \frac{F' - F}{Df^2}\alpha.$$

§. 21. Man kann den Gleichungen dieses Paragraphen nach der Anmerkung zu §. 14. folgende Form geben:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} Dm + \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial a^2}\xi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a \partial b}\eta + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a \partial c}\zeta\right) Dm$$

$$- {}_1DmDmD_1 \left[\frac{FD\xi}{Df} - Ga'\left(\frac{a'D\xi}{Df} + \frac{b'D\eta}{Df} + \frac{c'D\zeta}{Df}\right)\right] = 0,$$

wo ${}_1DmDm$ das Product aus der Masse des beliebigen Körpers

Dm in die Masse des zunächst vorhergehenden $_1Dm$ vorstellt. Daher kann man obige Gleichung auch so schreiben:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+\frac{\partial^2\Pi}{\partial a^2}\xi+\frac{\partial^2\Pi}{\partial a\partial b}\eta+\frac{\partial^2\Pi}{\partial a\partial c}\zeta$$

$$-{}_1DmD_1\left[\frac{FD\xi}{Df}-Ga'\left(\frac{a'D\xi}{Df}+\frac{b'D\eta}{Df}+\frac{c'D\zeta}{Df}\right)\right]=0,$$

wo sich der Coefficient $_1Dm$ auf die Masse des vorgehenden Körpers bezieht, verglichen mit dem Körper, auf welchen sich die in den anderen Gliedern enthaltenen Grössen beziehen.

Die beiden anderen Gleichungen werden ebenso behandelt.

§. 22. Wegen des in der Anmerkung zu §. 14. gegebenen Werthes von V erhält man folgenden Werth von F:

$$F=$$

$$\sqrt{[S(\frac{\partial\Pi}{\partial a}\cdot\frac{1}{_1Dm})+A]^2+[S(\frac{\partial\Pi}{\partial b}\cdot\frac{1}{_1Dm})+B]^2+[S(\frac{\partial\Pi}{\partial c}\cdot\frac{1}{_1Dm})+C]^2}.$$

Wenn dagegen die Entfernungen Ds gegeben und unveränderlich sind, so hat λ den Werth:

$$\sqrt{(S\frac{\partial\Pi}{\partial a}Dm+A)^2+(S\frac{\partial\Pi}{\partial b}Dm+B)^2+(S\frac{\partial\Pi}{\partial c}Dm+C)^2}.$$

§. 23. Die unabhängigen Variablen ξ, ψ, φ u. s. w. in §. 4. sind blos in der Zeit veränderlich, und werden daher alle blos mittelst ξ und Constanten bestimmt. Dagegen bezeichnen ξ, η, ζ in diesem Paragraphen, wie α, β, γ in §. 1., die Excursionen der verschiedenen Körper des Systems nach den Richtungen der Axen der x, y, z, und sind also in der Zeit, wie im Raume, veränderlich; sie können also als Producte einer blossen Function von t und einer nur im Raume veränderlichen Grösse dargestellt werden.

§. 24. Die erste Gleichung des vorigen Paragraphen mit X, Y, Z liefert beim Entwickeln der Differenzen, wenn die Coefficienten constant sind:

$$(k-\frac{\partial^2\Pi}{\partial a^2})\frac{X}{_1Dm}-\frac{\partial^2\Pi}{\partial a\partial b}\frac{Y}{_1Dm}-\frac{\partial^2\Pi}{\partial a\partial c}\frac{Z}{_1Dm}=\frac{F-Ga'^2}{Df}(X_1-2X+{}_1X)$$

$$-\frac{Ga'b'}{Df}(Y_1-2Y+{}_1Y)-\frac{Ga'c'}{Df}(Z_1-2Z+{}_1Z);$$

wenn die Coefficienten aber veränderlich sind:

$$(k-\frac{\partial^2\Pi}{\partial a^2})\frac{X}{{}_1Dm}-\frac{\partial^2\Pi}{\partial a\partial b}\frac{Y}{{}_1Dm}-\frac{\partial^2\Pi}{\partial a\partial c}\frac{Z}{{}_1Dm}=\frac{F-Ga'^2}{Df}(X_1-X)$$

$$+{}_1\left(\frac{F-Ga'^2}{Df}\right)({}_1X-X)-\frac{Ga'b'}{Df}(Y_1-Y)-{}_1\left(\frac{Ga'a'}{Df}\right)({}_1Y-Y)$$

$$-\frac{Ga'c'}{Df}(Z_1-Z)-{}_1\left(\frac{Ga'c'}{Df}\right)({}_1Z-Z).$$

Die Werthe von X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1} sind von der Form:

$$AX_0+BY_0+CZ_0+A'X_1+B'Y_1+C'Z_1,$$

wo A, B, C rationale, ganze Functionen des $(n-1)$sten Grades von k sind, und A', B', C' eben solche Functionen vom $n$ten Grade.

Da man beim Eliminiren der Grössen X_1, Y_1, Z_1 aus den drei linearen Gleichungen von der Form $A'X_1+B'Y_1+C'Z_1=0$ eine Gleichung auf k vom $3n$ten Grade erhält, so kann man den Werth dieser Grössen aus diesen Gleichungen nur bestimmen, wenn eine derselben als gegeben betrachtet wird.

§. 25. Auch hier haben die vollständigen Integrale ξ_1, ξ_2 u. s. w., η_1, η_2 u. s. w., ζ_1, ζ_2 u. s. w. doppelt so viel willkührliche Constanten E', E'' u. s. w., ε', ε'' u. s. w., als die Anzahl der Variablen beträgt: nämlich bei $3n$ Variablen $6n$ willkührliche Constanten.

Lagrange sagt, es sei unmöglich, dass das System jemals wieder seine erste Lage annehme, wenn alle Werthe von k incommensurabel sind. Offenbar meint er die Werthe der Wurzeln von k (vergl. §. 12.).

Für $t=0$ sind die Werthe von $\frac{\partial\xi}{\partial t}$, $\frac{\partial\eta}{\partial t}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial t}$:

$$XE\cos\varepsilon\sqrt{k},\quad YE\cos\varepsilon\sqrt{k},\quad ZE\cos\varepsilon\sqrt{k}.$$

Wendet man das in §. 11. Absatz 3, 4, 5 Gesagte auf den hier behandelten Fall an, so reducirt es sich auf folgende Hauptsätze: Wenn in den vollständigen Werthen von ξ, η, ζ alle Coefficienten E', E'' u. s. w., mit Ausnahme eines einzigen, Null sind, so machen alle Körper des Systems in der Richtung der Axen der x, y, z einfache Schwingungen, welche denen eines und desselben Pendels analog sind; und jeder Körper ist so vieler verschiedener einfacher Schwingungen fähig, als die Anzahl der Werthe von k beträgt, also $3n$. Da aber die demselben Werthe von k entsprechenden einfachen Schwingungen der verschiedenen Körper, obwohl den einfachen Schwingungen eines und desselben Pendels analog, doch verschieden sind, wegen der verschiedenen

Werthe von X_1, X_2, X_3 u. s. w., so ist die Anzahl der verschiedenen einfachen Schwingungen aller Körper des Systems in der Richtung derselben Axe $3n^2$. Gleichzeitig aber mit den anderen kann jeder Körper des Systems nur eine einfache Schwingung machen, so dass ein und dasselbe System so vieler verschiedenen einfachen Schwingungen fähig ist, als es bewegliche Körper giebt. Im Allgemeinen aber werden alle irgend möglichen Schwingungen eines Systems nur zusammengesetzt sein können aus allen einfachen Schwingungen, welche die Natur des Systems gestattet.

§. 26. Durch einen sehr störenden Schreib- oder Druckfehler liest man am Ende dieses Paragraphen: et prenant pour E et ε différentes constantes arbitraires E_1, E_2, etc., ε_1, ε_2, etc., qui dépendent de l'état initial du système. statt: et prenant pour E et ε différentes constantes arbitraires E', E'', etc., ε', ε'', etc., qui dépendent de l'état initial du système. Am besten bliebe aber dieses Satzglied ganz weg, und es müsste dann am Anfange des folgenden Paragraphen gelesen werden: Pour déterminer de la manière la plus simple les constantes arbitraires E', E'', etc., ε', ε'' etc. qui dépendent de l'état initial du système, je reprends etc.

Man erhält nach der Anmerkung zu §. 14. folgende Gleichung:

$$\frac{\partial^2 . S(X\xi + Y\eta + Z\zeta)\dfrac{1}{{}_1Dm}}{\partial t^2} + kS(X\xi + Y\eta + Z\zeta)\frac{1}{{}_1Dm} = 0.$$

§. 28. Die Darstellung in dem ersten Absatze dieses Paragraphen lässt Lagrange's ausgezeichnete Klarheit ganz vermissen. Statt: Il est facile de voir, par la nature du calcul, que si l'on substitue dans cette équation pour k une des racines de l'équation en k que nous avons dénotées par k', k'', k''', etc. (art. 25.), on devra avoir un résultat identique avec les expressions de ξ, η, ζ de l'art. 26., de sorte qu'en substituant ces mêmes expressions dans l'équation précédente, elle devra devenir absolument identique pour toutes les valeurs de k. könnte es kurz heissen: Il est facile de voir que si l'on substitue dans cette équation les expressions de ξ, η, ζ de l'art. 26., elle devra devenir absolument identique pour toutes les valeurs de k.

§. 32. Im vierten Absatze dieses Paragraphen muss gelesen werden: Mais la valeur de F pourra varier d'un corps à lautre etc. statt: Mais la valeur de F' pourra varier d'un corps à l'autre etc.

Lagrange sagt, wenn $\frac{\partial \Pi}{\partial a} = 0$ und Da für alle auf einander folgende Körper gleich sei, so könne man F und F' aus der

Erfahrung bestimmen, ohne das Gesetz der Function Φ zu kennen; gleich darauf aber verbessert er sich, indem er sagt, dass man F' aus F nur ableiten könne, wenn man das Elasticitätsgesetz der Sehne kennt. Wenn nämlich $F = A$ ist, so ist $F' = mA$; man muss also m kennen, um F' bestimmen zu können.

§. 33. Wenn alle Körper Dm des linearen Systems unter einander gleich und schwerelos sind, so ist Φ blos als Function von Ds zu betrachten, und man hat in §. 14.:

$$V = S\Pi Dm + S\int \Phi \partial Ds,$$

und alle Formeln Lagrange's bleiben ungeändert.

§. 34. Da man hier die Bedingungsgleichung $X_0 = 0$ berücksichtigt, so muss man im vorigen Paragraphen $Dm = \frac{M}{n+2}$ setzen, wodurch die drei Gleichungen für X, Y, Z die allgemeine Form

$$\frac{lMk}{(n+1)(n+2)F'} X + D^2{}_1 X = 0$$

annehmen, also

$$\sqrt{k} = 2\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)F'}{lm}} \sin\frac{\varphi}{2}$$

wird.

Ferner wird der Werth von $\sqrt{k}$ durch Substitution von $\varphi = \frac{\varrho\pi}{n+1}$:

$$\sqrt{k} = 2\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)F'}{lM}} \sin\frac{\varrho\pi}{2(n+1)},$$

wo man für ϱ alle ganzen Zahlen von 1 bis n einschliesslich setzen kann: denn $\varrho = 0$ würde $\sqrt{k} = 0$ geben, was nicht möglich ist; auch würde $\varrho = 0$, sowie $\varrho = n+1$ für X, Y, Z den Werth Null geben, und folglich der Werth von $\sqrt{k}$ aus der Gleichung

$$\frac{lMk}{(n+1)(n+2)F'} X_r - 4\sin^2\frac{\varphi}{2} \, . \, X_r = 0$$

gar nicht mehr abgeleitet werden können. Ueber $n+1$ hinaus würden dieselben Sinusse von $\frac{\varrho\pi}{2(n+1)}$ wiederkehren, wenn gleich in umgekehrter Ordnung, und später mit entgegengesetztem Vorzeichen. Hieraus schliesst man, dass bei $\varrho = n$ die Grenze der brauchbaren Werthe von ϱ ist.

§. 35. Am Anfange dieses Paragraphen muss gelesen werden: Comme les valeurs de $\sqrt{k}$ sont incommensurables entre elles etc. statt: Comme les valeurs de k sont incommensurables entre elles etc.

Die Werthe von ξ, η, ζ sind:

$$\xi = E \sin r\varphi \sin(2\sqrt{(n+1)(n+2)}\,h't \sin\frac{\varphi}{2} + \varepsilon),$$

$$\eta = E \sin r\varphi \sin(2\sqrt{(n+1)(n+2)}\,ht \sin\frac{\varphi}{2} + \varepsilon),$$

$$\zeta = E \sin r\varphi \sin(2\sqrt{(n+1)(n+2)}\,ht \sin\frac{\varphi}{2} + \varepsilon).$$

§. 36. Das Integralzeichen S zeigt an, dass man die Summe aller Glieder nehmen muss, welche den Werthen von s, von 1 bis n, entsprechen.

Für ξ_r hat man den Werth:

$$\xi_r = \Sigma \frac{2\sin r\varphi}{n+1} \left\{ \begin{array}{l} S\alpha_s \sin s\varphi . \cos(2\sqrt{(n+1)(n+2)}\,h't \sin\frac{\varphi}{2}) \\ + S\dot{\alpha}_s \sin s\varphi . \dfrac{\sin(2\sqrt{(n+1)(n+2)}\,h't \sin\frac{\varphi}{2})}{2\sqrt{(n+1)(n+2)}\,h' \sin\frac{\varphi}{2}} \end{array} \right\},$$

und ebenso für $\frac{g}{k}$:

$$\frac{g}{k} = \frac{g}{4(n+1)(n+2)h'^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}},$$

und für $\frac{g}{k1}$ und $\frac{g}{k2}$:

$$\frac{g}{k1} = \frac{g}{k2} = \frac{g}{4(n+1)(n+2)h^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Vergl. mit dem in diesem Paragraphen Gesagten Daniel Bernoulli's Gesetz in §. 11. Man ersieht zugleich, wie Lagrange dort zu der Behauptung verführt worden ist, ein und dasselbe System sei so vieler verschiedener einfacher Schwingungen fähig, als es bewegliche Körper giebt.

§. 37. Die Betrachtungen dieses Paragraphen beziehen sich auf eine gespannte Sehne, welche mit Schwingungsknoten schwingt.

Im zweiten Absatze dieses Paragraphen muss statt: Or il est facile de voir que la formule $2\lambda(n+1)\pm r$ peut représenter tous les nombres entiers, positifs ou négatifs, en supposant r compris entre 0 et $n+1$; car ayant un nombre entier quelconque, si on le divise par $2(n+1)$ jusqu'à ce que le reste, positif ou négatif, soit moindre que $n+1$, etc. gelesen werden: Or il est facile etc. jusqu'à ce que le reste, positif ou négatif, soit moindre que $n+2$, etc.

Die Ausdrücke für die beiden Variablen η und ζ unterscheiden sich von dem für ξ nicht nur durch die Anfangswerthe β, $\dot\beta$ und γ, $\dot\gamma$, welche an der Stelle von α, $\dot\alpha$ sich befinden, sondern auch durch die Grösse h, welche h' vertritt. Vergl. §. 36.

§. 39. Die Methode des §. 34. ist hier nicht anwendbar, indem man X_r nicht $= H\sin(r\varphi + e)$ setzen darf: denn die für ξ_r, η_r, ζ_r erhaltenen Werthe würden nicht von der Mitte des Fadens, wo sie am grössten sein müssen, nach beiden festen Enden hin gleichmässig abnehmen, so dass sie in gleichen Entfernungen von der Mitte gleich wären, wie es bei entsprechenden Initialzuständen, unter der Voraussetzung der Gleichheit aller Massen Dm und aller Entfernungen Df, ganz streng stattfinden muss.

§. 40. Auch hier sind die Entfernungen Ds unveränderlich, und es tritt also der unbestimmte Coefficient λ an die Stelle der Kraft Φ. λ stellt die Spannung des Fadens vor, und ist eine in der Zeit und im Raume veränderliche Grösse. Bezeichnen wir den Werth von λ für die Lage des Gleichgewichts mit F, so ist $F = gSDm$, wo SDm von unten nach oben bis zu dem Körper, dessen Schwingungen man betrachtet, gerechnet wird, also eine Function der ziehenden Massen, und nimmt nach oben immer mehr zu. Da F am unteren Ende des Fadens $=0$ sein muss, so kann dieses gar keinen Körper tragen.

§. 41. Da weder das untere, noch das obere Ende des Fadens einen Körper trägt, so ist

$$Df = Da = \frac{l}{n+1},$$

ferner

$$SDm = rDm = \frac{rM}{n}, \quad F = \frac{grM}{n}.$$

Die Gleichung auf X des §. 39. liefert folglich:

$$\frac{lk}{g(n+1)} X_r + D[(r-1)DX_{r-1}] = 0.$$

Zur Bestimmung der n Werthe von k hat man die Gleichung:

$$1-\frac{n}{n+1}\frac{lk}{g}+\frac{n(n-1)}{4(n+1)^2}\frac{l^2k^2}{g^2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{4.9(n+1)^3}\frac{l^3k^3}{g^3}+\ldots=0.$$

§. 42. Aus der Gleichung

$$Da^2=(Da+D\xi)^2+D\eta^2+D\zeta^2$$

folgt nicht:

$$D\xi=-\frac{D\eta^2+D\zeta^2}{2Da},$$

sondern:

$$D\xi^2+2DaD\xi=-D\eta^2-D\zeta^2,$$

mithin:

$$D\xi=-Da+\sqrt{Da^2-D\eta^2-D\zeta^2},$$

und, da $D\xi=0$ ist,

$$Da=\sqrt{Da^2-D\eta^2-D\zeta^2},$$
$$Da^2=Da^2-D\eta^2-D\zeta^2,$$

folglich, da $D\eta$ und $D\zeta$ reell sind,

$$D\eta^2=0,\quad D\zeta^2=0\ ^{*)}.$$

Der Werth von Φr ist:

$$\Phi_r=[1-(r-1)\frac{lk^{(\varrho)}}{g(n+1)}+\frac{(r-1)(r-2)}{4}\left(\frac{lk^{(\varrho)}}{g(n+1)}\right)^2$$
$$-\frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{4.9}\left(\frac{lk^{(\varrho)}}{g(n+1)}\right)^3+\ldots]X_1^{(\varrho)},$$

wo X_1 als eine ganze rationale Function von k gegeben gedacht wird.

Der Werth von η_r ist:

$$\eta_r=\Sigma\left[\frac{\Phi_r S(\beta_s\Phi_s)}{S(\Phi_s)^2}\cos t\sqrt{k^{(\varrho)}}\right]+\Sigma\left[\frac{\Phi_r S(\dot\beta_s\Phi_s)}{S(\Phi_s)^2\sqrt{k^{(\varrho)}}}\sin t\sqrt{k^{(\varrho)}}\right].$$

Die Gleichung auf $k^{(\varrho)}$ kann dargestellt werden durch:

$$\frac{\Phi(n+1)}{X_1^{(\varrho)}}=0.$$

§. 43. Wenn man die Formel des vorigen Paragraphen:

$$D\xi=-\frac{D\eta^2+D\zeta^2}{2Da}$$

---

*) Ich würde hier und anderwärts Einiges zu bemerken haben, wenn ich mich nicht bei dieser Abhandlung absichtlich aller Bemerkungen enthalten wollte, alles Weitere dem Leser anheim stellend. G.

als richtig ansieht, so folgt daraus:

$$\xi = A - S\frac{D\eta^2 + D\zeta^2}{2Da},$$

wo A die willkührliche Constante der Integration ist;

$$A = (S\frac{D\eta^2 + D\zeta^2}{2Da}).$$

Man sieht nicht ein, warum Lagrange die willkührliche Constante mit ξ_1 bezeichnet.

Setzt man dagegen

$$D\xi = -Da + \sqrt{Da^2 - D\eta^2 - D\zeta^2},$$

so lässt sich der in diesem Paragraphen gegebene Beweis, dass der Theil von V, welcher die Quadrate von $D\eta$ und $D\zeta$ enthält, nothwendig stets positiv ist, nicht durchführen.

Man sieht übrigens leicht ein, dass jedenfalls aus diesem Beweise nur folgt, dass die Variablen $D\eta$, $D\zeta$, nicht aber, dass ξ, η, ζ innerhalb gegebener Grenzen liegen, welche vom Initialzustande des Systems abhängen, worauf es ankam.

§. 45. Wenn $n = \infty$ wird, während ϱ endlich bleibt, so wird $\frac{\varphi}{2} = \frac{\varrho\pi}{2(n+1)} = 0$, also $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\varphi}{2}$, und $2(n+1)\sin\frac{\varphi}{2} = \varrho\pi$, und ebenso $2\sqrt{(n+1)(n+2)}\sin\frac{\varphi}{2} = \varrho\pi$. Wenn n und ϱ beide unendlich werden, so wird $2(n+1)\sin\frac{\varrho\pi}{2(n+1)} = 2(n+1)\sin\frac{\pi}{2} = 2(n+1) = \infty = \varrho\pi$, gegen Lagrange's Behauptung; und ebenso wird:

$$2\sqrt{(n+1)(n+2)}\sin\frac{\varphi}{2} = 2\sqrt{(n+1)(n+2)}\sin\frac{\pi}{2}$$

$$= 2\sqrt{(n+1)(n+2)} = \infty = \varrho\pi.$$

Im ersten Satze dieses Paragraphen muss statt: de sorte que les racines de l'équation en k, qui étaient toutes incommensurables entre elles, tant que le nombre n des corps mobiles était fini, deviennent toutes commensurables lorsque n est infini, etc. gelesen werden: de sorte que les valeurs de $\sqrt{k}$ qui étaient toutes incommensurables entre elles, etc.

Im zweiten Absatze dieses Paragraphen muss statt: Il est vrai que, le nombre ϱ pouvant aussi devenir infini, il y aurait

des cas où etc. gelesen werden: Il est vrai que, le nombre ϱ devant aussi devenir infini, etc.

Da $n = \infty$ ist, so kann man in der Gleichung auf X des §. 33.:

$$\frac{lMk}{(n+1)(n+2)F'}X + D^2{}_1X = 0$$

$(n+1)(n+2) = (n+1)^2$ setzen.

Wenn n unendlich wird, so sind die Schwingungen der Saite synchron mit denen eines einfachen Pendels von der Länge $\frac{g}{k}$, wo man für k den einfachsten Werth zu nehmen hat, in welchem $\varrho = 1$ gesetzt wird. Statt $\frac{g}{k}$ könnte man auch $\frac{g}{\mu^2}$ setzen, wo $\mu = \pi\sqrt{\frac{F'}{lM}}$ für Longitudinalschwingungen und $= \pi\sqrt{\frac{F}{lM}}$ für Transversalschwingungen ist.

§. 47. Wenn $\varrho = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots.$ ist, so werden die entsprechenden Werthe von k sich wie $1:4:9:16:25$ verhalten, also die entsprechenden Pendellängen wie $1:\frac{1}{4}:\frac{1}{9}:\frac{1}{16}:\frac{1}{25}$, mithin die Schwingungszeiten wie $1:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}:\frac{1}{5}$, so dass der Grundton, die Octave, Duodezime, zweite Octave, Vicesime u. s. w. gehört werden.

§. 48. Da hier $n = \infty$ ist, so kann man in der Formel für ξ_r statt $\sqrt{(n+1)(n+2)}$ kürzer $n+1$ setzen, wodurch man genau Lagrange's Formel erhält.

Obgleich r und s eigentlich nur die Werthe $1, 2, 3$ u. s. w., n haben, so kann man ihnen doch auch die Werthe 0 und $n+1$ beilegen, da die Hauptformel

$$\alpha_r = S\alpha_s \Sigma \frac{2\sin r\varphi}{n+1}\sin s\varphi$$

unter dieser Voraussetzung richtig bleibt. Sie liefert für $r=0$: $\alpha_0 = 0$ und für $r = n+1$: $\alpha_{n+1} = 0$, wie es sein muss. Dagegen hat man, für $r=0$ und für $r = n+1$,

$$\Sigma \sin^2 r\varphi = 0.$$

Wenn man daher in den Formeln

$$\Sigma\frac{2\sin[2\lambda(n+1)\pm r]\varphi}{n+1}\sin r\varphi=\pm 1$$

und

$$\Sigma\frac{\sin N\varphi\times\sin r\varphi}{n+1}=\pm\frac{1}{2}$$

$r=0$ oder $r=n+1$ setzt, so gehen sie über in:

$$\Sigma\frac{2\sin[2\lambda(n+1)\pm r]\varphi}{n+1}\sin r\varphi=0$$

und

$$\Sigma\frac{\sin N\varphi\times\sin r\varphi}{n+1}=0.$$

§. 49. In den Formeln

$$S\alpha_s\Sigma\frac{\sin[r+(n+1)h't]\varphi}{n+1}\sin s\varphi=\pm\tfrac{1}{2}\alpha_s,$$

wo

$$s=\pm[r+(n+1)h't-2\lambda(n+1)];$$

und

$$S\alpha_{s'}\Sigma\frac{\sin[r-(n+1)h't]\varphi}{n+1}\sin s'\varphi=\pm\tfrac{1}{2}\alpha_{s'},$$

wo

$$s'=\pm[r-(n+1)h't-2\lambda'(n+1)]$$

ist, können r, s und s' nur die Werthe 1, 2, 3 u. s. w., n haben, aber nicht 0 und $n+1$; λ ist irgend eine ganze, positive Zahl oder Null, und λ' irgend eine ganze, negative Zahl oder Null.

r, s und s', welche ursprünglich nur den Rang der Körper bezeichnen und daher veränderliche Zahlen sind, werden hier zugleich Functionen von t. Sie beziehen sich in diesen Formeln auf ein und denselben Körper und haben insofern gleichen Werth; aber als Functionen von t haben sie verschiedene Werthe.

§. 51. Am Ende dieses Paragraphen liest man statt: On voit que ces différents cas se réduisent à déterminer les abscisses a ou a', en ajoutant ou en retranchant de l'abscisse x la ligne $lh't$, de manière que, lorsqu' elle passera l'une ou l'autre extrémité de l'axe l, elle soit repliée en arrière et comme réfléchie par des obstacles placés à ces deux extrémités, etc. richtiger: On voit que etc....., elle soit repliée en arrière et comme réfléchie par des obstacles placés aux deux dernières extrémités, etc.

§. 53. Der Werth von $D\xi''_x$ ist:

$$D\xi''_x = \frac{Da}{2lh'}(\dot{\alpha}_{x+\frac{l}{2(n+1)}+lh't} - \dot{\alpha}_{x+\frac{l}{2(n+1)}-lh't}$$

$$= \frac{Dx}{2lh'}(\dot{\alpha}_{x+lh't} - \dot{\alpha}_{x-lh't}),$$

indem man Dx statt Da setzt, was erlaubt ist, weil

$$S(\dot{\alpha}_{x+lh't} - \dot{\alpha}_{x-lh't})\,Dx = Da\,S(\dot{\alpha}_{x+lh't} - \dot{\alpha}_{x-lh't}),$$

und $\frac{l}{2(n+1)}$ wegen seiner Kleinheit vernachlässigt, wodurch zugleich das störende Glied $+\frac{1}{2}$ aus den beiden Werthen von N wegfällt.

§. 56. Lagrange versteht hier unter einer Schwingung der Saite einen Hin- und Hergang derselben, so dass alle ihre Theile wieder in dieselbe Lage zurückkehren. Ich habe aber in der Anmerkung zu §. 11. u. s. w. die gewöhnliche Terminologie beibehalten, nach welcher unter einer Schwingung eines Pendels, einer Saite u. s. w. nur ein Hingang verstanden wird, namentlich mit Rücksicht auf solche Schwingungen, wo das Bewegliche nicht wieder seine frühere Lage oder Gestalt annimmt.

§. 58. Im ersten Absatze dieses Paragraphen muss statt: Ainsi, si la corde se partage en deux, trois, quatre etc. parties égales, ces tons seront exprimés par les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ etc., et seront, par conséquent, à l'octave, à la douzième, à la double octave, à la dix-septième, etc., du ton fondamental. offenbar gelesen werden: Ainsi, etc., et seront, par conséquent, l'octave, la douzième, la double octave, la vingtième, etc., du ton fondamental.

§. 61. Es ist höchst merkwürdig, dass die Bedingung der Unbeweglichkeit des vorderen Endes der tönenden Saite: $\xi = 0$, wenn $x = 0$, die Gleichung

$$f(-lh't) = f(lh't)$$

oder

$$(\int\dot{\alpha}\partial x)_{-lh't} = (\int\dot{\alpha}\partial x)_{lh't}$$

liefert, während offenbar

$$(\int\dot{\alpha}\partial x)_{-lh't} = -(\int\dot{\alpha}\partial x)_{lh't}$$

ist.

Ferner ist auch die Gleichung

$$f(l + lh't) = f(l - lh't)$$

der Construction des §. 54. nur entsprechend für solche Werthe von $h't$, welche $\leqq 1$ sind.

Während also die Functionen Fx und $f'x$ der tönenden Saite für jede beliebige Abscisse mittelst des Initialzustandes der Saite und der Bedingung der Unbeweglichkeit ihrer beiden Enden bestimmt werden können, lässt sich die Function fx mittelst dieser Bedingungen nur für die Abscissen von 0 bis $+2l$ finden.

§. 62. Im Anfange dieses Paragraphen kann man hinter: Comme les formules qui donnent le mouvement d'une corde tendue et chargée d'un nombre indéfini de corps égaux ne sont sujettes à aucune difficulté, parce que le mouvement de chaque corps est déterminé par une équation particulière, il est évident que si l'on peut appliquer ces mêmes formules au mouvement d'une corde uniformément épaisse, en supposant le nombre des corps infini, et leurs distances mutuelles infiniment petites, la loi qui en résultera pour les vibrations de la corde sera entièrement indépendante de son état initial, der Deutlichkeit wegen hinzusetzen: c'est à dire qu'elle aura lieu pour un état initial quelconque;.

Siebenter Abschnitt.

§. 5. Die Gleichung

$$\frac{r^4 \partial\psi^2}{\partial t^2} + C^2 \operatorname{tang}^2\psi = 0$$

kann auch stattfinden, wenn

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0, \quad \psi = \text{const.}, \quad C = 0$$

ist, wo dann der Körper, für $\psi > 0$, eine geradlinige Bahn oder eine Curve doppelter Krümmung beschreiben würde. Weil aber angenommen worden ist, dass ψ in einem gewissen Augenblicke $= 0$ sei, so wird es, weil constant, immer $= 0$ sein.

Lagrange sagt, die beiden Bedingungen

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0 \text{ gleichzeitig in einem Augenblicke}$$

sprächen aus, dass der Körper sich in einem Augenblicke in der

Ebene der x, y bewege; $\frac{\partial\psi}{\partial t}=0$ sagt aber, dass ψ von t unabhängig, mithin constant sei, dass also der gewählte Augenblick jeder beliebige sein könne, woraus das zu Beweisende, dass der Körper eine Curve einfacher Krümmung beschreibt, sich von selbst ergiebt. Auch zeigt der folgende Beweis, dass aus der Annahme, dass der Körper sich in einem Augenblicke in der Ebene der x, y bewegt, nicht hervorgeht, dass er sich immer in dieser Ebene bewegen müsse.

In dem folgenden, streng richtigen Beweise wird von einer Formel ausgegangen, welche zeigt, dass ψ eine Function von φ ist. Es kann aber auch, während φ veränderlich ist, ψ constant sein, indem $\psi=0^0$ ist: der obige Fall, wo also der Körper ebenfalls eine Curve einfacher Krümmung beschreiben wird. Sind φ und ψ beide constant, so ist die Bahn des Körpers eine gerade Linie. Wäre φ constant und ψ veränderlich, so müsste die Gleichung umgeformt werden, so dass sie den Differentialquotienten $\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}$ enthielte; der Körper würde sich dann in einer auf der Ebene der x, y senkrechten Ebene bewegen.

§. 7. Man kann φ auch unmittelbar mittelst r bestimmen, erhält aber ein Integral von complicirter Form. Setzt man nämlich für $\cos^2\psi$ den aus $\operatorname{tang}\psi=\operatorname{tang}i\sin(\varphi-h)$ abgeleiteten Werth, so wird:

$$\partial\varphi=\frac{D\cos i\partial t}{r^2}[1+\operatorname{tang}^2 i\sin^2(\varphi-h)]=\frac{D\cos i\partial r[1+\operatorname{tang}^2 i\sin^2(\varphi-h)]}{r^2\sqrt{2H-2\int R\partial r-\frac{D^2}{r^2}}},$$

$$\frac{\partial\varphi}{1+\operatorname{tang}^2 i\sin^2(\varphi-h)}=\frac{D\cos i\partial r}{r^2\sqrt{2H-2\int R\partial r-\frac{D^2}{r^2}}}.$$

Setzt man behufs der Integration dieser Gleichung

$$\frac{1}{1+\operatorname{tang}^2 i\sin^2(\varphi-h)}=x,$$

so wird:

$$\frac{\partial\varphi}{1+\operatorname{tang}^2 i\sin^2(\varphi-h)}=-\frac{\partial x}{2\sqrt{-(1+\operatorname{tang}^2 i)x^2+(2+\operatorname{tang}^2 i)x-1}},$$

$$\int \frac{\partial\varphi}{1+\tang^2 i \sin^2(\varphi-h)}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{1+\tang^2 i}} \operatorname{Arctang} \frac{\cot(\varphi-h)-(1+\tang^2 i)\tang(\varphi-h)}{2\sqrt{1+\tang^2 i}} + C,$$

$$\operatorname{Arctang} \frac{\cot(\varphi-h)-(1+\tang^2 i)\tang(\varphi-h)}{2\sqrt{1+\tang^2 i}} + C$$

$$= -2D \int \frac{\partial r}{r^2\sqrt{2H-2\int R\partial r - \frac{D^2}{r^2}}};$$

oder, wenn man, für $\varphi=h$, $r=g$ setzt:

$$\operatorname{Arctang} \frac{\cot(\varphi-h)-(1+\tang^2 i)\tang(\varphi-h)}{2\sqrt{1+\tang^2 i}} - 90^0$$

$$= -2D \int_g^r \frac{\partial r}{r^2\sqrt{2H-2\int R\partial r - \frac{D^2}{r^2}}},$$

$$\cos i \cot(\varphi-h) - \frac{1}{\cos i}\tang(\varphi-h)$$

$$= 2\tang(90^0 - 2D \int_g^r \frac{\partial r}{r^2\sqrt{2H-2\int R\partial r - \frac{D^2}{r^2}}}).$$

§. 10. Der Gleichung

$$Cz + By + Ax = 0$$

entspricht als Bahn des Körpers auch eine durch das Centrum der Kräfte gehende gerade Linie, deren Endpunkte gleichweit vom Centro abstehen, und auf welcher der Körper abwechselnd mit gleichförmig beschleunigter und gleichförmig verzögerter Bewegung hin und her geht. Um diese Bewegung hervorzurufen, braucht man bloss anzunehmen, dass das Beharrungsvermögen in der Richtung der Centralkraft wirke, und dass letztere nicht durch eine im Centro befindliche Masse repräsentirt sei.

§. 11. Um den Fall, wo ψ dauernd $=0$ ist, hier zu subsumiren, hat man nur i und $h=0$ zu setzen, und man erhält $x=\xi$, $y=\eta$, $z=0$.

Die Gleichung $r^2\partial\Phi = D\partial t$ giebt integrirt: $\frac{1}{2}\int r^2\partial\Phi = \frac{D}{2}t$, d. h. den bekannten Lehrsatz, dass die Flächenräume der Sectoren den Zeiten proportional sind.

§. 13. Vergl. §. 67. über die Behauptung, dass in den Ausdrücken $x = \alpha X + \beta Y$ u. s. w. die nur von der Bewegung des Körpers in seiner Bahn abhängigen Grössen von denen, die nur von der Lage der Ebene der Bahn gegen die der Axen der x, y abhängen, getrennt sind.

Zwischen X und Y existirt nur eine Differentialgleichung mit der willkührlichen Constanten C', indem die beiden anderen $= 0$ werden. Führt man in diese Gleichung:

$$\frac{X\partial Y - Y\partial X}{\partial t} = C'$$

die Werthe für X und Y des §. 13. ein, so erhält man:

$$r^2\partial\Phi = C'\partial t,$$

woraus $C' = D$ folgt, wie es sein muss, da

$$C'^2 = A^2 + B^2 + C^2 = D^2$$

ist.

§. 14. Aus den Werthen von α, β, α_1 u. s. w. erhellet, dass die neue Ebene der X, Y die der früheren Bahn des angezogenen Körpers ist, und dass diese Bahn jetzt in eine mit der früheren parallele oder dieselbe unter irgend einem Winkel schneidende Ebene verlegt gedacht wird, so jedoch, dass die Projection der neuen Bahn auf die Ebene der X, Y genau die frühere Bahn ist.

Die Aufgabe, eine gegebene Bahn auf eine beliebige Ebene zu beziehen, ist gleichwohl vollständig gelöst, insofern durch die willkührliche Bestimmung der Constanten h und i die Lage der Ebene der X, Y zu einer beliebigen gemacht wird, durch die willkührliche Bestimmung der Constanten k die Lage von X, Y eine beliebige wird, und durch die beliebigen Werthe der Variablen X, Y, Z die Bahn selbst eine ganz beliebige wird.

§. 15. Die aus den Formeln dieses Paragraphen sich ergebende Bewegung der Himmelskörper in einem Kegelschnitt, insbesondere in einer Ellipse, ist abwechselnd eine gleichförmig beschleunigte und verzögerte, und entspricht insofern der allgemeinen Formel der Dynamik (Abschnitt II., §. 5.). Sie unterscheidet sich im Allgemeinen von der Fallbewegung nur durch die Richtung, und wenn wir auf die Ursachen zurückgehen, durch die Verschie-

denheit der Richtungen, nach welchen die Centripetalkraft und das Beharrungsvermögen wirken. Aber auch die geradlinige Bewegung muss den Formeln dieses Paragraphen entsprechen. Die Formel

$$\frac{D}{r} - \frac{g}{D} = \sqrt{2H + \frac{g^2}{D^2}} \cos(\Phi + K)$$

lässt sich auf die Form

$$D^2 - gr = r\sqrt{2HD^2 + g^2} \cos(\Phi + K)$$

bringen. Bewegt sich der Körper in einer geraden Linie, so ist r veränderlich und Φ entweder $= 0^0$ oder $= 180^0$. Der kleinste Werth von r ist dann $= 0$, und es liefert also obige Formel für diesen Fall $D^2 = 0$, was, da D constant ist, allgemein gelten muss. Also liefert die Formel

$$r = \frac{b}{1 + e\cos\Phi} = \frac{b}{1 \pm e}$$

die Werthe 0 und $\frac{0}{0}$, also 0 und unbestimmt, wie es sein muss.

Uebrigens bezeichnet b in der polaren Kegelschnittsgleichung

$$r = \frac{b}{1 + e\cos\Phi}$$

den halben Parameter des Kegelschnitts.

§. 16. Weil $1 - \frac{r}{a}$ eine veränderliche Grösse ist, deren Gränzen $+e$ und $-e$ sind, so kann es $= e\cos\vartheta$ gesetzt werden.

Bei der Integration der Gleichung

$$\partial\Phi = \frac{\partial\vartheta\sqrt{1 - e^2}}{1 - e\cos\vartheta}$$

sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $e < 1$ (Ellipse), oder $e = 1$ (Parabel), oder $e > 1$ (Hyperbel) ist. Für die Ellipse hat man:

$$\Phi + k = 2\,\mathrm{Arctang}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{tang}\,\frac{\vartheta}{2}\right),$$

mithin

$$\sin(\Phi + k) + \cot(\Phi + k)[1 + \cos(\Phi + k)] = \frac{1 + \cos\vartheta}{\sin\vartheta}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}.$$

Setzt man nun $\cos(\Phi+k)=x$, also $\sin(\Phi+k)=\sqrt{1-x^2}$ und $\cot(\Phi+k)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, so wird

$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{1-e}{1+e}\left(\frac{1+\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right)^2,$$

mithin

$$x=\cos(\Phi+k)=\frac{(1-e)(1+\cos\vartheta)^2-(1+e)\sin^2\vartheta}{(1-e)(1+\cos\vartheta)^2+(1+e)\sin^2\vartheta},$$

$$\sin(\Phi+k)=\frac{\sin\vartheta\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos\vartheta},$$

$$\Phi+k=\mathrm{Arc}\sin\frac{\sin\vartheta\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos\vartheta}$$

oder

$$\Phi=\mathrm{Arc}\sin\frac{\sin\vartheta\sqrt{1-e^2}}{1-e\cos\vartheta}+\mathrm{const.}$$

Für die Parabel hat man:

$$\Phi+k=-\frac{(1+\cos\vartheta)\sqrt{1-e^2}}{\sin\vartheta}=0,$$

mithin:

$$\Phi=\mathrm{const.},$$

und für die Hyperbel:

$$\Phi+k=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\,l.\left(\frac{\cos\vartheta-e+\sin\vartheta\sqrt{e^2-1}}{1-e\cos\vartheta}\right)^2,$$

mithin:

$$\Phi=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\,l.\left(\frac{\cos\vartheta-e+\sin\vartheta\sqrt{e^2-1}}{1-e\cos\vartheta}\right)^2+\mathrm{const.}$$

Leitet man den Werth von Φ in ϑ aus der Gleichung

$$\frac{b}{1+e\cos\Phi}=a(1-e\cos\vartheta)$$

ab, so erhält man für die Ellipse ausser der Gleichung

$$\operatorname{tang}\frac{\Phi}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2}$$

auch die Gleichung:

$$\operatorname{tang}\frac{\Phi}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\cot\frac{\vartheta}{2}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2}}.$$

Für die Parabel erhält man:

$$\cos\Phi=-1,\quad \sin\Phi=0,$$

also

$$\Phi=180^0.$$

Da

$$H=\frac{\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2}{2\partial t^2}-\frac{g}{r}$$

ist, so ist H um so kleiner, je kleiner r ist, und um so grösser, je grösser r ist. Ist $r=0$, so ist $H=-\infty$; ist $r=\infty$, so ist $H=\frac{\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2}{2\partial t^2}$, also positiv. Für $H=0$ wird $r=\frac{2g\partial t^2}{\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2}$.

Für die geradlinige Bahn ist

$$t-c=\int\sqrt{\frac{r}{2Hr+2g}}\partial r,$$

und wenn man $\sqrt{r}=z$, $r=z^2$, $\partial r=2z\partial z$ setzt,

$$t-c=\int\frac{z^2\sqrt{2}}{\sqrt{g+Hz^2}}\partial z.$$

Ist H positiv, so wird mithin:

$$t-c=\frac{1}{H\sqrt{2}}[\sqrt{r}\sqrt{g+Hr}-\frac{g}{2\sqrt{H}}\,l.(2H\sqrt{r}+2\sqrt{H}\sqrt{g+Hr})^2].$$

Ist dagegen H negativ, so wird:

$$t-c=\frac{1}{H\sqrt{2}}(\sqrt{r}\sqrt{g+Hr}-\frac{g}{\sqrt{-H}}\operatorname{Arctang}\sqrt{\frac{-Hr}{g+Hr}}).$$

Ist $H=0$, so wird:

$$t-c=\frac{\sqrt{r^3}}{3g}=\tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{8g\partial t^6}{(\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2)^3}}.$$

§. 19. Mit Recht behauptet Lagrange, es sei einerlei, ob man, um die Formeln für Φ auf das Aphelium zu beziehen, 180^0 zu Φ und ϑ addire, oder das Zeichen von e ändere; man erhält so:

$$\sin(\Phi+180^0)=-\sin\Phi=-\frac{\sin\vartheta\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos\vartheta},$$

also

$$\sin\Phi = \frac{\sin\vartheta\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos\vartheta},$$

$$\cos(\Phi+180^0) = -\cos\Phi = -\frac{\cos\vartheta+e}{1+e\cos\vartheta},$$

also

$$\cos\Phi = \frac{\cos\vartheta+e}{1+e\cos\vartheta},$$

$$\tang\frac{\Phi+180^0}{2} = -\cot\frac{\Phi}{2} = -\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\cot\frac{\vartheta}{2},$$

und folglich

$$\tang\frac{\Phi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\cot\frac{\vartheta}{2}} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tang\frac{\vartheta}{2},$$

wo sich nun die neuen Werthe von Φ und ϑ auf das Aphelium als Ausgangspunkt beziehen.

§. 21. Meine Berechnung liefert:

$$F\frac{\vartheta}{2} = F\frac{u}{2} + \frac{f.u}{2}F'\frac{u}{2} + \frac{\partial.[(f.u)^2F'\frac{u}{2}]}{4\partial u} + \frac{\partial^2.[(f.u)^3F'\frac{u}{2}]}{3.4\partial u^2} + \ldots,$$

$$\tang\frac{\vartheta}{2} = \tang\frac{u}{2} + e\frac{\sin u}{1+\cos u} + e^2\frac{\partial.\frac{\sin^2 u}{1+\cos u}}{2\partial u} + e^3\frac{\partial^2.\frac{\sin^3 u}{1+\cos u}}{2.3\partial u^2} + \ldots.$$

§. 22. Mein Werth von Φ in u weicht von dem Lagrange's etwas ab. Ich erhalte:

$$\Phi = u + e\sin u + e^2\frac{\partial.\sin^2 u}{2\partial u} + e^3\frac{\partial^2.\sin^3 u}{2.3\partial u^2} + \ldots$$

$$\ldots + 2E(\sin u + e\sin u\cos u + e^2\frac{\partial.(\sin^2 u\cos u)}{2\partial u} + e^3\frac{\partial^2.(\sin^3 u\cos u)}{2.3\partial u^2} + \ldots)$$

$$+ \frac{2E^2}{2}(\sin 2u + 2e\sin u\cos 2u + 2e^2\frac{\partial.(\sin^2 u\cos 2u)}{\partial u}$$

$$+ 4e^3\frac{\partial^2.(\sin^3 u\cos 2u)}{3\partial u^2} + \ldots) + \frac{2E^3}{3}(\sin 3u + 3e\sin u\cos 3u$$

$$+ 9e^2\frac{\partial.(\sin^2 u\cos 3u)}{2\partial u} + 9e^3\frac{\partial^2.(\sin^3 u\cos 3u)}{2\partial u^2} + \ldots) + \ldots$$

Der endliche Werth von U ist:

$$U = \frac{\cos u - E}{1-2E\cos u+E^2} = \frac{(2-Ee)\cos u - e}{2(1-e\cos u)}.$$

Note I. des zweiten Bandes, von Puiseux.

Durch Verwandlung der Sinusse und Cosinusse von $\varrho\sqrt{-1}$ in imaginäre Exponentialgrössen in der Gleichung

$$\cos\zeta[\varrho\sqrt{-1}\cos(\varrho\sqrt{-1}) - \sin(\varrho\sqrt{-1})]$$
$$= \sin\zeta[\cos(\varrho\sqrt{-1}) + \varrho\sqrt{-1}\sin(\varrho\sqrt{-1})]$$

erhält man:

$$\sqrt{-1}\cos\zeta(\varrho\frac{\varepsilon^{\varrho\sqrt{-1}} + \varepsilon^{-\varrho\sqrt{-1}}}{2} + \frac{\varepsilon^{\varrho\sqrt{-1}} - \varepsilon^{-\varrho\sqrt{-1}}}{2})$$
$$= \sin\zeta(\frac{\varepsilon^{\varrho\sqrt{-1}} + \varepsilon^{-\varrho\sqrt{-1}}}{2} + \varrho\frac{\varepsilon^{\varrho\sqrt{-1}} - \varepsilon^{-\varrho\sqrt{-1}}}{2}).$$

Puiseux erhält seine Gleichung aus dieser, indem er den Exponenten jeder imaginären Exponentialgrösse mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt. Dass aber hierdurch die Gleichung unrichtig wird, lehrt folgende Vergleichung beider Werthe. Es müsste nämlich hiernach sein:

$$\frac{\varrho\sqrt{-1}\sin\varrho + \cos\varrho}{\sqrt{-1}\sin\varrho + \varrho\cos\varrho} = \frac{\varrho(\varepsilon^{-\varrho} - \varepsilon^{\varrho}) + \varepsilon^{-\varrho} + \varepsilon^{\varrho}}{\varepsilon^{-\varrho} - \varepsilon^{\varrho} + \varrho(\varepsilon^{-\varrho} + \varepsilon^{\varrho})},$$

also, wenn man die Sinusse, Cosinusse und imaginären Exponentialgrössen in Reihen entwickelt:

$$-\varrho\sqrt{-1}(\varrho - \frac{\varrho^3}{1.2.3} + \frac{\varrho^5}{1.2.3.4.5} - \ldots)(\varrho + \frac{\varrho^3}{1.2.3} + \frac{\varrho^5}{1.2.3.4.5} + \ldots)$$
$$+\varrho^2\sqrt{-1}(\varrho - \frac{\varrho^3}{1.2.3} + \frac{\varrho^5}{1.2.3.4.5} - \ldots)(1 + \frac{\varrho^2}{1.2} + \frac{\varrho^4}{1.2.3.4} + \ldots)$$
$$-(1 - \frac{\varrho^2}{1.2} + \frac{\varrho^4}{1.2.3.4} - \ldots)(\varrho + \frac{\varrho^3}{1.2.3} + \frac{\varrho^5}{1.2.3.4.5} + \ldots)$$
$$+\varrho(1 - \frac{\varrho^2}{1.2} + \frac{\varrho^4}{1.2.3.4} - \ldots)(1 + \frac{\varrho^2}{1.2} + \frac{\varrho^4}{1.2.3.4} + \ldots)$$
$$= -\varrho\sqrt{-1}(\varrho - \frac{\varrho^3}{1.2.3} + \frac{\varrho^5}{1.2.3.4.5} - \ldots)(\varrho + \frac{\varrho^3}{1.2.3} + \frac{\varrho^5}{1.2.3.4.5} + \ldots)$$
$$+\sqrt{-1}(\varrho - \frac{\varrho^3}{1.2.3} + \frac{\varrho^5}{1.2.3.4.5} - \ldots)(1 + \frac{\varrho^2}{1.2} + \frac{\varrho^4}{1.2.3.4} + \ldots)$$
$$-\varrho^2(1 - \frac{\varrho^2}{1.2} + \frac{\varrho^4}{1.2.3.4} - \ldots)(\varrho + \frac{\varrho^3}{1.2.3} + \frac{\varrho^5}{1.2.3.4.5} + \ldots)$$
$$+\varrho(1 - \frac{\varrho^2}{1.2} + \frac{\varrho^4}{1.2.3.4} - \ldots)(1 + \frac{\varrho^2}{1.2} + \frac{\varrho^4}{1.2.3.4} + \ldots);$$

folglich

$$\varrho^2\sqrt{-1}(\varrho-\frac{\varrho^3}{1.2.3}+\frac{\varrho^5}{1.2.3.4.5}-....)(1+\frac{\varrho^2}{1.2}+\frac{\varrho^4}{1.2.3.4}+....)$$

$$+\varrho^2(1-\frac{\varrho^2}{1.2}+\frac{\varrho^4}{1.2.3.4}-....)(\varrho+\frac{\varrho^3}{1.2.3}+\frac{\varrho^5}{1.2.3.4.5}+....)$$

$$=\sqrt{-1}(\varrho-\frac{\varrho^3}{1.2.3}+\frac{\varrho^5}{1.2.3.4.5}-....)(1+\frac{\varrho^2}{1.2}+\frac{\varrho^4}{1.2.3.4}+....)$$

$$+(1-\frac{\varrho^2}{1.2}+\frac{\varrho^4}{1.2.3.4}-....)(\varrho+\frac{\varrho^3}{1.2.3}+\frac{\varrho^5}{1.2.3.4.5}+....),$$

folglich $\varrho^2=1$ oder $\varrho=0$, während ϱ reell, übrigens aber ganz unbestimmt sein muss.

Hat man $\sin\zeta=0$, $\zeta=0$ oder π, so ist:

$$\frac{2\varrho^3}{1.2.3}+\frac{4\varrho^5}{1.2.3.4.5}+....=0.$$

Am einfachsten ergiebt sich, dass $a=1$, für $\zeta=0$ oder π, ein Maximum ist, indem man den Werth von ϱ in $\frac{\partial^2\log a}{\partial\zeta^2}$ einführt, wodurch dieser Differentialquotient $=-\infty$ wird.

---

§. 24. Die Gleichung

$$\Theta=T+\frac{T'}{a}+....=T(1-\frac{b}{4a}+\frac{T^2}{3a}+\frac{T^3}{12a}+\frac{T^4}{60ab}-....)$$

kann ich auf keine Weise erhalten. Die Gleichung

$$T^3+3bT=3b\Theta(1+\frac{b}{4a})+\Theta^3(1-\frac{b}{2a})-....$$

liefert, wenn man $T=\Theta(1+\frac{b}{4a})$ setzt:

$$\Theta=\frac{4aT}{4a+b}=T(1-\frac{b}{4a}+\frac{b^2}{16a^2}-\frac{b^3}{64a^3}+....),$$

und wenn man $T^3=\Theta^3(1-\frac{b}{2a})$ setzt:

$$\Theta=T\sqrt[3]{\frac{2a}{2a-b}}=T\sqrt[3]{(1+\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{b^3}{8a^3}+....)}.$$

Versucht man aber $(1+\frac{b}{4a})^3 = 1 - \frac{b}{2a}$ zu setzen, so erhält man die Gleichung:

$$b^3 + 12ab^2 + 80a^2b = 0,$$

woraus entweder $b = 0$ oder $b^2 + 80a^2 = -12ab$ folgt; ersteres ist nur annähernd richtig, letzteres aber falsch, da $b^2 + 80a^2$ positiv, $-12ab$ aber negativ ist.

ϑ ist nicht nothwendig von dem Range von $\frac{1}{\sqrt{a}}$, aber man kann es, als sehr klein, $= \frac{\Theta}{\sqrt{a}}$ setzen.

Man hat übrigens im Texte folgende Werthe statt der daselbst angegebenen, unrichtigen einzuführen:

$$\operatorname{tang}\frac{\Phi}{2} = \frac{1}{\sqrt{b}}\Theta - \frac{\sqrt{b}}{4a}(\Theta + \frac{1}{3b}\Theta^3),$$

$$X = \tfrac{1}{2}(b - \Theta^2) + \frac{1}{8a}(b^2 + \tfrac{1}{3}\Theta^4);$$

und später:

$$r = \tfrac{1}{2}(b + T^2) + \frac{1}{a}\left(\frac{b^2}{8} - \frac{bT^2}{4} - \frac{T^4}{24} + TT'\right),$$

$$X = \tfrac{1}{2}(b - T^2) + \frac{1}{a}\left(\frac{b^2}{8} + \frac{T^4}{24} - TT'\right),$$

$$Y = T\sqrt{b} - \frac{1}{a}\left(\frac{T^3\sqrt{b}}{6} - T'\sqrt{b}\right).$$

§. 28. Der Werth für $\frac{\partial s}{\partial t}$ ist:

$$-\frac{\partial s}{\partial t} = g\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right),$$

folglich ist:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{r} - \frac{\partial s}{g\partial t}.$$

§. 29. Die Reihe für r^2:

$$r^2 = \mathrm{r}^2 + 2st + \frac{\partial s}{\partial t}t^2 - \frac{gs}{\mathrm{r}^3}\frac{t^3}{3} + \ldots$$

ist vollkommen richtig, weil man sich $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial r}{\partial t}$ und $\frac{\partial s}{\partial t}$

in $\frac{\partial x}{\partial t'}$, $\frac{\partial y}{\partial t'}$, $\frac{\partial z}{\partial t'}$, $\frac{\partial r}{\partial t'}$ und $\frac{\partial s}{\partial t'}$ verwandelt denken kann, indem es gleichgültig ist, ob man x, y, z, r, s als Functionen von t oder von t' ansieht.

§. 31. Die Werthe von A und B sind:

$$A = y\frac{\partial z}{\partial t} - z\frac{\partial y}{\partial t},$$

$$B = x\frac{\partial z}{\partial t} - z\frac{\partial x}{\partial t}.$$

§. 33. Man könnte die beiden Gleichungen zur Bestimmung von k eben so gut auch so schreiben:

$$\tang(\Phi + k) = \frac{\tang(\varphi - h)}{\cos i},$$

$$\cos\Phi = \frac{1}{e}\left(\frac{b}{r} - 1\right).$$

Daraus, dass in §. 15. $K = 0$ wird, folgt keineswegs, dass auch in §. 7. $k = 0$ wird, da die Formeln zur Bestimmung von $\Phi + K$ und von $\Phi + k$ ganz verschiedene sind.

§. 35. Wenn die Bahn eine Parabel wäre, so hätte man:

$$a = \infty,$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{g}{r},$$

$$r'^2 = r^2 + \frac{gt^2}{r} + (2t - \frac{gt^3}{3r^3})s.$$

§. 39. Man hat zur Bestimmung der Werthe von $\tang i$ und $\tang h$ die beiden Gleichungen:

$$z + (x\ \sin h - y\ \cos h)\tang i = 0,$$

$$z' + (x' \sin h - y' \cos h)\tang i = 0.$$

Man hat ferner die Gleichung:

$$Rn - \varrho\nu = L(\varrho\lambda - Rl) + M(Rm - \varrho\mu),$$

mithin:

$$R = \varrho\frac{\nu + \lambda L - \mu M}{n + lL - mM}.$$

§. 40. Für $t' - t$ erhalte ich, wenn u sehr klein gedacht wird:

$$t'-t=\frac{r+r'}{6\sqrt{g}}\left(\sqrt{r+r'+3u}-\sqrt{r+r'-3u}\right)$$

oder

$$18g(t'-t)^2=(r+r')^2(r+r'-\sqrt{(r+r')^2-9u^2}),$$

Formeln, die sich noch weniger, als die von Lagrange berechneten, zur Bestimmung der Unbekannten R, R', R'' eignen.

§. 43. R' und R'' erhalten folgende Werthe:

$$R'=\frac{-6P_1r^3+Q_1t^2}{(6mr^3-m^3t^2)G},$$

$$R''=\frac{6P_2r^3-Q_2t^2}{(6r^3-t^2)G}.$$

§. 44. Hier werden die Werthe von R' und R'':

$$R'=-\frac{Q_1t^2}{6mG}\left(\frac{1}{\varrho^3}-\frac{1}{r^3}\right),$$

$$R''=\frac{Q_2t^2}{6G}\left(\frac{1}{\varrho^3}-\frac{1}{r^3}\right).$$

§. 45. Die Werthe von R' und R'' in R sind:

$$R'=-\frac{(m-1)\,Q_1}{mQ}R,$$

$$R''=\frac{(m-1)\,Q_2}{Q}R.$$

In §. 46. erhält man dann die Gleichung in R:

$$MR^2+2NR+m\varrho'^2-\varrho''^2-(m-1)r^2+m(m-1)\frac{t^2}{r}=0,$$

wo

$$M=\frac{(m-1)^2}{Q^2}\left(\frac{Q_1^2}{m}-Q_2^2\right)$$

und

$$N=\frac{m-1}{Q}\left[Q_1\varrho'\cos(C'S')+Q_2\varrho''\cos(C''S'')\right].$$

§. 47. Ausser den hier angeführten Grössen sind als bekannt auch noch $\cos(CS)$, $\cos(C'S')$ und $\cos(C''S'')$ aufzuführen.

§. 50. Die Werthe von G, Γ, Γ_1 und Γ_2 sind hier alle negativ zu nehmen.

§. 53. Die Werthe von $\tang h$ und $\tang i$ sind:

$$\tang h = \frac{\sin\varphi\partial\psi - \sin\psi\cos\psi\cos\varphi\partial\varphi}{\cos\varphi\partial\psi + \sin\psi\cos\psi\sin\varphi\partial\varphi},$$

$$\tang i = \frac{A}{C\sin h} = \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{C}$$

$$= \frac{\sqrt{[r(\partial\psi^2 + \sin^2\psi\cos^2\psi\partial\varphi^2) + 2\partial r\partial\psi\sin\psi\cos\psi(2\sin^2\psi - 1)]}}{\cos^2\psi\partial\varphi\sqrt{r}}.$$

§. 55. Für die entgegengesetzte Lage des Winkels ε gehen die Formeln für $u\cos\alpha'$ und $u\cos\beta'$ über in:

$$u\cos\alpha' = \dot{r}\cos\varepsilon + r\dot{\varphi}\sin\varepsilon,$$

$$u\cos\beta' = r\dot{\varphi}\cos\varepsilon - \dot{r}\sin\varepsilon;$$

woraus dann auch neue Werthe für $\cos\alpha'$ und $\cos\beta'$ hervorgehen.

Man hat $f = \frac{\partial r}{\sqrt{g}\partial t}$, $\frac{\sqrt{b}}{r} = \frac{r\partial\varphi}{\sqrt{g}\partial t}$.

§. 56. Um den grössten Werth von u zu bestimmen, müssen von dem grössten Werthe von $\frac{4}{r} - \frac{1}{A} - \frac{1}{a}$ die kleinsten Werthe von $2\frac{\sqrt{Bb}}{r^2}\cos J$ und $2Ff$ abgezogen, und nicht, wie Lagrange thut, deren grösste Werthe addirt werden. Der kleinste Werth von $\frac{b}{r}$ ist $= 1 - e$, von $\frac{B}{r} = 1 - E$, also der kleinste Werth von $\frac{\sqrt{Bb}}{r^2} = \frac{\sqrt{(1-E)(1-e)}}{r}$; also, wenn man $\cos J = 0$ setzt, $2\frac{\sqrt{Bb}}{r^2}\cos J = 0$. Der grösste Werth von $\frac{1}{a}$ und $\frac{b}{r^2}$ ist $= \frac{1+e}{r}$, mithin der kleinste Werth von $f = \sqrt{-2\frac{e}{r}}$ und von $F = \sqrt{-2\frac{E}{r}}$, also der kleinste Werth von $2Ff = -\frac{4}{r}\sqrt{Ee}$. Mithin wird der grösste Werth von $u = \sqrt{\frac{2+E+e+4\sqrt{Ee}}{r}}$, welcher für die Annahme einer kreisförmigen oder beinahe kreisförmigen primitiven Bahn und einer neuen fast parabolischen Bahn $\sqrt{\frac{3}{r}}$ liefert

r wird hier als eine Constante betrachtet, während es eigentlich eine Function von φ ist; da aber die Unterschiede seiner Werthe gegen die Werthe der übrigen Grössen unbedeutend sind, so kann man sie vernachlässigen und für r seinen mittleren Werth setzen. Natürlich ist aber die ganze Rechnung nur approximativ und eigentlich logisch unrichtig.

Da die beiden Bahnen ganz bestimmt sind und der veränderliche Werth von u nur von dem Orte abhängt, an welchem der Körper (Planet) den Stoss erleidet, so müssen a, b, A, B und $J(=90^0)$ constant und gegeben, und nur r, φ und Φ veränderlich sein. Man muss also zunächst in dem Werthe von u das Glied $\frac{4}{r}$ dadurch auf den grössten Werth bringen, dass man für r den kleinsten Werth setzt, wodurch $\varphi = 0$ und $\Phi = 0$ wird. Unter diesen Voraussetzungen wird:

$$\frac{1}{a} = \frac{1-e}{r}, \quad \frac{1}{A} = \frac{1-E}{r}, \text{ folglich } \frac{4}{r} - \frac{1}{A} - \frac{1}{a} = \frac{2+E+e}{r}.$$

Da ferner

$$\frac{b}{r} = 1+e, \quad \frac{B}{r} = 1+E, \text{ so ist } \frac{\sqrt{Bb}}{r^2} = \frac{\sqrt{(1+E)(1+e)}}{r},$$

und da

$$\cos J = 0, \text{ so ist } 2\frac{\sqrt{Bb}}{r^2}\cos J = 0.$$

Da endlich

$$\frac{1}{a} = \frac{1-e}{r} \text{ und } \frac{b}{r^2} = \frac{1+e}{r}, \text{ so ist } f=0, \ F=0, \ 2Ff=0.$$

Also wird u, für $\varphi=0$ und $\Phi=0$:

$$u = \sqrt{\frac{2+E+e}{r}},$$

wo r seinen kleinsten, u seinen grössten Werth hat, wie aber nur specielle Berechnungen streng nachweisen können. Für die Annahme einer beinahe kreisförmigen primitiven Bahn und einer neuen, fast parabolischen wird $u = \sqrt{\frac{3}{r}}$.

Setzt man $\varphi = 90^0 = \Phi$, wo also r grösser ist, so wird $u = \sqrt{\frac{2+(E-e)^2}{r}}$. Setzt man $\varphi = 180^0 = \Phi$, wo r seinen grössten

Werth erhält, so wird u seinen kleinsten Werth $=\sqrt{\frac{2-E-e}{r}}$ annehmen. Setzt man $\varphi=45^0=\Phi$, so wird u annähernd $=\sqrt{\frac{2+(E+e)\sqrt{2}-2Ee}{r}}$. Es erhellet auch leicht, dass ein Stoss, um eine bestimmte Wirkung auf den Körper hervorzubringen, um so kräftiger sein muss, je näher sich dieser am Attractionscentrum befindet.

§. 57. Die Annahme einer primitiven Kreisbahn und einer secundären elliptischen (worin E sehr klein und J sehr klein gedacht werden kann) liefert die Werthe:

$$u=\sqrt{\frac{2(1-\cos J\sqrt{1+E\cos\Phi})}{r}+\frac{E(E+\cos\Phi)}{r(1+E\cos\Phi)}}$$

$$=\sqrt{\frac{2(1-\cos J\sqrt{1+E\cos\Phi})+E\cos\Phi}{r}+\frac{E^2\sin^2\Phi}{r(1+E\cos\Phi)}},$$

$$\cos\alpha=\frac{E\sin\Phi}{u\sqrt{r(1+E\cos\Phi)}},$$

$$\cos\beta=\frac{\cos J\sqrt{1+E\cos\Phi}-1}{u\sqrt{r}},$$

$$\cos\gamma=\frac{\sin J\sqrt{1+E\cos\Phi}}{u\sqrt{r}}.$$

§. 58. Die Formel

$$\partial a=\left(\frac{\partial a}{\partial x'}X+\frac{\partial a}{\partial y'}Y+\frac{\partial a}{\partial z'}Z\right)\partial t$$

gilt nur für solche Werthe von a, welche x', y', z' nur in der ersten Potenz enthalten. Für $a=xx'^2+yy'^3+zz'^4$ z. B. würde man erhalten:

$$a+\partial a=x(x'+X\partial t)^2+y(y'+Y\partial t)^3+z(z'+Z\partial t)^4,$$

mithin:

$$\partial a=\frac{\partial a}{\partial .x'^2}[(x'+X\partial t)^2-x'^2]+\frac{\partial a}{\partial .y'^3}[(y'+Y\partial t)^3-y'^3]$$
$$+\frac{\partial a}{\partial .z'^4}[(z'+Z\partial t)^4-z'^4].$$

Man kann aber obige Formel für ∂a auch auf solche Werthe von a, welche x', y', z' in der zweiten und höheren Potenzen ent-

halten, anwenden, weil die zweiten und höheren Potenzen von $X\partial t$, $Y\partial t$, $Z\partial t$ wegen ihrer Kleinheit vernachlässigt werden können. Gerade hierauf beruht die Anwendung dieser Formel zu Approximationsrechnungen, wenn die störenden Kräfte sehr klein sind; während dieselbe bei starken Kräften dieser Art nicht mehr anwendbar sein würde. Wäre z. B. $a=x'^2$, so hätte man:

$$x' = \sqrt{a},$$

$$\partial x' = \frac{\partial a}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\,\frac{\partial a}{\partial x'}\,X\partial t = \frac{x'}{\sqrt{a}}\,X\partial t.$$

Streng genommen aber hat man:

$$a + \partial a = x'^2 + 2x'X\partial t + X^2\partial t^2,$$

$$\partial a = 2x'X\partial t + X^2\partial t^2,$$

$$\frac{\partial a}{2\sqrt{a}} = \frac{x'}{\sqrt{a}}\,X\partial t + \frac{X^2\partial t^2}{2\sqrt{a}}$$

und näherungsweise $= \frac{x'}{\sqrt{a}}\,X\partial t.$

§. 61. Man sieht nicht ein, weshalb das Differential von a nach t identisch Null wird durch die Werthe für $\frac{\partial x'}{\partial t}$, $\frac{\partial y'}{\partial t}$, $\frac{\partial z'}{\partial t}$.

Lässt man x variiren, so müssen, da

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial t} = 0$$

gesetzt wird, um so mehr

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y},\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = 0$$

werden, indem

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 x'}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^3 x}{\partial x \partial t^2} = 0,\quad -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 y'}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} = 0,$$

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial t^2} = 0.$$

Daher werden:

$$\partial.\frac{\partial a}{\partial x},\quad \partial.\frac{\partial a}{\partial y},\quad \partial.\frac{\partial a}{\partial z} = 0,$$

und wenn man den Coefficienten von $\frac{\partial \Omega}{\partial b}\partial t$ differentiirt und die Werthe für die Differentiale von $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial a}{\partial y}$, $\frac{\partial a}{\partial z}$, $\frac{\partial a}{\partial x'}$, $\frac{\partial a}{\partial y'}$, $\frac{\partial a}{\partial z'}$ ein-

führt, so werden die Glieder, welche die Differentiale von $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial b}{\partial x}$, u. s. w. enthalten, sogleich Null werden.

§. 65. $\frac{\partial \Omega}{\partial a}\partial a + \frac{\partial \Omega}{\partial b}\partial b + \frac{\partial \Omega}{\partial c}\partial c + \ldots.$ ist keineswegs $=0$, indem $\frac{\partial a}{\partial t}\partial b$ nicht $= \frac{\partial b}{\partial t}\partial a$, $\frac{\partial a}{\partial t}\partial c$ nicht $= \frac{\partial c}{\partial t}\partial a$ u. s. w. Man erhält vielmehr für $\frac{\partial \Omega}{\partial a}\partial a + \frac{\partial \Omega}{\partial b}\partial b + \frac{\partial \Omega}{\partial c}\partial c$ nach Weglassung der Glieder, welche sich gegenseitig aufheben:

$$\partial a\Big(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial x'}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial x'}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y'}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y'}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial z'}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial z'}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}$$
$$-\frac{\partial x'}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial t}-\frac{\partial x'}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}-\frac{\partial y'}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial t}-\frac{\partial y'}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}-\frac{\partial z'}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial t}-\frac{\partial z'}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}\Big)$$
$$+\partial b\Big(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial x'}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial x'}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial y'}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial y'}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial z'}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial z'}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}$$
$$-\frac{\partial x'}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{\partial x'}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}-\frac{\partial y'}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{\partial y'}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}-\frac{\partial z'}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{\partial z'}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial t}\Big)$$
$$+\partial c\Big(\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial x'}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial x'}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial y'}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial y'}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial z'}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial z'}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial t}$$
$$-\frac{\partial x'}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{\partial x'}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial t}-\frac{\partial y'}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{\partial y'}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial t}-\frac{\partial z'}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t}-\frac{\partial z'}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial t}\Big).$$

§. 69. Irrthümlich nennt hier Lagrange e die halbe Excentricität.

§. 71. Die Formeln, welche Lagrange hier für $\partial\alpha$, $\partial\alpha_1$, $\partial\alpha_2$, $\partial\beta$, $\partial\beta_1$, $\partial\beta_2$, $\partial\gamma$, $\partial\gamma_1$ und $\partial\gamma_2$ entwickelt, ergeben sich aus den Bedingungsgleichungen des §. 14. nicht, und sind völlig unbegründet, da man nicht $x=X$, $y=Y$, $z=Z$ hat. (Vergl. Abschn. III. des ersten Theils, §. 10.)

§. 72. Man hat folglich:

$$\frac{\partial x}{\partial h}\frac{\partial x'}{\partial i}+\frac{\partial y}{\partial h}\frac{\partial y'}{\partial i}+\frac{\partial z}{\partial h}\frac{\partial z'}{\partial i}-\frac{\partial x'}{\partial h}\frac{\partial x}{\partial i}-\frac{\partial y'}{\partial h}\frac{\partial y}{\partial i}-\frac{\partial z'}{\partial h}\frac{\partial z}{\partial i}$$
$$=(X\frac{\partial\alpha}{\partial h}+Y\frac{\partial\beta}{\partial h})(X'\frac{\partial\alpha}{\partial i}+Y'\frac{\partial\beta}{\partial i})+(X\frac{\partial\alpha_1}{\partial h}+Y\frac{\partial\beta_1}{\partial h})(X'\frac{\partial\alpha_1}{\partial i}+Y'\frac{\partial\beta_1}{\partial i})$$
$$+(X\frac{\partial\alpha_2}{\partial h}+Y\frac{\partial\beta_2}{\partial h})(X'\frac{\partial\alpha_2}{\partial i}+Y'\frac{\partial\beta_2}{\partial i})-(X'\frac{\partial\alpha}{\partial h}+Y'\frac{\partial\beta}{\partial h})(X\frac{\partial\alpha}{\partial i}+Y\frac{\partial\beta}{\partial i})$$
$$-(X'\frac{\partial\alpha_1}{\partial h}+Y'\frac{\partial\beta_1}{\partial h})(X\frac{\partial\alpha_1}{\partial i}+Y\frac{\partial\beta_1}{\partial i})-(X'\frac{\partial\alpha_2}{\partial h}+Y'\frac{\partial\beta_2}{\partial h})(X\frac{\partial\alpha_2}{\partial i}+Y\frac{\partial\beta_2}{\partial i})$$
$$=(XY'-YX')\Big(\frac{\partial\alpha}{\partial h}\frac{\partial\beta}{\partial i}+\frac{\partial\alpha_1}{\partial h}\frac{\partial\beta_1}{\partial i}+\frac{\partial\alpha_2}{\partial h}\frac{\partial\beta_2}{\partial i}-\frac{\partial\beta}{\partial h}\frac{\partial\alpha}{\partial i}-\frac{\partial\beta_1}{\partial h}\frac{\partial\alpha_1}{\partial i}-\frac{\partial\beta_2}{\partial h}\frac{\partial\alpha_2}{\partial i}\Big),$$

und entsprechende Formeln für $[h, k]$ und $[i, k]$.

Die Werthe für $\partial\chi$, $\partial\pi$ und $\partial\sigma$, welche Lagrange in diesem Paragraphen berechnet, sind vollkommen richtig; es dient aber nur die erste dieser Grössen zur Vereinfachung der Rechnung. Dagegen stellen sie sehr einfach die momentanen Variationen der Lage der elliptischen Bahn vor. Denkt man sich nämlich die Ebene der Bahn um die Knotenlinie drehbar, also i veränderlich, und in einem Augenblicke die Ebene der Bahn mit der der x, y zusammenfallend, also $i=0$, so erhält man:

$$\partial\chi' = \partial k + \partial h, \quad \partial\pi' = \sin k\partial i, \quad \partial\sigma' = \cos k\partial i,$$

wo $h+k$ der Winkel ist, welchen der von einem Brennpunkte nach dem Perihel gehende Theil der grossen Axe mit der Axe der x macht. k ist der Winkel, welchen der von einem Brennpunkte nach dem Perihel gehende Theil der grossen Axe mit der Knotenlinie macht. $\partial\chi'$ ist das Element des Drehungswinkels der grossen Axe in ihrer Ebene um den Brennpunkt, ∂i das Element des Drehungswinkels der Bahnebene um die Knotenlinie. Es ist

$$\partial i = \sqrt{\partial\pi'^2 + \partial\sigma'^2} \quad \text{und} \quad \tang k = \frac{\partial\pi'}{\partial\sigma'}.$$

Hier verfällt Lagrange in einen sonderbaren Irrthum, indem er die Accente, welche offenbar bestimmte Werthe von $\partial\chi$, $\partial\pi$ und $\partial\sigma$ bezeichnen sollen, den Grössen ∂i und h (statt k) zutheilt.

§. 73. Mit Recht erklärt sich Bertrand in einer Note gegen die Anwendung der Grösse χ statt des Elementes k in den Ausdrücken $\frac{\partial\Omega}{\partial\chi}$, $\partial\chi$, $[a, \chi]$, $[b, \chi]$, $[c, \chi]$, $[h, \chi]$ und $[i, \chi]$. Ausserdem, dass χ nicht, wie gefordert wird, ein Element der elliptischen Bahn ist, dass es ferner eine unbestimmte Grösse ist, insofern es nur durch sein Differential bestimmt wird, stellt auch χ nicht, wie Lagrange behauptet, den Winkel vor, welchen die grosse Axe der Ellipse bei der Drehung auf ihrer beweglichen Ebene beschreibt: denn der Winkel h, der einen Theil dieses Drehungswinkels bildet, liegt in der Ebene der x, y, und fällt nur dann in die Ebene der Ellipse, wenn $i=0$, also $\chi=\chi'$ wird.

Ferner vergisst Lagrange, unter den partiellen Differentialquotienten von χ die Grösse $\frac{\partial\chi}{\partial h}=\cos i$ aufzuführen, wodurch er dann zu dem fehlerhaften Werthe von $[b, h]=0$ kommt. Der richtige Werth von $[b, h]$ ist $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{b}}\cos i$.

Für $[a, k]$, $[b, k]$, $[c, k]$ finde ich ferner nach Lagrange's

Formeln (§. 70.) und für $[h, i]$, $[h, k]$, $[i, k]$ nach meinen eigenen Formeln folgende Werthe:

$$[a, k]=0, \quad [b, k]=-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{b}}, \quad [c, k]=0,$$

$$[h, i]=-\sqrt{gb}\sin i, \quad [h, k]=0, \quad [i, k]=0.$$

§. 74. Der Fehler, welchen Lagrange bei der Berechnung des Werthes von $[b, h]$ macht, hat Einfluss auf die Werthe von $\frac{\partial\Omega}{\partial b}\partial t$ und $\frac{\partial\Omega}{\partial h}\partial t$ und auf die Werthe der Differentiale ∂i und $\partial\chi$. Ohne mich auf eine Correction der Lagrange'schen Formeln einzulassen, gebe ich sogleich meine eigenen, welche das Element k statt χ enthalten:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial b}\partial t=-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{b}}.(\cos i\partial h+\partial k),$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial h}\partial t=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{b}}.\cos i\partial b-\sqrt{gb}\sin i\partial i,$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial k}\partial t=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{b}}\cdot\partial b.$$

Mithin:

$$\partial b=2\sqrt{\frac{b}{g}}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial k}\partial t,$$

$$\partial i=\frac{1}{\sqrt{gb}\sin i}(\cos i\frac{\partial\Omega}{\partial k}-\frac{\partial\Omega}{\partial h})\partial t,$$

$$\partial k=-(2\sqrt{\frac{b}{g}}\cdot\frac{\partial\Omega}{\partial b}+\frac{\cot i}{\sqrt{gb}}\frac{\partial\Omega}{\partial i})\partial t.$$

§. 75. Auch die Formeln dieses Paragraphen, welche e statt b enthalten, sind bei Lagrange unvollständig. Ich erhalte, bei Anwendung von k statt χ:

$$[a, h]=-\frac{\cos i}{2}\sqrt{\frac{g}{a}(1-e^2)}, \quad [e, h]=e\cos i\sqrt{\frac{ga}{1-e^2}},$$

$$[h, i]=-\sqrt{ga(1-e^2)}\sin i,$$

$$[a, k]=-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}(1-e^2)}, \quad [e, k]=e\sqrt{\frac{ga}{1-e^2}}.$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a}\partial t = \tfrac{1}{2}\left(\frac{g}{a^2}\partial c - \cos i\sqrt{\frac{g}{a}(1-e^2)}\,\partial h - \sqrt{\frac{g}{a}(1-e^2)}\,\partial k\right),$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial e}\partial t = e\sqrt{\frac{ga}{1-e^2}}(\cos i\partial h + \partial k),$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial h}\partial t = \frac{\cos i}{2}\sqrt{\frac{g}{a}(1-e^2)}\,\partial a - e\cos i\sqrt{\frac{ga}{1-e^2}}\,\partial e - \sin i\sqrt{ga(1-e^2)}\,\partial i,$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial i}\partial t = \sqrt{ga(1-e^2)}\sin i\partial h,$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial k}\partial t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{a}(1-e^2)}\,\partial a - e\sqrt{\frac{ga}{1-e^2}}\,\partial e.$$

$$\partial c = \frac{a}{g}\left(2a\frac{\partial\Omega}{\partial a} + \frac{1-e^2}{e}\frac{\partial\Omega}{\partial e}\right)\partial t,$$

$$\partial e = -\frac{1}{e}\left(\sqrt{\frac{1-e^2}{ga}}\frac{\partial\Omega}{\partial k} + \frac{a}{g}(1-e^2)\frac{\partial\Omega}{\partial c}\right)\partial t,$$

$$\partial h = \frac{1}{\sqrt{ga(1-e^2)}\sin i}\frac{\partial\Omega}{\partial i}\partial t,$$

$$\partial i = \frac{1}{\sqrt{ga(1-e^2)}\sin i}\left(\cos i\frac{\partial\Omega}{\partial k} - \frac{\partial\Omega}{\partial h}\right)\partial t,$$

$$\partial k = \frac{1}{\sqrt{ga}}\left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{\partial\Omega}{\partial e} - \frac{\cot i}{\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial\Omega}{\partial i}\right)\partial t.$$

§. 76. Die Gleichungen dieses Paragraphen werden:

$$\partial a = 0,$$

$$\partial c = \frac{a}{g}\left(2a\frac{(\partial\Omega)}{\partial a} + \frac{1-e^2}{e}\frac{(\partial\Omega)}{\partial e}\right)\partial t,$$

$$\partial e = -\frac{1}{e}\sqrt{\frac{1-e^2}{ga}}\frac{(\partial\Omega)}{\partial k}\partial t,$$

$$\partial h = \frac{1}{\sqrt{ga(1-e^2)}\sin i}\frac{(\partial\Omega)}{\partial i}\partial t,$$

$$\partial i = \frac{1}{\sqrt{ga(1-e^2)}\sin i}\left(\cos i\frac{(\partial\Omega)}{\partial k} - \frac{(\partial\Omega)}{\partial h}\right)\partial t,$$

$$\partial k = \frac{1}{\sqrt{ga}}\left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\frac{(\partial\Omega)}{\partial e} - \frac{\cot i}{\sqrt{1-e^2}}\frac{(\partial\Omega)}{\partial i}\right)\partial t.$$

§. 77. Für $\partial\chi$ ist hier $\partial\chi'$ zu setzen; da $\frac{\partial\chi'}{\partial h}=1$, so ist

$$\partial\chi'=\frac{1}{e}\sqrt{\frac{1-e^2}{ga}}\,\frac{(\partial\Omega)}{\partial e}\,\partial t,$$

also

$$\partial\lambda=\partial\chi'-\sqrt{\frac{g}{a^3}}\cdot\partial c=\frac{1}{\sqrt{ag}}\left(\frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\,\frac{(\partial\Omega)}{\partial e}-2a\,\frac{(\partial\Omega)}{\partial a}\right)\partial t.$$

Dieser Werth von $\partial\lambda$ stimmt übrigens mit dem von Lagrange berechneten überein.

§. 78. Die hier gegebenen Transformationen von ∂e und $\partial\chi$, ∂h und ∂i werden unmöglich bei den von mir berechneten entsprechenden Werthen des §. 76.

§. 79. Zu bemerken ist, dass der Widerstand R auch eine Function der Dichtigkeit des sich Bewegenden ist, indem er letzterer verkehrt proportional ist. Nennt man die Dichtigkeit des sich Bewegenden Δ, so ist anstatt Γ in den Werth von $-R\delta r$ die Grösse $\frac{\Gamma}{\Delta}$ einzuführen.

Die Werthe für δx, δy, δz sind:

$$\begin{aligned}
\delta x&=\alpha\delta X+\beta\delta Y+X\delta\alpha+Y\delta\beta,\\
\delta y&=\alpha_1\delta X+\beta_1\delta Y+X\delta\alpha_1+Y\delta\beta_1,\\
\delta z&=\alpha_2\delta X+\beta_2\delta Y+X\delta\alpha_2+Y\delta\beta_2;
\end{aligned}$$

und daher:

$$\partial x\delta x+\partial y\delta y+\partial z\delta z=\partial X\delta X+\partial Y\delta Y+(X\partial Y-Y\partial X)\delta\chi,$$

wie bei Lagrange, obgleich dessen Werthe für $\delta\alpha$, $\delta\alpha_1$, $\delta\alpha_2$, $\delta\beta$, $\delta\beta_1$, $\delta\beta_2$ (§. 71.) zu verwerfen sind.

§. 80. Es wird hier vorausgesetzt, dass die beiden Attractionscentra eine solche Lage haben, dass die Coordinaten x, y, z in Bezug auf beide zugleich positiv sind; es könnte das zweite Centrum aber auch eine solche Lage haben, dass eine oder zwei oder alle drei Coordinaten in Bezug auf dasselbe negativ wären. Wäre z. B. in Bezug auf dasselbe x negativ, y und z aber positiv, so würde man die drei Differentialgleichungen haben:

$$\partial.\frac{\delta T}{\delta\partial x}-\frac{\delta T}{\delta x}+\frac{\delta V}{\delta x}-\frac{Q\partial q}{\partial x}=0,\quad \partial.\frac{\delta T}{\delta\partial y}-\frac{\delta T}{\delta y}+\frac{\delta V}{\delta y}+\frac{Q\partial q}{\partial y}=0,$$

$$\partial.\frac{\delta T}{\delta\partial z}-\frac{\delta T}{\delta z}+\frac{\delta V}{\delta z}+\frac{Q\partial q}{\partial z}=0.$$

Die drei mit (1), (2), (3) bezeichneten Gleichungen sind respective mit ∂r, $\partial \psi$, $\partial \varphi$ zu multipliciren, und nicht, wie im Texte steht, mit $\partial \psi$, $\partial \varphi$, ∂r.

Die vierte Gleichung enthält auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens H, und nicht, wie im Texte steht, $2H$; eine Verbesserung, die auf alle abgeleiteten Gleichungen in diesem und dem folgenden Paragraphen zu übertragen ist.

Ferner ist auf S. 96. zu lesen:

$$\frac{r^2 \cos^2\psi \partial\varphi^2}{\partial t^2} = \frac{4B^2h^2}{4h^2r^2 - (r^2 + h^2 - q^2)^2},$$

und ebenso ist auch in der Gleichung (a) und in den Gleichungen des folgenden Paragraphen B^2 mit h^2 zu multipliciren.

§. 81. Die Gleichung (b) nimmt nach meiner Rechnung folgende Form an:

$$\frac{\partial . r^2 \partial . q^2}{2\partial t^2} - \frac{\alpha(3r^2 + q^2 - h^2)}{r} - \frac{\beta(3q^2 + r^2 - h^2)}{q}$$
$$= 2H(r^2 + q^2) + C + Mr^2q^2 + \frac{N}{rq},$$

wo M und N willkührliche Constanten sind, welche Lagrange $=0$ setzt, um die Gleichungen (f), (g) und (h) integriren zu können.

Nimmt man also den Lagrange'schen Ausdruck für (b) an, indem man jedoch auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens $2H(r^2 + q^2) + C$ setzt, so erhält man doch andere Gleichungen, als Lagrange, welcher verschiedene Rechnungsfehler macht. Von diesen Gleichungen führe ich der Kürze halber nur folgende an:

(e)

$$\frac{(s^2 - u^2)^2 \partial s^2}{8\partial t^2} - 2(\alpha + \beta)s^3 + 2h^2(\alpha + \beta)s = H(s^4 - h^4) + C(s^2 - h^2) - 2B^2h^2,$$

$$\frac{(s^2 - u^2)^2 \partial u^2}{8\partial t^2} - 2(\alpha - \beta)u^3 + 2h^2(\alpha - \beta)u = H(u^4 - h^4) + C(u^2 - h^2) - 2B^2h^2.$$

(g) $\partial t =$

$$\frac{s^2 \partial s \sqrt{2}}{4\sqrt{Hs^4 + 2(\alpha + \beta)s^3 + Cs^2 - 2h^2(\alpha + \beta)s - Hh^4 - (2B^2 + C)h^2}}$$
$$- \frac{u^2 \partial u \sqrt{2}}{4\sqrt{Hu^4 + 2(\alpha - \beta)u^3 + Cu^2 - 2h^2(\alpha - \beta)u - Hh^4 - (2B^2 + C)h^2}}.$$

Besonders fehlerhaft aber ist (h), deren richtiger Werth folgender ist:

$$(h) \qquad \partial\varphi = \frac{Bh^2}{(s^2-h^2)(h^2-u^2)}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{s^2\partial s\sqrt{2}}{\sqrt{Hs^4+2(\alpha+\beta)s^3+Cs^2-2h^2(\alpha+\beta)s-Hh^4-(2B^2+C)h^2}} \\ -\dfrac{u^2\partial u\sqrt{2}}{\sqrt{Hu^4+2(\alpha-\beta)u^3+Cu^2-2h^2(\alpha-\beta)u-Hh^4-(2B^2+C)h^2}} \end{array} \right\},$$

so dass die Variablen nicht gesondert sind.

Der richtige Werth von (h) eignet sich nicht für die Integration. Die Lösung der Aufgabe, alle Variablen als Functionen von r darzustellen, ist also zunächst auf q, ψ und t zu beschränken. Da man aber q und t als Functionen von r kennt, so kann man auch r und q in t bestimmen und also nach §. 80. φ als Function von t finden, mithin auch als Function von r.

§. 82. Auch hier findet sich wieder ein Rechnungsfehler, welcher von dem grössten Einflusse auf das Resultat ist. Man muss nämlich zum ersten Gliede des Integrals (b) folgende Grösse addiren:

$$\gamma[5r^2q^2l.r^2q^2+\tfrac{3}{2}(r^4+q^4)-h^2(r^2+q^2)];$$

ferner zum ersten Gliede der Gleichung (c):

$$\frac{\gamma}{2}[10r^2q^2(r^2+q^2-h^2)l.r^2q^2+r^6+q^6+5r^2q^2(r^2+q^2)-h^2(r^4+q^4-4r^2q^2)];$$

mithin zum ersten Gliede der Gleichung (d):

$$\frac{\gamma}{2}[10r^2q^2((r\pm q)^2-h^2)l.r^2q^2+r^6+q^6\pm 6rq(r^4+q^4)+5r^2q^2(r^2+q^2)$$
$$-h^2((r^2-q^2)^2-2r^2q^2\pm 4rq(r^2+q^2))].$$

Man müsste also zu den Polynomen mit s und u unter dem Wurzelzeichen in den Gleichungen (f), (g), (h) beziehungsweise folgende beide Ausdrücke addiren:

$$-\frac{\gamma}{16}[5(s^2-h^2)(s^2-u^2)^2l.\left(\frac{s^2-u^2}{4}\right)^2+3s^6+10s^4u^2-5s^2u^4$$
$$-h^2(3s^4+10s^2u^2-5u^4)]$$

und

$$-\frac{\gamma}{16}[5(u^2-h^2)(s^2-u^2)^2l.\left(\frac{s^2-u^2}{4}\right)^2+3u^6+10u^4s^2-5u^2s^4$$
$$-h^2(3u^4+10u^2s^2-5s^4)],$$

in welchen die Variablen nicht gesondert sind, so dass die Gleichungen nicht mehr integrirt werden können. Die Erweiterung der Aufgabe auf eine dritte, der Entfernung direct proportionale Kraft, welche den Körper nach dem Centrum des Kegelschnitts zieht, ist also unstatthaft.

Note IV. des zweiten Bandes, von Ossian Bonnet.

Man sieht nicht ein, weshalb

$$2N(\partial x \cos\alpha + \partial y \cos\beta + \partial z \cos\gamma) = 0$$

ist.

---

§. 84. Wenn das nichtige Attractionscentrum auf dem Perimeter der Ellipse liegt, so wird nach meiner Berechnung:

$$B = 0 \text{ (nach (e))},$$
$$C = -2h(\alpha + Hh) \text{ (nach (b))}.$$

Substituirt man diese Werthe, so geht das Polynom

$$Hs^4 + 2\alpha s^3 + Cs^2 - 2h^2\alpha s - Hh^4 - (2B^2 + C)h^2$$

über in

$$H(s+h)^2(s-h)^2 + 2\alpha(s+h)(s-h)^2;$$

dieselbe Veränderung erleidet das Polynom mit u.

Setzt man nun nach §. 15.:

$$\alpha = g \text{ und } H = -\frac{g}{2a},$$

so erhält man für (f) und (g) die Werthe:

(f)

$$\frac{\partial s}{(s-h)\sqrt{2g(s+h) - \frac{g}{2a}(s+h)^2}} = \frac{\partial u}{(u-h)\sqrt{2g(u+h) - \frac{g}{2a}(u+h)^2}};$$

(g)

$$\partial t = \frac{s^2 \partial s \sqrt{2}}{4(s-h)\sqrt{2g(s+h) - \frac{g}{2a}(s+h)^2}} - \frac{u^2 \partial u \sqrt{2}}{4(u-h)\sqrt{2g(u+h) - \frac{g}{2a}(u+h)^2}};$$

aus welchen man ableitet:

$$\partial t = \frac{(s+h)\partial s\sqrt{2}}{4\sqrt{g}\sqrt{2(s+h)-\frac{(s+h)^2}{2a}}} - \frac{(u+h)\partial u\sqrt{2}}{4\sqrt{g}\sqrt{2(u+h)-\frac{(u+h)^2}{2a}}}$$

$$= \frac{(s+h)\partial s}{4\sqrt{g}\sqrt{(s+h)-\frac{(s+h)^2}{4a}}} - \frac{(u+h)\partial u}{4\sqrt{g}\sqrt{(u+h)-\frac{(u+h)^2}{4a}}}.$$

Man hat ferner nach meiner Berechnung für (h) den Werth:

$$\partial\varphi = 0, \text{ also } \varphi = \text{const.},$$

wie es sein muss, da h, die Verbindungslinie der beiden Attractionscentren, auf der Ebene der x, y senkrecht steht, was also gleichfalls von der Ebene der Bahn des beweglichen Körpers gelten muss.

§. 85. Nach meiner Berechnung ist:

$$\int \frac{z\partial z}{\sqrt{z-\frac{z^2}{4a}}} = f(z)$$

zu setzen. $f(z)$ in eine Reihe entwickelt, liefert dann:

$$f(z) = \tfrac{2}{3}z^{\frac{3}{2}} + \frac{z^{\frac{5}{2}}}{5.4a} + \frac{3z^{\frac{7}{2}}}{4.4.7.4a^2} + \ldots.$$

Note V. des zweiten Bandes, von Lagrange.

§. 1. Nach §. 84. ist die Formel für die Zeit, in welcher der Körper einen Bogen der Ellipse durchläuft:

$$t = \frac{1}{4\sqrt{g}} \int \frac{z\partial z}{\sqrt{z-\frac{z^2}{a}}},$$

wo $a =$ der grossen Axe oder, nach meiner Berechnung, $=$ der doppelten grossen Axe, z respective $= b+c$ und $b-c$ ist. Hier aber setzt Lagrange nach Lambert $z = \frac{b+c}{2}$ oder p und $\frac{b-c}{2}$ oder q, und findet für t:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2F}} \int \frac{z\partial z}{\sqrt{z-\frac{z^2}{a}}}.$$

Führt man nun in diese Formel für z den Werth $\frac{z}{2}$ ein, der offenbar an die Stelle des früheren z getreten ist, so wird:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2F}} \int \frac{\frac{z}{4}\partial z}{\sqrt{\frac{z}{2} - \frac{z^2}{4a}}} = \frac{1}{4\sqrt{F}} \int \frac{z\partial z}{\sqrt{z - \frac{z^2}{2a}}}.$$

ein Werth, der von Lagrange's Formel in §. 84. abweicht, meine Berechnung dagegen bestätigt.

§. 2. Die Formeln

$$\varphi - \alpha = x - y,$$

$$e(\sin\varphi - \sin\alpha) = \sin x - \sin y$$

sind nicht nothwendig, aber möglich, und zugleich die einfachsten, und führen zu wichtigen Consequenzen.

Alle anderen Formeln, die man aus der Grundgleichung:

$$a^{\frac{3}{2}}[\varphi - \alpha + e(\sin\varphi - \sin\alpha)] = a^{\frac{3}{2}}(x + \sin x) - a^{\frac{3}{2}}(y + \sin y)$$

ableiten könnte, führen nicht zur analytischen Bestimmung von q und p; deshalb sind diese Formeln die einzig zulässigen.

§. 3. Die Zeit, welche nöthig ist, um den Bogen, zu welchem die Sehne δ gehört, in der Ellipse mit der Excentricität e zu durchlaufen, ist gleich der Zeit, welche nöthig ist, um den Theil $q - p = \delta$ der grossen Axe zu durchlaufen; q ist der längere Radius vector der Ellipse mit der Excentricität 1 und entspricht dem Anfange der Zeit, p dem Ende. q ist daher Minuendus, p Subtrahendus; nicht umgekehrt, wie man aus der Wahl und Stellung der Buchstaben im Texte zu schliessen versucht wird.

§. 5. Das Integral von

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}(u\partial u - \partial u)}{\sqrt{e^2 - u^2}}$$

ist:

$$-a^{\frac{3}{2}}\left(\operatorname{Arctang}\frac{u}{\sqrt{e^2 - u^2}} + \sqrt{e^2 - u^2}\right) = -a^{\frac{3}{2}}\left(\operatorname{Arcsin}\frac{u}{e} + \sqrt{e^2 - u^2}\right),$$

wo $\sqrt{a^3}$ negativ genommen werden muss, um für die Zeit, in welcher der Bogen der Ellipse durchlaufen wird, einen positiven Werth zu erhalten.

Es ist mithin:

$$\operatorname{Arc\,sin}\frac{u}{e}+\sqrt{e^2-u^2}-\operatorname{Arc\,sin}\frac{s}{e}-\sqrt{e^2-s^2}$$
$$=\operatorname{Arc\,sin}x+\sqrt{1-x^2}-\operatorname{Arc\,sin}y-\sqrt{1-y^2},$$

woraus sich die beiden Gleichungen ableiten lassen:

$$\sqrt{e^2-u^2}-\sqrt{e^2-s^2}=\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-y^2}$$

und

$$\operatorname{Arc\,sin}\frac{u}{e}-\operatorname{Arc\,sin}\frac{s}{e}=\operatorname{Arc\,sin}x-\operatorname{Arc\,sin}y.$$

Aus letzterer erhält man nun wieder die Lagrange'sche Gleichung:

$$\frac{us+\sqrt{e^2-u^2}\sqrt{e^2-s^2}}{e^2}=xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}.$$

§. 6. Der Lagrange'schen Gleichung

$$x-y=\sqrt{2-2n-m^2},$$

welche aus der Gleichung zwischen den Quadraten beider Ausdrücke abgeleitet wird, muss vielmehr folgende Form gegeben werden:

$$y-x=\sqrt{2-2n-m^2},$$

um Radius vector $a(1-x)>$ Radius vector $a(1-y)$ zu erhalten.

§. 7. Man erhält auf diese Weise:

$$q=y-x,$$

$$y=\frac{u+s+q}{2}\quad\text{und}\quad x=\frac{u+s-q}{2},$$

$$a(1-x)=\frac{a(1-u)+a(1-s)+aq}{2}\quad\text{und}\quad a(1-y)=\frac{a(1-u)+a(1-s)-aq}{2},$$

wie es sein muss, da $a(1-x)$ dem grösseren Radius vector $a(1-u)$ der Ellipse mit der Excentricität e entspricht.

§. 8. Der hier ausgesprochene Lehrsatz ist richtig unter der Voraussetzung, dass die willkührlichen Constanten, welche die Differentiale beim Integriren liefern, sich unter einander aufheben oder sämmtlich Null seien. Strenger würde folgender Ausdruck des Theorems sein:

$$\int_{\varrho}^{r} \frac{r\partial r}{\sqrt{-p+2r-\frac{r^2}{a}}} = \int_{\zeta}^{z} \frac{z\partial z}{\sqrt{2z-\frac{z^2}{a}}}.$$

§. 10. Die richtigen Werthe von a, b, c sind:

$$a = \frac{\left(\frac{M}{2}\right)^2 - HN - ABM + A^2N + HB^2}{C^2},$$

$$b = -\frac{MA - 2HB}{C},$$

$$c = \frac{MB - 2NA}{C} + H.$$

§. 11. Folglich ist:

$$\frac{A}{C} = \frac{Mb + 2H(H-c)}{4HN - M^2},$$

$$\frac{B}{C} = \frac{M(H-c) + 2Nb}{4HN - M^2},$$

$$C = \frac{\sqrt{\left(\frac{M}{2}\right)^2 - HN}}{\sqrt{a + M\frac{AB}{C^2} - N\frac{A^2}{C^2} - H\frac{B^2}{C^2}}}.$$

§. 12. Der Lehrsatz dieses Paragraphen:

$$\frac{r\partial r}{\sqrt{H + Mr + Nr^2}} = \frac{x\partial x}{\sqrt{Mx + Nx^2}} - \frac{y\partial y}{\sqrt{My + Ny^2}}$$

ist jedoch insofern nicht eine blosse Verallgemeinerung des Lambert'schen Lehrsatzes in der Form, in welcher ihn Lagrange in §. 8. darstellt, als hier auf der linken Seite des Gleichheitszeichens nur ein Differential vorkommt, während dort eine Differenz zweier analogen Differentiale sich vorfindet. Soll beim Integriren der Ausdruck für die Zeit, in welcher ein Bogen der Ellipse durchlaufen wird, erhalten werden, so muss man setzen:

$$\int \frac{r\partial r}{\sqrt{H + Mr + Nr^2}} - \text{Const.} = \int \frac{x\partial x}{\sqrt{Mx + Nx^2}} - \int \frac{y\partial y}{\sqrt{My + Ny^2}}$$

und die willkührlichen Constanten der Integration auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens sich unter einander aufheben lassen oder gleich Null setzen.

Setzt man:

$$h = -k^2$$

und

$$a + bx + cx^2 + Mx^3 + Nx^4 = (x-k)^2[l + M(x+k) + N(x+k)^2],$$

so wird:

$$a + bx + cx^2 = l(x-k)^2 - Mk(x^2 + kx - k^2) + N(-2k^2x^2 + k^4),$$

mithin:

$$a = lk^2 + Mk^3 + Nk^4, \quad b = -2kl - Mk^2, \quad c = l - Mk - 2Nk^2.$$

§. 13. Bestimmt man p, e, α, β, γ aus den fünf Gleichungen:

$$\frac{2\alpha}{e} = \frac{4B}{C}, \quad -\frac{2\alpha p}{e} + \delta^2 = \frac{4A}{C}, \quad \frac{4H}{C^2} = -\frac{\beta^2 p^2}{p^2}, \quad \frac{2M}{C^2} = \frac{\beta^2 p}{e^2},$$

$$\frac{4N}{C^2} = -\frac{\beta^2(1-e^2)}{e^2},$$

so erhält man:

$$p = -\frac{2H}{M}, \quad e = \sqrt{1 - \frac{4HN}{M^2}}, \quad \beta = \frac{1}{C}\sqrt{4N - \frac{M^2}{H}},$$

$$\alpha = \frac{2B}{C}\sqrt{1 - \frac{4HN}{M^2}},$$

$$\gamma = \frac{1}{C}\sqrt{4\left(AC - \frac{2BCH}{M}\right) + \frac{M^2}{H} - 4N - 4B^2 + \frac{16B^2HN}{M^2}},$$

so dass p und e nur durch Constanten, α, β und γ aber auch durch willkührliche Constanten bestimmt werden.

Lagrange's Ausdruck für die Zeit, in welcher ein Bogen der Ellipse durchlaufen wird, ist zwar nach §. 10. richtig, insofern

$$\frac{r\partial r}{\sqrt{-p + 2r - \frac{r^2}{\pi}}}$$

unter die allgemeine Form

$$\frac{r\partial r}{\sqrt{H + Mr + Nr^2}}$$

fällt; der hier gegebene Beweis für die Richtigkeit des Ausdrucks ist aber fehlerhaft. Hier muss vielmehr diese Zeit durch die Differenz zweier Integrale von der Form

$$\int \frac{(z^2+h)\partial z}{\sqrt{a+bz+cz^2+MEz^3+NEz^4}}$$

dargestellt werden, wo a, b, c, h willkührliche Constanten sind, $E=\frac{4e^2}{C^2\beta^2 p}$, also ebenfalls eine willkührliche Constante ist, und die Variable z in dem einen der beiden Integrale die halbe Summe, in dem anderen die halbe Differenz der beiden Vectoren r und u ist.

§. 14. Setzt man $x=\frac{\delta}{2}+\mu$ und $y=\frac{\delta}{2}+\nu$, so geht die Gleichung

$$2C(x-y)(A+Br+Cs)=\sqrt{Y}+\sqrt{X}$$

über in

$$(\mu-\nu)(A+B\delta+B\mu+B\nu)=\sqrt{\varDelta+\varDelta'\nu}+\sqrt{\varDelta+\varDelta'\mu}$$

unter Vernachlässigung der zweiten und höheren Potenzen und Producte von $\frac{\delta}{2}$, μ, ν; mithin

$$(\sqrt{\mu}-\sqrt{\nu})(A+B\delta+B\mu+B\nu)=\sqrt{\varDelta'};$$

also $\sqrt{\varDelta'}$ unendlich klein und $\varDelta'=0$.

Lagrange zeigt in diesem Paragraphen, welcher den Fall, wo das Centrum des Vectors u in den Perimeter der Ellipse fällt, in völliger Allgemeinheit behandeln soll, bloss, dass der Lambert'sche Lehrsatz in der Form des §. 12. für den Fall gilt, wo $u=0$, also $x=y$ ist. Er sucht zwar den Schlusssatz als allgemein bewiesen darzustellen; aber dieser Schluss ist nicht gerechtfertigt.

---

§. 92. Wenn man in die Function Ω' statt der Coordinaent ξ', η', ζ', ξ'', η'', ζ'', ξ''' u. s. w. ihre Werthe in t setzt, so muss g für den Planeten m' gleich $m+m'$, für den Planeten m'' gleich $m+m''$ u. s. w. gesetzt werden; die Formeln des §. 74. folgd. liefern die Variationen der sechs Elemente der Bahn des Planeten m', wo $g=m+m'=g'$ ist.

§. 94. Die primitiven Coordinaten x, y, z, welche die Lage der Sonne bestimmen, werden hier offenbar nicht auf einen beliebigen Punkt im Weltraume, sondern auf den Schwerpunkt des Sonnensystems als Anfangspunkt bezogen, da angenommen wird, dass die Ebenen sämmtlicher Planetenbahnen durch diesen Punkt

hindurchgehen. Die Grössen A, B, A_1, B_1 werden vermöge dieser Annahme ganz streng bestimmt, während sie nach der Voraussetzung des vorigen Paragraphen, nach welcher sämmtliche Planetenbahnen auf den Mittelpunkt der Sonne als Brennpunkt bezogen wurden, nur näherungsweise bestimmt wurden.

Die Winkel Φ' und Φ'' des vorigen Paragraphen werden auf den Mittelpunkt der Sonne als Scheitelpunkt bezogen und sind daher nur näherungsweise richtig.

§. 95. Um die Glieder von Ω', welche mit m''' multiplicirt sind, zu erhalten, müssen nicht nur alle mit zwei Accenten versehenen Buchstaben drei bekommen, sondern auch K, hier K_1'', der Winkel, welchen der nach dem Perihel gehende Theil der grossen Axe der Bahn von m'' mit der Knotenlinie von m' und m'' macht, wird einen neuen Werth erhalten, den man, da dieser Winkel in der Ebene der Bahn des Planeten m''' liegt, mit K_1''' bezeichnen kann; ebenso geht H, hier H_1'', der Winkel, welchen die Knotenlinie von m' und m'' mit der auf die Ebene der Bahn von m' projicirten Axe der x macht, in H_1''' über, welcher in derselben Ebene liegt, aber bis zum Knotenpunkte von m' und m''' geht; u. s. w.

Die Richtigkeit der Formel

$$\frac{1}{\varrho_1''}=\frac{1}{\sqrt{\varrho'^2+\varrho''^2-2\varrho'\varrho''\cos(\Phi'-\Phi''-H-K)}}$$

$$+\frac{\varrho'\varrho''[\cos(\Phi'+\Phi''-H+K)-\cos(\Phi'-\Phi''-H-K)]}{[\varrho'^2+\varrho''^2-2\varrho'\varrho''\cos(\Phi'-\Phi''-H-K)]^{\frac{3}{2}}}(\sin\tfrac{1}{2}J_1'')^2,$$

auf welche sich die Entwickelung des Werthes von Ω' gründet, lässt sich nicht beweisen.

§. 96. Die Werthe von Φ' und Φ'' stimmen mit denen der §§. 21. und 22. nicht genau überein, selbst abgesehen davon, dass sie dort nicht genau berechnet worden sind.

Man vermisst überhaupt in der ganzen folgenden Entwickelung dieses Paragraphen die sonstige Klarheit und Genauigkeit Lagrange's.

Von den mit $\sin^2\frac{J_1''}{2}$ multiplicirten Gliedern bleibt bei Entwickelung der Producte der Cosinusse nur ein von u' und u'' unabhängiges Glied zurück, dessen Werth ist:

$$-a'a''[a', a'']_1\sin^2\frac{J_1''}{2}$$

oder:

$$-\tfrac{1}{2}a'a''[a', a'']_1 \sin^2\frac{J_1''}{2}.$$

Der Werth von $\frac{\varrho'}{\varrho''^2}$ ist:

$$\frac{a'}{a''^2}[1 - e'\cos u' + 2e''\cos u'' + \frac{e'^2}{2}(1 - \cos 2u') + \frac{e''^2}{2}(1 + 5\cos 2u'') \\ - 2e'e''\cos u'\cos u''];$$

mithin ist $\frac{\varrho'\cos\varphi}{\varrho''^2}$, indem man alle periodischen Glieder weglässt,

$$= \frac{a'}{a''^2}(1 + \frac{e'^2}{2} + \frac{e''^2}{2})\cos L$$

und keineswegs $= 0$.

§. 98. Auch die Rechnungen dieses Paragraphen enthalten viele Fehler. Vollkommen richtig aber ist die Bestimmung des Werthes der Coefficienten (a', a''), $(a', a'')_1$ u. s. w., $[a', a'']$, $[a', a'']_1$ u. s. w. als Functionen von a', a'' durch Zerlegung des Ausdrucks $a'^2 - 2a'a''\cos\varphi + a''^2$ in seine beiden imaginären Factoren

$$(a' - a''e^{\varphi\sqrt{-1}})(a' - a''e^{-\varphi\sqrt{-1}})$$

und Entwickelung der $-\frac{1}{2}$ten und $-\frac{3}{2}$ten Potenz eines jeden dieser Factoren nach dem Binomialtheorem. Auch die Prämissen, auf welchen diese Deduction ruht, sind völlig richtig.

§. 99. Ueber die Bestimmung des Winkels L als Function von χ', χ'' ist zu bemerken, dass hier die unrichtigen Formeln des §. 71. für $\partial\alpha$, $\partial\alpha_1$, $\partial\alpha_2$ benutzt worden sind. Aber selbst abgesehen hiervon würde der Werth von L, aus seinem Differentiale abgeleitet, unbestimmt sein; und χ würde die Summe zweier in verschiedenen Ebenen befindlichen Winkel vorstellen, da hier die Bahnen von m' und m'' zwar unter einander, aber nicht mit der Ebene der x, y zusammenfallend gedacht werden.

§. 100. Die Function $(\Omega')_1$ enthält die Excentricitäten und die Oerter der Perihelien der Planetenbahnen, nicht aber, wie der Text sagt, die Oerter der Aphelien, da $\chi = h + k$, wobei freilich ohne Grund die Ebene des Winkels k mit der Ebene des Winkels h zusammenfallend gedacht wird. Ebenso die Function Φ in den folgenden Paragraphen.

§. 103. Abgesehen davon, dass die hier gegebenen Gleichun-

gen für $\frac{\partial m'}{\partial t}$, $\frac{\partial n'}{\partial t}$, $\frac{\partial m''}{\partial t}$ u. s. w. wegen unrichtiger Prämissen, aus denen sie abgeleitet sind, verworfen werden müssen, wäre auch die verschiedene Bedeutung der Buchstaben m' und m', m'' und m'' u. s. w. leicht eine Quelle von Missverständnissen.

§. 106. Setzt man

$$x=1-\xi,\quad y=1-\eta,\quad z=1-\zeta;$$

so wird:

$$\xi=2(\tfrac{1}{2}J_{,}'')^2=\tfrac{1}{2}J_{,}''^2,\quad \eta=2(\tfrac{1}{2}J_{,}''')^2=\tfrac{1}{2}J_{,}'''^2,\quad \zeta=2(\tfrac{1}{2}J_{,,}''')^2=\tfrac{1}{2}J_{,,}'''^2,$$

$$u^2=-2(\zeta\eta+\xi\zeta+\eta\xi)-\xi^2-\eta^2-\zeta^2+4(\xi+\eta+\zeta-1)$$

unter Vernachlässigung der Grössen dritter Dimension. Endlich ist

$$\partial\xi=Cu\partial t,\quad \partial\eta=Bu\partial t,\quad \partial\zeta=Au\partial t.$$

Wie bei Lagrange, wird

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-(A+B+C)^2 u.$$

ξ, η, ζ enthalten t nur in $\cos(\mu t+k)$, wie man durch Integration findet; z. B. für ξ:

$$\xi=C\int u\partial t+\text{const.}=CK\int\sin(\mu t+k)\partial t+\text{const.}$$

$$=CK\cos k\int\sin\mu t\partial t+CK\sin k\int\cos\mu t\partial t+\text{const.}$$

$$=\frac{CK}{\mu}\cos k\int\sin\mu t\partial.\mu t+\frac{CK}{\mu}\sin k\int\cos\mu t\partial.\mu t+\text{const.}$$

$$=-\frac{CK}{\mu}\cos(\mu t+k)+\text{const.}$$

Wegen der willkührlichen Constanten der Integration wird man ξ, η, ζ und folglich $J_{,}''$, $J_{,}'''$, $J_{,,}'''$ nicht völlig genau aus diesen Formeln finden können; wohl aber z. B. die jährliche Variation der Neigungswinkel.

Uebrigens ist die Annahme, dass ξ, η, ζ sämmtlich sehr klein seien, auf welche sich die ganze Beweisführung gründet, falsch: denn $\eta=1-\cos\beta$ ist, da β ein stumpfer Winkel ist, $=1+\frac{e}{f}$, wo $\frac{e}{f}$ ein ächter Bruch ist. Ferner ist $\eta=2\sin^2\frac{\beta}{2}=2\cos^2\frac{J_{,}'''}{2}$, wofür man nicht $2(\frac{1}{2}J_{,}''')^2$ setzen darf, da $\frac{J_{,}'''}{2}$ ein sehr kleiner Winkel ist.

Literarischer Bericht
CXXXIX.

Anfang Juni d. J. starb zu Pavia der ausgezeichnete Physiker und Mathematiker, Professor an der dortigen Universität,

Johann Joseph Belli,

correspondirendes Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Wien und vieler anderer gelehrten Gesellschaften, geboren am 25sten November 1791 in Calasca in Piemont.

Mathematischer und physikalischer Unterricht.

Die uns gütigst mitgetheilte

Anzeige der Vorlesungen der Grossherzoglich Badischen Polytechnischen Schule zu Carlsruhe für das Jahr 1860—61

liefert von Neuem ein sehr anziehendes Bild von der grossartigen Einrichtung dieser berühmten, von einer grossen Anzahl von Schülern besuchten Lehranstalt und der Vollständigkeit des Unterrichts an derselben. Die Schule enthält drei allgemeine mathematische Klassen; ferner sieben Fachschulen, nämlich eine Ingenieurschule, Bauschule, Forstschule, Chemisch-technische Schule, Maschinenbauschule, Handelsschule und eine Postschule; endlich eine aus zwei Klassen bestehende Vorschule; jede Klasse und Fachschule hat ihren besonderen Vorstand. Ausserdem fehlen Allgemein bildende Curse in grosser Anzahl keineswegs, und praktische Uebun-

gen jeder Art natürlich noch weniger; eben so sind Sammlungen und Institute in grosser Anzahl und mit vortrefflichster Ausstattung vorhanden. Die Aufnahmsbedingungen sind ausführlich mitgetheilt, mit einem vollständigen Verzeichnisse aller an der Anstalt wirkenden Lehrer, Vorstände und Directoren nebst den ihnen zugetheilten einzelnen Unterrichtszweigen.

Indem wir für die Mittheilung dieses Programms unsern verbindlichsten Dank aussprechen, ersuchen wir zugleich die Vorstände anderer polytechnischer Lehranstalten recht sehr um ähnliche Mittheilungen, über deren Eingang wir jederzeit im Literarischen Bericht die gebührende Anzeige machen werden. Bei dem grossen Antheile, welchen wir an allen solchen von der Zeit unabweislich geforderten Lehranstalten nehmen, haben alle Mittheilungen dieser Art für uns ein grosses Interesse, und wir glauben uns nicht zu irren, wenn wir annehmen, dass viele Leser unserer Zeitschrift sich in gleichem Falle befinden, und für solche Mittheilungen wie vorstehende uns danken werden. G.

Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

Librorum in Bibliotheca speculae Pulcovensis anno 1858 exeunte contentorum catalogus systematicus. Edendum curavit et praefatus est Otto Struve, munere directoris speculae Pulcovensis fungens, Academiae imperialis scientiarum Petropolitanae socius. Petropoli. 1860. 8° maj.

Wir beeilen uns die Leser des Archivs auf diesen so eben erschienenen, 970 Seiten im grössten Octav-Format umfassenden Catalog der grossen mathematisch-astronomisch-physikalischen Bibliothek der Pulkowaer Sternwarte aufmerksam zu machen, welcher keineswegs für einen blossen Büchercatalog zu halten, sondern nach unserer Meinung vielmehr als ein sehr wichtiges Hülfsmittel für die Kenntniss der älteren und neueren Literatur der genannten Wissenschaften zu betrachten ist, für dessen Publication Herr Otto Struve jedenfalls den grössten Dank und die grösste Anerkennung verdient. Weshalb dieser Catalog nach unserer Meinung für die mathematisch-astronomische Literatur so wichtig ist, wird sich sogleich ganz von selbst ergeben, wenn wir über seine Einrichtung etwas genauer berichtet haben werden.

Der grosse Reichthum der hier verzeichneten Schriften aus allen Jahrhunderten findet in der Zahl von 970 Seiten im grössten Octav-Format, welche der Catalog umfasst, ohne weitere Auseinandersetzung seine Bestätigung. — Hiernach aber ist hauptsächlich die bis in's kleinste Detail gehende systematische Anordnung hervorzuheben, so dass ein Jeder, wer sich über irgend eine Partie eine literarische Uebersicht verschaffen und die in dieselbe einschlagenden Schriften kennen lernen will, den betreffenden Artikel bloss aufzuschlagen braucht, um seinen Zweck auf der Stelle zu erreichen. Wer, um nur ein Beispiel anzuführen, über die Cometen-Literatur Belehrung sucht, findet auf S. 761—818, also auf 57 Seiten, das Verzeichniss einer Sammlung von Schriften über die Cometen, welche gewiss die grösste und vollständigste ist, die es überhaupt giebt. Hier findet er nun aber im Speciellen wieder zuerst: Generaliora de Cometis. Dann Cometae periodici, worin alle mit Sicherheit als periodisch erkannte Cometen (acht an der Zahl) nach ihren einzelnen Entdeckern in chronologischer Folge verzeichnet sind. Den Reihen dieser Cometen beginnt: Cometa Halley nach folgenden einzelnen Hauptabschnitten: Apparitiones antiquiores, Apparitio 1531, Apparitio 1607, Apparitio 1682, Apparitiones 1759 et 1835 atque disquisitiones recentes. Allein über diesen Cometen sind 132 Schriften verzeichnet. Auf die periodischen Cometen folgen Cometae reliqui, worin die Literatur über wenigstens 150 nach der Zeitfolge geordnete Cometen enthalten ist. — Endlich muss nun aber noch ein Umstand hervorgehoben werden, welcher diesem Catalog einen besonderen sehr grossen literarischen Werth verleihet. Es sind nämlich in demselben nicht bloss alle einzeln, abgesondert für sich, erschienenen Schriften, sondern auch alle wichtigeren Abhandlungen, die in den im Besitz der Bibliothek der Sternwarte befindlichen Journalen und Zeitschriften, so wie in den Schriften gelehrter Gesellschaften und Akademieen abgedruckt sind, verzeichnet, wodurch derselbe ein wahres Repertorium für solche Abhandlungen und eins der wichtigsten literarischen Hülfsmittel namentlich für alle diejenigen geworden ist, welche sich nicht selbst in den Besitz solcher grossen Sammelwerke setzen oder eine unmittelbare Einsicht in dieselben verschaffen können.

Die Beschränktheit des Raumes verbietet uns, mehr zur allgemeinen Charakterisirung dieses wichtigen literarischen Werkes zu sagen, weshalb wir uns begnügen müssen, nur noch die folgende Uebersicht der Hauptrubriken des Inhalts mitzutheilen: **Catalogus librorum majorum.** p. 1—262. — Auctores classici, graeci et romani, mathematici, astronomi, physici, alii, secundum ordinem alphabeticum. — Opera auctorum recentiorum se-

cundum ordinem alphabeticum. — Lexica disciplinarum mathematicarum et physicarum. — Mathesis. p. 33—69. (Cursus et compendia Matheseos universae. Analysis finitorum. Geometria. Trigonometria. Analysis infinitorum. Theoria combinatoria. Calculus probabilitatis et Mathesis forensis. Mechanica. Tabulae mathematicae.) — Astronomia. p. 70—200. (in 33 einzelnen Unterabtheilungen). — Geodaesia. p. 201—214. — Physice. p. 215—231. (mit Einschluss der Optik). — Libri periodici et Acta societatum. p. 232—246. — Historia literaria et rel. p. 247—262. — **Catalogus librorum minorum et dissertationum.** p. 265—818. et p. 831—857. — Disciplinae mathematicae. p. 265—319. (in 11 Unterabtheilungen). — Disciplinae astronomicae. p. 319—389. (18 Unterabtheilungen). — Catalogi fixarum, Ephemerides, Tabulae. p. 390—404. — Terra. p. 404—463. — Sol et luna. p. 464—479. — Eclipses, occultationes, transitus. p. 480—507. — Determinatio locorum geographica. p. 508—526. — Planetae. p. 526—548. — Stellae fixae. p. 548—577. — Observationes earumque subsidia. p. 578—637. — Disciplinae physicae. p. 637—706. (24 Unterabtheilungen). — Historia literaria. p. 706—760. (Höchst interessant ist in dieser Abtheilung die Biographia, in welcher biographische Schriften über ungefähr 420 mehr oder weniger berühmte Mathematiker, Astronomen, Physiker und Künstler verzeichnet sind, jedenfalls eine für die Geschichte der genannten Wissenschaften höchst wichtige Sammlung). — Catalogus dissertationum cometographicarum. p. 761—818. — Ein höchst vollständiges, nach den Autoren geordnetes Register auf 107 Seiten beschliesst das wichtige Werk.

Es wird uns sehr freuen, wenn es uns gelingt, durch die obigen Mittheilungen die Aufmerksamkeit unserer Leser auf das vorliegende wichtige literar-historische Werk zu lenken. Die Vorrede liefert auf S. I.—XXIV. eine ausführliche Darlegung über die Art der Anfertigung desselben und die Entstehung der jedenfalls sehr merkwürdigen Bibliothek der Sternwarte zu Pulkowa. Wir haben den auf die Herausgabe dieses Werkes verwandten Fleiss und die grosse Umsicht und Gelehrsamkeit, mit welcher dieselbe bewerkstelligt worden ist, lebhaft bewundert, und sagen Herrn Otto Struve im Namen der Wissenschaft den wärmsten Dank, dass er sich dieser mühevollen Arbeit so erfolgreich unterzogen hat.

Grunert.

Arithmetik.

Multiplications-Tabellen aller Zahlen von 1 bis 500. Ein Hülfsbuch für Geometer, Baumeister, Forstmänner und überhaupt alle, die viel zu rechnen haben, zur schnelleren Erlangung richtiger Resultate bei'm Multipliciren und Dividiren. Oldenburg (Schulze'sche Buchhandlung). 1860. 8.

Diese Multiplicationstafeln, deren Einrichtung uns einfach und bequem zu sein scheint, enthalten unmittelbar die Producte mit zwei ganzzahligen Factoren, wenn der eine der beiden Factoren nicht grösser als 500, der andere nicht grösser als 509 ist. Will man Producte mit grösseren Factoren, die nicht mehr innerhalb der Gränzen der Tafel liegen, bilden, so muss man sich hierzu bekannter einfacher Hülfsmittel bedienen, zu deren Anwendung die übrigens nur kurze Einleitung eine zweckmässige Anweisung enthält. Diese Tafeln gehen nicht so weit wie die in zweiter Auflage erschienenen bekannten Crelle'schen Tafeln, ihr Format ist aber weit bequemer, bei übrigens völlig untadelhafter äusseren Ausstattung; auch möchte die den Tafeln gegebene Ausdehnung für die meisten praktischen Arbeiten hinreichend sein. Ueber die überaus einfache Einrichtung giebt die Einleitung die nöthige Auskunft. Der Herr Verfasser oder Herausgeber hat sich nirgends genannt. Im Vorwort wird aber bemerkt, dass die Einrichtung ganz der Einrichtung der schon im Jahre 1805 in Paris in kl. 4°. erschienenen Tables de multiplication — (die uns nicht weiter bekannt geworden sind) — ähnlich sei, welche nicht bloss in Frankreich, sondern auch bei'm preussischen Kataster in Rheinland und Westphalen, und ebenso bei der allgemeinen Landesvermessung im Grossherzogthum Oldenburg, insbesondere bei Flächenberechnungen, mit Vorliebe gebraucht würden, indem bei derartigen Arbeiten selten grössere Factoren in Frage kämen. Für die Correctheit wird garantirt. Uns selbst haben diese Tafeln recht wohl gefallen, wir halten dieselben für recht praktisch und empfehlen sie daher zur sorgfältigen Beachtung, indem wir bei dieser Gelegenheit zugleich auch die empfehlenswerthe, die 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9fachen aller Zahlen von 1 bis 100000 enthaltende Productentafel von C. A. Bretschneider. Hamburg und Gotha. 1841, welche im Literar. Ber. Nr. III. S. 50. angezeigt worden ist, aber nicht die wohl verdiente hinreichende Verbreitung gefunden zu haben scheint, wieder in Erinnerung bringen wollen.

Astronomie.

Grosse Sonnenfinsterniss vom 18ten Juli 1860.

Die grosse Sonnenfinsterniss vom 18ten Juli 1860 hat einen ungewöhnlichen Eifer, eine ungewöhnlich grosse Betheiligung bei ihrer Beobachtung, namentlich in den Gegenden, wo sie total war, hervorgerufen. Es scheint daher wohl angemessen, in diesen literarischen Berichten über dieselbe einige Mittheilungen zu machen aus Journalen und Zeitschriften, welche nicht jedem Leser des Archivs leicht zugänglich sein dürften, freilich mit grosser Einschränkung, welche durch den geringen Raum uns unabweislich geboten ist.

Fragt man zunächst nach der Ursache des so grossen Eifers bei der Beobachtung einer keineswegs sehr ungewöhnlichen Erscheinung, und ob derselbe in einer solchen Weise berechtigt sei, so müssen wir diese letztere Frage jedenfalls aus vollster Ueberzeugung bejahend beantworten. Denn können wir irgendwie einige Hoffnung haben, über die eigenthümliche Natur unsers Centralkörpers einigermassen Aufschluss zu erhalten, so ist dieselbe lediglich aus der sorgfältigen Beobachtung totaler Sonnenfinsternisse zu schöpfen. Soll aber diese Hoffnung auf einem sicheren Fundamente ruhen, so wird es natürlich zunächst und vor allen Dingen darauf ankommen, über den Grund der bei totalen Sonnenfinsternissen dem Beschauer sich darbietenden grossartigen Erscheinungen, namentlich darüber zu gehöriger Klarheit zu kommen, wo dieselben ihren eigentlichen Sitz haben, oder — mit anderen Worten, — ob dieselben der Sonne angehören oder dem Monde. Denn nur, oder wenigstens vorzugsweise, dann, wenn das Erstere der Fall ist, wird die oben angedeutete Hoffnung wirkliche Berechtigung in sich tragen, wogegen im letzteren Falle die Erscheinungen in Rücksicht auf die Sonne nur mehr secundärer Natur sein würden.

Was also nun die Frage betrifft, ob die bei totalen Sonnenfinsternissen sich darbietenden so unendlich grossartigen Erscheinungen, die sogenannten Protuberanzen, die Corona u. s. w. der Sonne angehören oder dem Monde; so wird auf deren Entscheidung die Beobachtung totaler Sonnenfinsternisse zunächst ihr Augenmerk zu richten haben. In der That ist bisher immer das Erstere angenommen, der Grund der Protuberanzen, der Corona u. s. w. in einer die Sonne umgebenden besonderen Atmosphäre oder Photosphäre und dergl., welche begreiflicherweise nur bei totaler Verfinsterung der Sonne

zur Erscheinung kommen kann, gesucht worden, und nur erst späterhin hat sich hieneben eine zweite Ansicht geltend zu machen versucht, nach welcher die genannten Erscheinungen bloss optischer Natur sein, auf Licht-Interferenzen, Licht-Beugungen an den Mondbergen u. dergl. beruhen, in Bezug auf die eigenthümliche Natur der Sonne also durchaus nur secundär sein sollen. Bei dem grossen Interesse, welches ich von jeher an den in Rede stehenden Erscheinungen genommen, habe ich, so viel es mir irgend möglich gewesen ist, Alles, was über dieselben zu meiner Kenntniss gelangt ist, sorgfältig zu verfolgen gesucht, habe aber nirgends einen nur mit einiger wirklich überzeugenden Kraft für die letztere Ansicht sprechenden triftigen Grund, sondern bis jetzt meistens in dieser Beziehung nur allgemeine Redensarten gefunden, und gestehe gern, dass **ich**, die unendliche Grossartigkeit der hier dem erstaunten Beobachter im Weltraume sich darbietenden Erscheinungen vollkommen begreifend, schon aus allgemeinen Gründen zu einer in Bezug auf diese Grossartigkeit so wenig wahrscheinlichen Ansicht mich nie auch nur im Entferntesten habe bekennen können, ohne übrigens dabei das Recht, welches in der Naturwissenschaft jede Ansicht hat, den Versuch, sich geltend zu machen, wagen zu dürfen, auch nur im Geringsten und einen Augenblick zu verkennen oder in Zweifel ziehen zu wollen. Will man aber nun gar daraus, dass sich etwa durch optische Versuche in physikalischen Kabinetten auf einer hölzernen Kugel und dergl. einigermassen ähnliche Erscheinungen hervorrufen lassen, nun gleich ohne Weiteres den Schluss ziehen, dass diesen Erscheinungen jene unendlich grossartigen Erscheinungen im Weltraume congruent sind: so beruhet ein solcher Schluss wahrlich auf einer sehr schwachen Logik, über die hier nichts weiter zu sagen ist. Nur Beobachtungen der totalen Sonnenfinsternisse **selbst** sind geeignet und berechtigt, eine einigermassen sichere Entscheidung herbeizuführen, und solche Beobachtungen dürfen nicht mit Fernröhren von ganz untergeordneter Wirkung, wie sie allenfalls jeder Liebhaber der Astronomie besitzt oder sich leicht zu verschaffen im Stande ist, angestellt werden, sondern erfordern grossartigere Hülfsmittel, wie sie zu meiner grossen Freude in der That auch bei der Finsterniss vom 18. Juli, im richtigen Verständniss der Sache, wirklich vielfach in Anwendung gebracht worden sind, wobei der treffliche Director der Sternwarte in Madrid, Herr **Antonio de Aguilar**, in einer die wärmste Anerkennung verdienenden Weise, hülfreiche Hand geleistet hat*).

---

*) M. s. z. B. den Bericht des berühmten Directors der Sternwarte des **Collegio romano** (in Rom) Herrn P. **Angelo Secchi** (della

Sehr beherzigenswerth ist gewiss für solche, nur mit Hülfsmitteln von ganz untergeordneter Bedeutung versehene Beobachter, deren Beobachtungen eben deshalb gar nicht berechtigt sind **bei diesen Dingen** *) mitzusprechen, und nur sehr wenig Glauben verdienen, das, was Herr Le Verrier in der Sitzung der Pariser Akademie der Wissenschaften vom 13. August 1860 in dieser Beziehung mit vollstem Rechte sagte, worüber der Cosmos 17e. Vol. 7e Livraison. p. 224. folgende Mittheilung enthält: „M. Le Verrier exprime ensuite quelques doutes ou quelques craintes: la suprise **et le faible pouvoir optique de leur lunette** auront pu tromper quelques astronomes, et il est convenable de ne se fier qu' aux instruments de puissance suffisante et aux mesures prises par des astronomes exercés.“ Welche Ansicht Herr Le Verrier über die Erscheinungen selbst hat, werden wir nachher sehen.

Wie ist denn nun die obige Frage durch die Beobachtungen der Finsterniss vom 18. Juli entschieden worden, so weit die Nachrichten bis jetzt reichen? werden die Leser des Archivs fragen. Ein erster in vieler Beziehung sehr interessanter, verständig verfasster Bericht von einem ungenannten Hannoveraner findet sich in der Berlinischen (Vossischen) Zeitung. 1860. Nr. 178. Mittwoch den 1. August. Erste Beilage. S. 2. Darin heisst es wörtlich also: „Für die Wissenschaft ist aus diesen Beobachtungen zunächst **festgestellt** — mindestens waren die Astronomen, welche am Abend des 18. in Vittoria eine Versammlung hielten, darüber einig, — **dass die Protuberanzen der Sonne angehören und nicht etwa dem Monde oder unserer Atmosphäre**, wie bis jetzt von manchen Astronomen angenommen wurde. Die Protuberanzen, welche zu Vittoria beobachtet wurden — es erschienen nach Eintritt der totalen Finsterniss noch drei — standen fest wie ungeheure Berge im glänzendsten Lichte, und der Mond zog über sie hinweg. — Da

---

compagnia di Gesù), in den Comptes rendus. 1860. Tom. LI. No. 5. p. 156. 160.

*) Solche mit nur ganz geringen Fernröhren versehene Liebhaber der Astronomie mögen, wenn sie verständig im Dienste der Wissenschaft arbeiten und wahrhaft Anerkennungswerthes für dieselbe leisten wollen, den im Archiv Thl. XXXIV. S. 249. Nr. XII. mitgetheilten schönen Aufsatz des Herrn von Littrow und einen lehrreichen Aufsatz von Argelander im Jahrbuche für 1844. Herausgegeben von Schumacher. Stuttgart und Tübingen 1844. S. 122. beherzigen.

mag denn doch wohl manchem der mondsüchtigen Herren das Herz etwas geklopft haben, als unser Trabant in stiller Majestät über die unverrückt feststehenden Protuberanzen hinwegzog! — Nachdem in der schon erwähnten Sitzung der Pariser Akademie Herr Babinet den Bericht des Herrn Goldschmidt gelesen hatte: M. **Le Verrier** demande à résumer au tableau, et à l'aide de figures, l'ensemble des phénomènes observées, et les résultats acquis qui en sont les conséquences, en ce qui concerne au moins les protubérances qu'il considère seules aujourd'hui, laissant pour une autre occasion, s'il y a lieu, la discussion de ce qui concerne l'auréole. **Ces résultats, au nombre de deux, sont importants, le premier est que les protubérances rouges sont des nuages flottants dans une atmosphère, le second que ces nuages appartiennent à l'atmosphère solaire ou au soleil.**

Von dem grössten Interesse ist der von Herrn Secchi, welcher zu Desierto de las Palmas, vielfach unterstützt von Herrn Aguilar, beobachtete, der Pariser Akademie erstattete Bericht (Comptes rendus a. a. O. p. 156.). Dieser Bericht ist im vorliegenden Falle um so wichtiger, weil Herr Secchi namentlich in optisch-astronomischen Dingen eine der grössten und ersten, allgemein und freudigst anerkannten Autoritäten ist. Auf p. 160. sagt der genannte berühmte Astronom: „Dans ces moments-là*), ma conviction sur la nature de ce que je voyais fut, que le phénomène était réel et que je voyais vraiment des flammes dans l'atmosphère solaire et des nuages suspendus dans ces flammes; **il m'aurait été impossible d'imaginer autre chose, comme par exemple, que cela pût être un phénomène quelconque de diffraction ou de réfraction.**"

„La graduation si nette et le mélange si sensible de la lumière de couleur fleur de pècher, avec le blanc de ce que nous appelons photosphère, était d'un caractère tout autre que celui que j'aie vu dans les phénomènes de diffraction, d'interférence et de réfraction, et tout à fait hors des limites des illusions quelconques. Je ne doute donc pas qu'elles ne soient réellement propres au soleil, et la structure de ces nuages suspendus achève de fortifier ma conviction."

---

*) Als sich nämlich die Protuberanzen in grösster Schönheit gezeigt hatten.

In einer weiteren Mittheilung in den Comptes rendus. 1860. Nr. 8. p. 276. giebt Herr Secchi auch von Versuchen Nachricht, die er angestellt hat, und sagt u. A. p. 277. Folgendes: „La couronne elle-même près du bord solaire et les protubérances ont été tout à fait inimitables avec les différents moyens, que j'ai essayés: les franges ainsi produites à l'extérieur sont très limitées et d'un caractère tout à fait différent de la couronne; et les prominences que j'ai produites avec des boules couvertes de cristaux et d'autres matières ont été aussi d'une teinte et de caractères optiques parfaitement différents des protubérances solaires, et je n'ai **pu réussir à rien produire de semblable.**" Gewiss eine sehr wichtige Mittheilung von einem so ausgezeichneten Beobachter.

Ein so bestimmt ausgesprochenes Urtheil einer der ersten Autoritäten in diesen Dingen ist doch wohl maassgebend und für jetzt entscheidend; auf so gewichtige Autoritäten muss und kann man sich im vorliegenden Falle vorläufig aber allein verlassen.

Ich bedauere, dass die Beschränktheit des Raums mir weitere Mittheilungen, die ich späteren literarischen Berichten vorbehalten muss, für jetzt nicht gestattet. Indess sind solche Autoritäten wie die vorhergehenden schon völlig hinreichend, um uns für die Richtigkeit des nach der Mittheilung unsers obigen Hannoveraners von dem am Abend des 18. Juli in Vittoria zusammengetretenen astronomischen Congress gethanen Ausspruchs für jetzt eine nicht abzuweisende Gewähr zu leisten:

> **„dass nämlich die Protuberanzen der Sonne und nicht dem Monde angehören."**

Besondere Mittheilungen über die Corona oder Aureole behalten wir uns vor.

Wir freuen uns dieses Resultats wahrhaft im Interesse der herrlichen astronomischen Wissenschaft, da wir uns nun mit noch grösserem Muthe*) der oben ausgesprochenen Hoffnung hingeben können, dass fortgesetzte eifrige und, so oft sich Gelegenheit darbietet, wiederholte Beobachtungen totaler Sonnenfinsternisse zu sicheren Aufschlüssen über die eigentliche Natur unseres Centralkörpers führen

---

*) Den wir übrigens zu verlieren bis jetzt nie irgend welche Ursach oder Veranlassung gehabt haben.

werden. Natürlich werden diese Erscheinungen, nachdem man zu dem obigen Resultate gelangt ist, immer noch an Interesse gewinnen und noch mehr wahre Astronomen als schon jetzt zu ihrer genauen Beobachtung Anregung und Aufforderung finden.

Grunert.

Nachschrift.

Herr Faye in Paris gehört auch zu den Anhängern der sogenannten optischen Theorie, worüber er sich im Cosmos. 1860. 17e. Vol. 11e Livr. p. 326. ausspricht. Der Herausgeber, Herr Moigno, fügt seiner Mittheilung Folgendes bei: „M. Faye, on le voit, est impitoyable. Il nie tout, atmosphère solaire, nuages roses etc. etc.; il répousse carrément les conclusions qu'ont tirées spontanément de ce qu'ils ont vu, M. le Verrier, M. Warren de la Rue, le R. P. Secchi, etc. etc.“ Dieses Negiren ist freilich eine sehr leichte Sache, und es ist gut und ganz recht, dass Herr Moigno Herrn Faye so abfertigt.

Nachdem ich vorstehendes Referat nach den mir bis jetzt vorliegenden glaubwürdigen und beachtungswerthen Mittheilungen so eben geendet, geht mir, wahrscheinlich von ihrem Verfasser, Herrn Professor Plantamour in Genf, dem ich dafür verbindlichst danke, die folgende Schrift zu:

Observation de l'éclipse totale du soleil du 18. Juillet 1860 à Castellon de la Plana (Espagne), par M. le Professeur Plantamour.

Dieser in vielfacher Beziehung interessante Bericht eines ausgezeichneten Astronomen verdient jedenfalls Beachtung vorzüglich auch deshalb, weil derselbe mit einem nach der gegebenen Beschreibung jedenfalls vorzüglichen Instrumente (une exellente lunette de Ramsden, appartenant à l'observatoire, d'une ouverture de 58 millimètres, à laquelle était adapté un micromètre à angle de position, avec un oculaire de Merz donnant un grossissement de trente fois etc., natürlich mit genauer parallactischer Aufstellung, die hier nie entbehrt werden kann) beobachtete. Dieser Schrift sind auch drei sehr schöne farbige Zeichnungen beigegeben, welche derselben noch einen ganz besonderen Werth verleihen, so dass dieselbe unter allen Bedingungen zu sorgfältigster Beachtung empfohlen werden muss, wenn sie auch für jetzt wohl nur als eine vorläufige Mittheilung zu betrachten ist. Nachdem ich so eben vorher, gestützt auf Aussprüche und Mittheilungen allgemein anerkannter Astro-

nomen, *meine* Ueberzeugung dahin ausgesprochen habe, dass die Protuberanzen u. s. w. der Sonne angehören, ist es, nachdem mir jetzt eben erst die vorliegende Schrift zugegangen, einem so tüchtigen, von mir jederzeit hochgeachteten Astronomen, wie Herrn Professor Plantamour, gegenüber, meine Pflicht, zu bemerken, dass derselbe durch seine Beobachtungen jetzt zu der entgegengesetzten Ansicht gekommen zu sein meint. Auf S. 8. heisst es: „Il est résulté pour moi, de l'observation de léclipse du 18. Juillet, l'impression d'autant plus vive que je m'y attendais moins, que tous ces phénomènes, tels que la couronne, les faisceaux de rayons et les protubérances ne sont pas des phénomènes existant réellement autour du soleil, qui deviennent visibles parce que la lune cache le disque même du soleil, et qui changent seulement par le fait que cet écran en masque ou démasque alternativement telle ou telle partie, mais que ce sont des phénomènes lumineux produits par l'écran qui s'interpose dans la direction des rayons solaires, et que leur modification dépend de la position plus ou moins rapprochée de l'observateur du cône tangent aux disques du soleil et de la lune."

Der Herr Verfasser führt auf S. 9.—S. 11. die Gründe, die ihn zu vorstehender Ansicht bestimmen, theilweise gestützt auf sorgfältige Rechnungen an, worin wir ihm aber hier für jetzt der Beschränktheit des Raums wegen nicht weiter folgen können, sondern die Leser auf die beachtenswerthe Schrift*) selbst verweisen müssen, nachdem wir, einem so ausgezeichneten Beobachter und Astronomen gegenüber, der Pflicht, auch *unserer eigenen Ansicht entgegenstehende Ansichten* hier mitzutheilen, genügt haben, indem wir an diesem Orte, unsere *eigene Ueberzeugung übrigens nie zurückhaltend*, bei solchen Dingen vorzugsweise und zunächst hier nur als Berichterstatter auftreten können. Wir danken Herrn Plantamour nochmals für die uns mitgetheilte Schrift, wenn wir uns auch nicht zu seiner Ansicht bekennen können. G.

Vermischte Schriften.

Monatsbericht der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften in Berlin. S. Literar. Ber. Nr. CXXXVI. S. 11.

Februar 1860. Hagen: Ueber Wasserwellen bei begrenz-

---

*) Wahrscheinlich besonders abgedruckt aus der *Bibliothèque universelle*.

ter und constanter Tiefe. S. 51—52. [Herr H. schliesst seine kurze Mittheilung mit den Worten: „Es entsteht daher die Frage, ob unter Zugrundelegung elliptischer Bahnen der geometrischen Bedingung — (dass in der Wassermasse nirgend ein leerer Raum und nirgend Ueberfüllung eintreten darf) — genügt und zugleich dieselbe Schwingungszeit für alle unter einander liegende Schichten dargestellt werden kann. Es ergiebt sich, dass dies allerdings möglich ist, wenn 1) die absolute Geschwindigkeit jedes Wassertheilchens constant, und 2) die Differenz zwischen den grossen und kleinen Axen in allen Bahnen desselben Systems gleichfalls constant ist"]. — Dove: Ueber die barometrischen Extreme des Jahres 1859. S. 83—86. (Das Jahr 1859 zeichnet sich durch ungewöhnliche Schwankungen des Luftdrucks aus, was es wünschenswerth macht, dass diese einer umfassenden Untersuchung unterworfen werden. Die Ergebnisse der Beobachtungen des preussischen meteorologischen Instituts, welches Norddeutschland mit Ausnahme Sachsens umfasst, liefert Herr D. in diesem Aufsatze). — Dove: Ueber die Nichtidentität der Abgüsse verschiedener Metalle in derselben Form. S. 87.

März 1860. Dove: Ueber die Darstellung der Interferenz-Farben aus den Interferenzen in verschiedener homogener Beleuchtung und künstliche Nachbildung des Dichroismus. S. 104—118. (Eines kurzen Auszugs ist dieser interessante Aufsatz nicht fähig; sein Inhalt ist durch seine Ueberschrift mit hinreichender Deutlichkeit bezeichnet). — Ehrenberg: Vorläufige Mittheilung über einen sehr merkwürdigen Meteorstaubfall in Jerusalem mit grossem Orkan am 8—9 Februar d. J. S. 121. — Encke: Ueber die Auf- und Untergänge der Sterne und der Sonne bei den Alten. S. 122—133. (Eine zwar nur kurze, aber gründliche Untersuchung über den fraglichen Gegenstand, über den bekanntlich namentlich schon J. F. Pfaff eine sehr werthvolle Abhandlung geliefert hat). — Dove: Ueber Dichroismus. S. 135. — G. Rose: Bemerkungen über das Vorkommen des Diamants in Brasilien. S. 137. — Ehrenberg: Ueber zwei Staub-Meteore aus Westphalen und Syrien sammt deren Vergleichung mit dem Passatstaube und mit zwei neuen centralafrikanischen Oberflächen-Erden. S. 137—157. — Dove: Ueber die polarisirende Wirkung des Amethyst, in der Richtung der Axe desselben. S. 157.

April 1860. Du Bois-Reymond: Ueber ein durch den Strom hervorgerufenes Widerstandsphänomen an den feuchten porösen Körpern. S. 172. — Ehrenberg: Beiträge zur Beurtheilung der wunderbaren japanischen Glaspflanze, der sogenannten Corallenthier-Gattung Hyalonema und der Familie der Hyalo-

chaetiden. S. 173—182. (Wenn auch weniger in den Kreis des Archivs gehörend, doch allgemein interessant, weil Herr E. auf S. 181. die sogenannte wunderbare japanische Glaspflanze, einen federbuschartigen und kostbaren Schmuck der dortigen Einwohner, auf S. 181. für ein japanisches Kunstproduct erklärt). — Reuschle: Tafeln der Zerfällung aller Primzahlen innerhalb des ersten Tausend in ihre aus eilften und aus dreizehnten Wurzeln der Einheit gebildeten primären complexen Primfactoren, vorgelegt von Herrn Kummer. S. 190—199. (Fortsetzung der unter dem 13. Juni und 14. November vorigen Jahres mitgetheilten Tafeln). — Ehrenberg: Ueber den am 24.—25. Januar 1859 auf das amerikanische Schiff Derby bei den Capverden gefallenen Passatstaub. S. 203—208.

Mai 1860. Dieses Heft enthält keine in den Kreis des Archivs gehörenden Aufsätze; jedoch wollen wir aufmerksam machen auf: Bunsen: Ueber ein neues dem Kalium nahestehendes Metall, mitgetheilt von Herrn du Bois-Reymond. S. 221—223.

Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati da Barnaba Tortolini e compilati da E. Betti a Pisa, F. Brioschi a Pavia, A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. 4°. (S. Literar. Ber. Nr. CXXXVII. S. 15.)

Nr. 1. (Gennaro e Febbraro 1860.) Memorie intorno ad alcune questione Matematiche di A. Dorna p. 5. — Applicazione del discriminante nullo alle risoluzioni di alcuni problemi, di M. Azzarelli. p. 16. — Mémoire sur la théorie géométrique des surfaces du second ordre. Par Ch. Meray. p. 30.

Rivista bibliographica. Formole per determinare quanti siano i numeri primi fino ad un dato limite. Articolo del Prof. Genocchi. p. 52. — Lettera del Prof. Giusto Bellavitis al Prof. B. Tortolini. p. 60. — Pubblicazioni recenti. p. 64.

No. 2. (Marzo e Aprile 1860.) La Teorica delle funzioni ellitiche, e sue applicazioni. Monografia del Prof. Enrico Betti. p. 65.

Preisaufgaben der Königlichen Akademie der Wissenschaften in Brüssel.

1. Généraliser le théorème de Sturm en l'étendant à un système de deux équations à deux inconnues.

2. Trouver et discuter l'intégrale de l'équation des lignes de

courbure à la surface lieu géométrique des points dont la somme des distances à deux droites, qui se coupent, est constante.

3. Déterminer, à l'aide d'experiences nouvelles, si une quantité donnée de travail mécanique peut développer constamment une même quantité de chaleur, et réciproquement si une même quantité de chaleur est susceptible de produire la même quantité de travail mécanique.

4. On démande si le principe de Joule est applicable aux effets de la poudre dans les bouches de feu. Dans la négative ou dans l'affirmative, déterminer les conditions des mouvements des gaz produits par la déflagration de la poudre dans l'âme des bouches à feu et, subsidiairement, dans d'autres circonstances.

Le prix du concours pour la première et la troisième question sera de quinze cents francs; le prix pour la deuxième et pour la quatrième sera de mille francs.

Les concurrents addresseront leurs ouvrages au Département de l'ntérieur*) avant le 20. Septembre 1862.

Le jugement du concours se fera conformément aux dispositions qui régissent les concours pour les prix quinquennaux établis par l'arreté royal du 6. Juillet 1851.

Sitzungsberichte der k. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag. Jahrgang 1860. Januar — Juni. Vergl. Literar. Ber. Nr. CXXXVII. S. 14.

S. 11. Herr Pierre besprach den bekannten Leidenfrost-schen Versuch und wies ihn ebenfalls demonstrativ nach. Man hat bisher geglaubt, dass bei diesem Versuche zwischen der Flüssigkeit und den Wänden des stark erhitzten Gefässes gar keine Berührung stattfindet. Dies ist jedoch nach Herrn Pierre nicht richtig, vielmehr scheint nichts übrig zu bleiben, als eine, wenn auch sehr geringe Adhäsion zwischen Metall und Flüssigkeit zuzugeben. Des Weiteren wegen müssen wir auf die Mittheilung

---

*) Es sind dies nämlich ausserordentliche Preisaufgaben, die durch ein besonderes arrêté royal vom 31. Mai 1860 gestellt werden. Daher die Einsendung an das Département de l'intérieur. In dem arrêté royal vom 20. Novembre 1851 heisst es: Tout ouvrage est admis au concours s'il est publié en Belgique, s'il est entièrement achevé et si l'auteur est Belge de naissance ou naturalisé.

selbst verweisen. — S. 20. Herr kais. Rath Kulik hielt einen Vortrag über den 11ten Grundsatz des Euklides und versuchte denselben auf neue Art zu beweisen. Der Beweis stützt sich, wie schon früher ähnliche Beweise, auf die Vergleichung unendlicher Winkelräume. Der vor drei Jahren verstorbene Professor Joseph Ladislav Jandera, welcher die Mathematik an der Universität in Prag länger als 50 Jahre mit solchem Erfolge lehrte, dass die Mehrzahl der mathematischen Lehrkanzeln in der Monarchie von seinen Schülern besetzt werden konnte, hat sich vielfach und langjährig mit der Aufsuchung eines bündigen Beweises für das 11te Axion beschäftigt, bis jetzt aber nichts über seine Untersuchungen bekannt gemacht, weshalb allerdings Mittheilungen aus den hinterlassenen Papieren dieses sehr gründlichen Mathematikers, welche sich in den Händen des hochwürdigen Herrn Strahover Prälaten Dr. Hieronymus Zeidler befinden, wünschenswerth sein würden. — S. 92. macht Herr Karlinski Mittheilungen über den neuen Planeten Hestia und über dessen Auffindung in geschichtlicher Beziehung, indem er zugleich von ihm berechnete oskulirende Elemente dieses neuen Planeten giebt. — S. 93. Von dem k. k. Artillerie-Hauptmann Herrn August Kržiž, welcher mehrere Jahre hindurch als Artillerie-Instructeur in Teheran fungirte und die Würde eines k. persischen Generals bekleidete, in mehreren Gegenden Persiens mit grossem Fleisse und grosser Genauigkeit ausgeführte Höhenmessungen, nebst anderen dort angestellten Beobachtungen werden mitgetheilt. — S. 98. Auf einen auch in physikalischer Rücksicht interessanten, wenn auch eigentlich physiologischen, aber doch ohne tiefere physiologische Kenntnisse allgemein verständlichen Aufsatz von Herrn Purkyně über seine Versuche über die Coincidenz gleicher Gehörempfindungen im Hinterhaupte (I. Historische Vorbemerkung. II. Versuch über die endocephale Coincidenz des Schalles durch die beiden Gehörorgane) machen wir aufmerksam. — S. 102. Eine von dem obengenannten Herrn Hauptmann A. Kržiž eingesandte Abbildung eines in Teheran befindlichen altpersischen Astrolabiums ward vorgelegt, und die spätere Mittheilung eines dasselbe betreffenden Aufsatzes versprochen, welcher wir mit Interesse entgegensehen. — Natürlich kann hier nur über den mathematischen und physikalischen Inhalt dieser Sitzungsberichte referirt werden. Ausserdem enthalten dieselben des Interessanten noch sehr viel.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

XXXVIII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

J. H. T. Müller, Beiträge zur Terminologie der griechischen Mathematiker. Leipzig. 8°. 8 Ngr.

H. Sloman, The Claim of Leibnitz to the Invention of the Differential Calculus. Translated from the German, with considerable Additions etc. by the Author. 4°. London. Cloth. 8 s. 6 d.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

W. Gallenkamp, Die Elemente der Mathematik. 2. Aufl. 2r. Thl.: Die Arithmetik und Algebra. 2. Abtheil.: Stereometrie und Trigonometrie. geh. Iserlohn. 20 Ngr.

Arithmetik.

G. Boole, A Treatise on the Calculus of Finite Differences. London. 8°. 4 Thlr. 6 Ngr.

C. Bremiker, Logarithmisch-trigonometrische Tafeln in sechs Decimalstellen. Mit besonderer Rücksicht auf den Schulgebrauch bearbeitet. gr. 8°. geh. Berlin. 1 Thlr. $7\frac{1}{2}$ Ngr.

Ed. Fürstenau, Darstellung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten und Coefficienten. Marburg. 4°. 12 Ngr.

(C. J. D. Hill), Tabula functionis Lamma ($\varDelta$) ejusque Derivatae ($\varDelta_1$) itemque Logarithmi naturalis, cum differentiis. Upsaliae. 4°. 5 Ngr.

C. J. D. Hill, Analysis aequationum aliquot functionalium quae partim in theoria ellipticarum partimque dilogarithmicarum magni sunt usus, adjecta est varia summatio seriei $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\dots$ Upsala. 4°.

Joubert, Sur la théorie des fonctions elliptiques et son application à la théorie des nombres. Paris. 4°. 20 Ngr.

E. D. F. Meissel, Sammlung mathemat. Tafeln. 1. Lief. Lex.-8. Iserlohn. 20 Ngr. Velinpap. 25 Ngr.

J. B. Sass, Buchstabenrechnung und Algebra. 3. Aufl. A. u. d. T.: Uebungsbuch im Rechnen mit allgemeinen Zahlenreihen etc. gr. 8⁰. geh. Altona. 1 Thlr.

K. Thomas, Die Potenz und die ganze Zahl und das Eins und Eins der Mathematik. Lex.-8⁰. Rudolstadt u. Leipz. geh. 10 Ngr.

G. v. Vega, Logarithm.-trigonometrisch. Handbuch. 44. Aufl. Bearbeitet v. C. Bremiker. gr. 8⁰. geh. Berlin. $1\frac{1}{4}$ Thlr.

Geometrie.

O. Böklen, Analytische Geometrie des Raumes, enth. die allgemeine Theorie der krummen Flächen, der gewundenen Kurven und der Linien auf den Flächen etc. Lex.-8⁰. Stuttgart. 1 Thlr.

C. Claus, Leitfaden für den ersten Unterricht in der Planimetrie. 8⁰. cart. Lübeck. 6 Ngr.

A. Dilling, Der rechnende Geometer. Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der algebraischen Geometrie. 8⁰. Langensalza. 1 Thlr.

H. Escher, Die mathematischen Verhältnisse der Kreislinie. gr. 8⁰. geh. Zürich. 6 Ngr.

E. Fasbender, Anfangsgründe der beschreibenden Geometrie, der analytischen Geometrie, der Kegelschnitte und der einfachen Reihen. Für Realschulen als Ergänzungsband zu den mathematischen Lehrbüchern von Koppe. gr. 8⁰. geh. Essen. $\frac{5}{6}$ Thlr.

H. Kinkelin, Grundriss der Geometrie. Ein Leitfaden für höhere und mittlere Schulen, so wie beim Selbststudium. 1. und 2. Thl. gr. 8⁰. cart. Zürich. à 12 Ngr.

A. Krüger, Geometrische Vorschule. Enth.: 120 Uebungen zur Weckung, Schärfung und Ausbildung der mathematischen Auffassungsgabe. Für die Bedürfnisse der Volksschule bearbeitet. 8⁰. geh. Langensalza. 9 Ngr.

W. Zehme, Lehrbuch der ebenen Geometrie nebst Repetitionstafeln. Für Bürger-, höhere Stadt- und Gewerbeschulen etc. 3. Aufl. gr. 8⁰. geh. Hagen. 16 Ngr.

Trigonometrie.

L. Mack, Goniometrie und Trigonometrie. Mit 56 in den Text gedr. Holzschn. Metzler. 8⁰. 1 Thlr. 10 Ngr.

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

Fig. 9

Fig. 4

Fig. 5

Fig. 6

Fig. 7

Fig. 8

$x = $ [illegible]
$y = $ [illegible]
$z = $ [illegible]

[illegible]
[illegible]
[illegible]

Inhalt.

Seite.

Greifswald, gedruckt bei F. W. Kunike.

Über die

Prinzipien der Mechanik

Zwei akademische Antrittsreden

von

Dr. Ludwig Boltzmann

Professor der theoretischen Physik an der Universität Wien.

Leipzig

Verlag von S. Hirzel

1903.

Alexander Ziwet

Über die
Prinzipien der Mechanik

Zwei akademische Antrittsreden

von

Dr. Ludwig Boltzmann
Professor der theoretischen Physik an der Universität Wien.

Leipzig
Verlag von S. Hirzel
1903.

Vorwort.

Wiederholt an mich ergangenen Aufforderungen gemäss übergebe ich hier den Inhalt der beiden Vorlesungen dem Drucke, welche ich beim Antritte meiner Lehrthätigkeit an der Universität Leipzig und beim Wiederantritt meiner alten Professur in Wien gehalten habe, obwohl ich überzeugt bin, dass diejenigen, welche diese Vorlesungen nicht schon gehört haben, gewaltig enttäuscht sein werden.

Sie werden eine neue Auflage der philosophisch-kritischen Betrachtungen erwarten, die ich einst in einem Vortrage gelegentlich der Naturforscherversammlung in München vorbrachte. Sie bedenken nicht, dass dort mein Auditorium ein ganz anderes war. Dort bestand es der Mehrzahl nach aus Männern, welche, wenn auch nicht alle in sämtliche Details der theoretischen Physik eingeweiht, doch mit Wissenschaft übersättigt waren, so dass sie immerhin nach den Schweizerpillen der kritischen Philosophie Verlangen haben konnten.

Aber was sollten diese einem Auditorium, wie ich es für die beiden hier wiedergegebenen

Vorträge erwartete, einem Auditorium von Jünglingen, die voll Hunger nach Wissenschaft die Lehren derselben erst in sich aufnehmen, nicht wieder von sich geben wollten, die mehr nach einem Appetit reizenden Vorgericht, als nach einem die Verdauung fördernden Nachgericht verlangten.

Das war wenigstens meine Ansicht, mag dieselbe richtig oder falsch gewesen sein. Jedenfalls beurteile man die folgenden beiden Vorträge mit Nachsicht und erwarte darin keinen Tiefsinn, sondern nur harmlose Plauderei.

Wien XVIII/1, Haizingergasse 26,
den 1. November 1902.

Ludwig Boltzmann.

1. Antritts-Vorlesung.

Gehalten in Leipzig im November 1900.

Hochansehnliche Versammlung!

Wenn wir neue Gäste in das von uns lange bewohnte Heim einzuführen gedenken, so pflegen wir die Eingangsthür festlich zu schmücken. Ich bin an diese altehrwürdige Universität berufen worden, um Sie einzuführen in den weitläufigen und imposanten Bau der theoretischen Physik. Die Eingangspforte, durch welche wir diesen Bau betreten wollen, ist die analytische Mechanik. Kein Wunder daher, dass ich Ihnen dieselbe in ihrem schönsten Schmucke zeigen möchte, mit dem sie zwar nicht von mir, aber im Verlaufe der Jahrhunderte von den erlesensten Geistern geziert worden ist.

Als echter Theoretiker will ich vor allem äusseren Beiwerke den inneren Kern ins Auge fassen. Die Definition der analytischen Mechanik ist eine sehr einfache. Sie ist die Lehre von den Gesetzen, nach denen die Bewegung der Körper erfolgt. Die Kenntnis dieser Gesetze ist für die Behandlung zahlreicher Maschinen und ähnlicher Vorrichtungen erforderlich, deren einfachste Formen schon im grauen Altertume, so bei den Ägyptern und Babyloniern, bekannt waren. Wir dürfen uns daher nicht wundern, dass die ersten Anfänge der

Erforschung mechanischer Gesetze sehr weit zurückreichen. Obwohl es sich hierbei fast immer darum handelte, Körper in Bewegung zu setzen, so beschränkte man sich, abgesehen von wenigen verunglückten Versuchen, bis auf Galilei ausschliesslich auf die Bedingungen des Gleichgewichtes, welche in den damals untersuchten Fällen zusammenfielen mit den Bedingungen, unter denen Körper sich gar nicht bewegen. Es ist merkwürdig, dass man mit der Betrachtung dieses Falles, der nach unserer Definition der Mechanik sich allerdings unter dieselbe subsumiert, aber doch nur als ein ganz spezieller Fall, gewissermassen ein Ausnahmefall, zur Beurteilung der damals gebrauchten Maschinen ausreichte; aber da man von dem eigentlich zu Beschreibenden, der wirklichen Bewegung, gerade absah, so war man zu einer Mechanik im eigentlichen Sinne noch nicht gelangt. Diese beginnt erst mit Galilei, welcher durch ebenso sinnreiche wie fundamentale Versuche die Grundgesetze für die einfachsten Fälle der Bewegung ein für allemal feststellte.

Man hätte nun erwarten können, dass diese Gesetze zunächst auf kompliziertere irdische Erscheinungen, z. B. das Wachstum eines Grashalmes, angewendet und dadurch erweitert werden würden; allein dies war keineswegs der Fall. Diese und ähnliche, für den naiven Beobachter unscheinbare, irdischen Vorgänge sind uns noch heute vollkommen rätselhaft. Der Fortschritt wurde vielmehr dadurch inauguriert, dass Newton die von Galilei gefundenen Grundgesetze sofort auf die Bewegung des uns Entlegensten, nämlich der Himmelskörper, an-

wandte und man kann mit Schiller sagen: „Fürwahr, ihn hat kein Wahn betrogen, als er aufwärts zu den Sternen sah!"; denn gerade auf diesem Wege fand Newton jene Erweiterungen und Vervollständigungen der Galileischen Gesetze, welche dann wieder Anwendung auf kompliziertere irdische Bewegungen gestatteten, so dass es ihm gelang, eine Theorie der Bewegung der Körper von solcher Vollendung auszuarbeiten, dass dieselbe bis heute das Fundament nicht nur der Mechanik, sondern der ganzen theoretischen Physik geworden ist.

Auf dieser von Newton geschaffenen Grundlage wurde weiter gebaut von den hervorragendsten Analysten aller Nationen, so Lagrange, Laplace, Euler, Hamilton, und es erwuchs aus der analytischen Mechanik eine Schöpfung, welche wohl mit Recht als Muster für jede mathematisch-physikalische Theorie bewundert wird.

Es gelang zunächst, die Gesetze der Bewegung der starren Körper in Gleichungen zu fassen, so dass jedes derartige Problem auf eine reine Rechenaufgabe zurückgeführt werden kann.

Man machte sich aber auch eine mechanische Vorstellung von dem inneren Baue der festen Körper und Flüssigkeiten, und gelangte so zu Gleichungen, welche die Gesetze der elastischen Eigenschaften der ersteren, ihrer Deformationen, ihrer Festigkeit, sowie der Bewegungen der letzteren ausdrücken. Wenn aber ein Erscheinungsgebiet in Gleichungen gefasst ist, so sieht der Physiker seine Aufgabe für gethan an. Die Auflösung der Gleichungen schiebt er dem Mathematiker zu. Wie weit man

entfernt ist, alle diese Gleichungen wirklich lösen, d. h. in allen Fällen daraus wirklich ein anschauliches Bild der betreffenden Vorgänge gewinnen zu können, das zeigt ein Blick auf einen schäumenden Bach oder auf die von einem grossen Dampfer erzeugten Wasserwogen. Wie ohnmächtig ist die Analyse, die Details aller dieser Erscheinungen aus den hydrodynamischen Gleichungen heraus zu lesen. Aber doch liefert die Mechanik auf allen diesen Gebieten Formeln, welche auch für die Praxis von unschätzbarem Werte sind, ebenso für die Konstruktion von Bauwerken, eisernen Brücken und Türmen, wie für die Anlage von Kanälen, Wasserwerken etc., gar nicht zu reden von den zahllosen Maschinen, die von Tag zu Tag in staunenswerter Weise das Werk der Menschenhand nicht nur ersetzen, sondern übertreffen.

Die Übung, mechanisch zu denken, ist in allen Fällen des praktischen Lebens vom höchsten Nutzen und wirkt gestaltend und ausbildend auf das gesamte Geistesleben. Wie ein guter Pädagoge in richtiger psychologischer Kenntnis jeden seiner Mitmenschen gerade so behandelt, wie es dessen Individualität erheischt, so kommt der mechanisch Denkende jedem Mechanismus vom einfachsten bis zum kompliziertesten mit Achtung und Liebe entgegen und letzterer lohnt es, indem er die Wünsche seines Herrn erfüllt, während sich der mechanisch Ungebildete nicht einmal merkt, in welchem Sinne eine Schraube zu drehen ist und unauflöslich fest verbindet, was er gerade trennen will.

Wenn eine Nation grosse Erfolge erzielt

hat im Vergleiche mit den in der Nachbarschaft wohnenden, so pflegt sie eine gewisse Hegemonie über die letzteren zu erlangen, ja sie geht nicht selten daran, sie zu unterjochen und sich dienstbar zu machen. Gerade so ergeht es auch mit den wissenschaftlichen Disziplinen. Die Mechanik erlangte bald die Hegemonie in der gesamten Physik. Zunächst unterwarf sich ihr naturgemäss und widerstandslos die Akustik. Die betreffenden Erscheinungen sind aufs innigste mit Bewegungserscheinungen verknüpft, welche freilich so rasch vor sich gehen, dass sie nicht direkt mit dem Auge verfolgt werden können, aber doch ihren rein kinetischen Charakter selbst der bloss oberflächlichen Beobachtung nicht verleugnen können. Ja durch künstliche Mittel kann sowohl die Bewegung der Schallerreger, als auch der in der Luft fortgepflanzten Schallwelle direkt sichtbar und erkennbar gemacht werden. Die Akustik wurde also sofort von der Mechanik als ihre Domäne in Anspruch genommen. Dasselbe geschah auch mit der Optik, als man erkannt hatte, dass das Licht ebenso wie der Schall eine Wellen- und Schwingungserscheinung ist. Freilich war da die Konstruktion eines schwingenden Mediums vollkommen der Phantasie überlassen und stiess auch auf nicht geringe Schwierigkeiten.

Den Feldzug in das Gebiet der Wärmetheorie eröffnete die Mechanik durch die Vorstellung, dass die Wärme eine Bewegung der kleinsten Teilchen der Körper sei, welche eben wegen der Unwahrnehmbarkeit dieser kleinsten Teilchen dem Auge unsichtbar bleibt, aber sich

dadurch zu erkennen giebt, dass sie, wenn sie sich den Molekülen unseres Körpers mitteilt, daselbst das Gefühl der Wärme, wenn sie unserem Körper entzogen wird, das Gefühl der Kälte erzeugt. Dieser Feldzug war ein siegreicher, da die geschilderte Hypothese ein sehr klares Bild vom Verhalten desjenigen Agens liefert, welches man Wärme nennt, ein weit vollständigeres, als die frühere Ansicht, dass dieses Agens sich analog wie ein Stoff verhalte.

Elektrizität und Magnetismus wurden den mechanischen Gesetzen untergeordnet durch die Hypothese der elektrischen und magnetischen Fluida, deren Teilchen nach einem Gesetze aufeinander wirken sollten, welches nur eine Modifikation des von Newton für die Wechselwirkung der Weltkörper aufgestellten ist, also durchaus im Boden der reinen Mechanik wurzelt. Auf eine Mechanik der Anziehungs- und Abstossungskräfte, sowie der gegenseitigen Bewegung heterogener Atome suchte man endlich mit vielem Erfolge auch die chemischen Erscheinungen sowie die der Krystallbildung zurückzuführen, welche erstere ja soviel Verwandtschaft mit den Wärmeerscheinungen einer- und den elektrischen Erscheinungen andererseits haben. Von der Gegenbewegung, welche in neuerer Zeit gegen dieses Bestreben der Theorie unternommen wurde, soll später die Rede sein.

Selbst die oberflächlichste Beobachtung zeigt, dass die mechanischen Gesetze nicht auf die unbelebte Natur beschränkt sind. Das Auge ist bis ins kleinste Detail eine optische Dunkelkammer, das Herz eine Pumpe, die Muskulatur ein kompliziertes, nur vom Standpunkt der

reinen Mechanik verständliches Hebelsystem, welches die scheinbar verwickeltsten Probleme mit den einfachsten Mitteln löst. So werden alle denkbaren Bewegungen des Auges durch sechs Muskelstränge bewirkt, welche wie ziehende Fäden auf eine um ihren Mittelpunkt bewegliche Kugel wirken; freilich, der volle Ausdruck des Augenaufschlages, das Senken des Blickes, wovon die Novellendichter erzählen, ist durch die äussere Dekoration, das Spiel der Augenlider und Gesichtsmuskel und anderes mitbedingt.

Die Anwendbarkeit der Mechanik erstreckt sich nun weiter in das Gebiet des Geistigen hinein, als man bei oberflächlicher Betrachtung vermuten würde. Wer hätte z. B. nicht schon Beobachtungen gemacht, welche die mechanische Natur des Gedächtnisses belegen? Nicht selten musste ich einst, um mir eine griechische Vokabel ins Gedächtnis zurückzurufen, eine ganze Reihe memorierter homerischer Verse recitieren, wobei sich dann das Wort an der betreffenden Stelle sofort einstellte. Als ich mich wochenlang ausschliesslich mit Hertz' Mechanik befasst hatte, wollte ich einmal mit den Worten „Liebes Herz" einen Brief an meine Frau beginnen und ehe ich mich versah, hatte ich Herz mit tz geschrieben.

Jedermann weiss, wie oft uns die angeboren Weckuhr, die wir im Gedächtnisse besitzen, im Stiche lässt, wenn sie nicht durch besondere Mechanismen (einen Knopf im Taschentuche, Hängen des Regenschirmes über den Winterrock) unterstützt wird. Als ich am Tage der Übersiedlung nach Leipzig ans Fenster ging, um in gewohnter Weise das Thermometer ab-

zulesen, das ich Tags vorher selbst abgeschraubt hatte, rief ich aus: „Ich besitze keinen anderen Mechanismus, der so schlecht funktionierte, wie mein Gedächtnis, um nicht gar zu sagen, als mein Verstand!"

So können wir also in unserem Körper einen kunstvollen Mechanismus erblicken, und auch die Krankheiten desselben sind durch rein mechanische Ursachen erklärbar. Grossen Nutzen hat schon diese Erkenntnis gebracht, indem sie den mechanischen Eingriffen des Chirurgen Weg und Ziel zeigte, indem sie den wahren Mechanismus der Infektionskrankheiten aufdeckte, diese durch Abhaltung der krankheiterregenden Bakterien verhütete, oder durch deren Tötung heilte. In den meisten Fällen freilich stehen wir noch machtlos den Gewalten der Natur gegenüber, aber die Mechanik hilft uns doch, sie zu begreifen, und damit auch zu ertragen.

Wir haben noch der wunderbarsten mechanischen Theorie auf dem Gebiete der biologischen Wissenschaften zu gedenken, nämlich der Lehre Darwins. Diese unternimmt es, aus dem rein mechanischen Prinzipe der Vererbung, welches an sich freilich wie alle mechanischen Urprinzipe dunkel ist, die ganze Mannigfaltigkeit der Pflanzen- und Tierwelt zu erklären.

Die Erklärung der wunderbaren Schönheit der Blumen, des Formenreichtums der Insektenwelt, der Zweckmässigkeit des Baues der Organe des menschlichen und tierischen Körpers, das alles wird hiermit zur Domäne der Mechanik. Wir begreifen, wieso es für unsere Gattung nützlich und wichtig war, dass gewisse Sinneseindrücke uns schmeichelten und von uns ge-

sucht wurden, andere uns abstiessen; wir ersehen, wie vorteilhaft es war, möglichst genaue Bilder der Umgebung in unserem Geiste zu konstruieren und das, was von diesen mit der Erfahrung stimmte, als wahr, streng auseinander zu halten von dem nicht stimmenden, dem Falschen. Wir können also die Entstehung der Begriffe der Schönheit ebensowohl als der Wahrheit mechanisch erklären.

Wir verstehen aber auch, warum nur solche Individuen fortexistieren konnten, welche gewisse höchst verderbliche Einwirkungen mit der ganzen Intensität ihrer Nervenkraft verabscheuten und hintan zu halten suchten, andere für ihre oder die Erhaltung der Gattung notwendige, aber mit gleicher Lebhaftigkeit anstrebten. Wir begreifen so, wie sich die ganze Intensität und Macht unseres Gefühlslebens entwickelte, Lust und Schmerz, Hass und Liebe, Wunsch und Furcht, Seligkeit und Verzweiflung. Geradeso, wie unsere körperlichen Krankheiten können wir auch die ganze Stufenleiter unserer Leidenschaften nicht loswerden, aber wir lernen sie wiederum begreifen und ertragen.

In erster Linie wird es nun ohne Frage für jedes Individuum von Wichtigkeit sein, dass sein Streben auf die eigene Erhaltung gerichtet ist, und es erscheint der Egoismus nicht als Fehler, sondern als Notwendigkeit. Aber für die Erhaltung der Gattung ist es von grösstem Nutzen, wenn die verschiedenen Individuen sich unterstützen, und beim Zusammenwirken der Einzelne sich dem Ganzen unterordnet. So verstehen wir die Notwendigkeit von Eigensinn und Trotz schon beim Kinde, aber auch von

Zusammenhalten und Geselligkeit im gemeinsamen Spiele; wir verstehen an unserem Geschlechte Eigennutz und Mitgefühl, Scham und Begierde, Freiheitsliebe und Knechtssinn, Tugend und Laster, Todesfurcht und Todesverachtung. Welchen Vorteil gewährt es für einmütiges Wirken im Frieden und Kriege, wenn sich der Jüngling für Grosses und Edles, Freundschaft und Liebe, Freiheit und Vaterland begeistert, aber wie leicht artet wieder dieser Trieb zum Phrasentum, zur thatenlosen Schwärmerei aus. Die Empfänglichkeit für Erhebung des Herzens und Begeisterung musste sich daher ebenso notwendig in unserem Geschlechte bilden, wie Nüchternheit und Egoismus, als deren notwendiges Gegengewicht. So begreifen wir aus mechanischen Ursachen, dass der Jüngling für die Poesie Schillers erglüht, und so viele die Dichtungen Heines verurteilen, welche doch wieder auf andere so mächtig und unwiderstehlich wirken. Es muss ja auch das Wasser des aufsteigenden Springbrunnens eine lebendige Kraft besitzen, welche für sich allein im stande wäre, es in den unendlichen Raum hinauszuschleudern; aber ebenso mechanisch notwendig ist die Gegenwirkung der Schwere und des Druckes unzähliger Luftteilchen, die es wieder rechtzeitig zur mütterlichen Erde zurückführen. Wollte man sich pikant ausdrücken, so könnte man sich zur Behauptung versteigen, dass nicht nur das abscheulichste Laster, sondern auch die höchste Tugend gewissermassen eine Verirrung ist, darin begründet, dass unsere angeborenen Triebe übers Ziel hinausschiessen. Denn allzu grosser Idealismus trübt den prak-

tischen Sinn und ist daher das der banausischen Gesinnung entgegengesetzte auch wieder schädliche Extrem. Solche Paradoxa liegen näher, als man glaubt und entstehen immer bei Betrachtung der Dinge von einem einseitigen Standpunkte, wie die Zerrbilder bei Anwendung von Cylinder- oder Kegelspiegeln. In ähnlicher Weise hat man behauptet, dass das Genie eine Geisteskrankheit sei.

Ja nicht einmal für seine Gattung allein kann der Mensch das Ideal beanspruchen. Dadurch, dass er ihn für Untreue peitschte, für Treue fütterte, hat er dem Hunde die Treue gerade so anerzogen, wie der Kuh die reichliche Milchabsonderung, der Gans die grosse Leber. Der anhänglichere Hund wurde im Kampfe ums Dasein vom Menschen stets begünstigt und so wuchs Anhänglichkeit und Treue beim Hundegeschlechte in immer grösserem Masse. Wenn nun, wie es oft vorkommt, ein Hund, der seinen Herrn verloren hat, nicht mehr frisst und vor Gram langsam zu Grunde geht, ist das nicht ein Idealismus, wie wir ihn kaum beim Menschen finden, sicherlich nicht bei Dienern unserer modernen Zeit! Daher war mancher Philosoph versucht, den Hund moralisch höher zu stellen als den Menschen, wie man sich versucht fühlen kann, die automatische Nestbaukunst des Vogels über die mühsam erlernte und Irrtümern unterworfene des Architekten zu stellen.

In der Natur und Kunst herrscht also die allgewaltige Mechanik, sie herrscht auch ebenso in der Politik und dem sozialen Leben. Vermöge des mächtigen Triebes nach Selbständigkeit, von dem wir sahen, dass er sich schon

im Kinde mit Notwendigkeit entwickeln muss, lässt sich der Einzelne nur ungern von anderen beherrschen und liebt in gesellschaftlichen Vereinigungen, Städten, Gemeinwesen und im Staate die republikanische Regierungsform. Aber dieser stellen sich auf der anderen Seite wieder mechanische Schwierigkeiten entgegen. Jeder, der öffentlichen Debatten beigewohnt hat, weiss, ein wie schwerfälliger, zu raschem, konsequentem Handeln ungeeigneter Organismus eine öffentliche Versammlung ist und wie häufig diese wegen des geringen Teiles von Verantwortlichkeit, der auf den Einzelnen entfällt, Fehler in der Beschlussfassung macht. Noch erleichtert wird dies durch den Umstand, den Schiller mit den Worten charakterisiert: „Verstand ist stets bei wenigen nur gewesen.„ Aus diesen Ursachen erhellen wieder die Vorteile der Herrschaft Weniger oder eines Einzelnen. So beruht in der That das Zusammenwirken der verschiedenartigsten Persönlichkeiten in Volksversammlungen ebenso wie die meisterhafte Lenkung der widerstrebenden Willensäusserungen der Menge durch einen Einzelnen auf der Mechanik der Psychologie. Bismarck durchschaute die Seele seiner politischen Gegner so klar, wie der Maschinentechniker das Räderwerk seiner Maschine und wusste so genau, wie er sie zu den gewünschten Handlungen zu bewegen habe, als der Maschinist weiss, auf welchen Hebel er drücken muss. Die begeisterte Freiheitsliebe eines Cato, Brutus und Verrina entstammt Gefühlen, die durch rein mechanische Ursachen in ihrer Brust keimten und es erklärt sich wiederum mechanisch, dass

wir mit Behagen in einem wohlgeordneten monarchischen Staate leben und doch gerne sehen, wenn unsere Söhne den Plutarch und Schiller lesen und sich an den Reden und Thaten schwärmerischer Republikaner begeistern. Auch hieran können wir nichts ändern; aber wir lernen es begreifen und ertragen. Der Gott, von dessen Gnade die Könige regieren, ist das Grundgesetz der Mechanik.

Es ist bekannt, dass die Darwinsche Lehre keineswegs bloss die Zweckmässigkeit der Organe des menschlichen und tierischen Körpers erklärt, sondern auch davon Rechenschaft giebt, warum sich oft Unzweckmässiges, rudimentäre Organe, ja geradezu Fehler in der Organisation bilden konnten und mussten.

Nicht anders geht es auf dem Gebiete unserer Triebe und Leidenschaften. Durch die Anpassung und Vererbung konnten sich bloss die Grundtriebe herausbilden, welche im grossen und ganzen für die Erhaltung des Individuums und Geschlechtes notwendig sind. Es ist dabei nicht zu vermeiden, dass in einzelnen Fällen diese Grundtriebe falsch wirken und unnütz, ja sogar schädlich werden. Oft schiessen die uns angeborenen Triebe gewissermassen über das Ziel hinaus. Die Kraft, mit der sie sich unserem Geiste assoziiert haben, um gewisse Wirkungen zu erzielen, ist so enorm, dass wir sie nicht sofort wieder loswerden können, wenn diese Wirkungen erzielt sind und nunmehr der zur Gewohnheit gewordene Trieb überflüssig oder schädlich ist. So übertrifft für das neugeborene Kind der Trieb des Saugens alle anderen an Wichtigkeit; kein Wunder daher,

dass er auch alle anderen an Intensität übertrifft und später lästig wird, wenn das schon vernünftig gewordene Kind ihn oft unglaublich lange nicht mehr loswerden kann. Die Erwachsenen belächeln dies und doch nimmt bei ihnen das unzweckmässige und verkehrte Fortwirken des zur Erhaltung der Art dienenden Triebes nicht selten noch viel absurdere Formen an.

Analoge Erscheinungen finden sich auf rein geistigem Gebiete. So haben wir unsere Gefühle so sehr an bestimmte Vorstellungen und Eindrücke assoziiert, dass uns eine geschickt abgefasste erfundene Erzählung oder ein Theaterstück weit mehr zu Herzen geht als ein kurzer wahrheitsgetreuer Bericht eines wirklichen Unglückes von Personen, die uns ferne stehen.

Ähnliche Wirkungen kommen im Gebiete des philosophischen Denkens vor. Wir sind gewohnt, den Wert oder Unwert der verschiedenen Dinge zu beurteilen, je nachdem sie für unser Leben förderlich oder schädlich sind. Dies wird uns so zur Gewohnheit, dass wir schliesslich über den Wert oder Unwert des Lebens selbst urteilen zu können glauben, ja dass über dieses verkehrte Thema ganze Bücher geschrieben wurden.

Nach meiner Überzeugung sind die Denkgesetze dadurch entstanden, dass sich die Verknüpfung der inneren Ideen, die wir von den Gegenständen entwerfen, immer mehr der Verknüpfung der Gegenstände anpasste. Alle Verknüpfungsregeln, welche auf Widersprüche mit der Erfahrung führten, wurden verworfen und dagegen die allzeit auf Richtiges führenden mit

solcher Energie festgehalten und dieses Festhalten vererbte sich so konsequent fort auf die Nachkommen, dass wir in solchen Regeln schliesslich Axiome oder angeborene Denknotwendigkeiten sahen. Aber auch hier, also selbst in der Logik, ist ein über das Ziel Hinausschiessen nicht ausgeschlossen. Ja gerade wegen der Abstraktheit und scheinbaren Durchsichtigkeit des Gebietes äfft es uns in solchen Fällen am allermeisten. Ich sehe hierin den Ursprung jener Widersprüche, welche bei Kant als Antinomien, in neuerer Zeit als Welträtsel bezeichnet werden. Es sei mir gestattet, einige derartige Beispiele anzuführen. Wir haben fortwährend Begriffe in einfachere Elemente zu zerlegen, Erscheinungen aus uns schon bekannten Gesetzen zu erklären. Diese so überaus nützliche und notwendige Thätigkeit wird uns nun so zur Gewohnheit, dass der zwingende Schein entsteht, es müssten auch die einfachsten Begriffe noch in ihre Elemente zerlegt, auch die Elementargesetze noch auf einfachere zurückgeführt werden.

Fragen, wie die nach der Definition des Zahlbegriffes, nach der Ursache des Kausalitätsgesetzes, nach dem Wesen der Materie, Kraft, Energie etc. drängen sich immer wieder unwiderstehlich auf, selbst dem philosophisch Geschulten. Er ist überzeugt, dass diese Begriffe direkt aus der Erfahrung entnommen und nicht weiter erklärbar sind, dass also hier einfach die unwiderstehlich gewordene Denkgewohnheit, nach der Ursache und Definition zu fragen, über das Ziel hinausschiesst, trotzdem kann er eine gewisse zurückbleibende Un-

befriedigtheit darüber nicht überwinden, dass so wichtige Begriffe, wie der der Zahl oder der der Kausalität, jedem Versuche spotten, sie zu definieren. Es geht hier ähnlich, wie wenn eine Gesichtstäuschung noch immer nicht verschwindet, selbst nachdem man ihre mechanische Ursache klar erkannt hat.

Noch ein Schritt weiter ist es, wenn wir es unerklärlich und rätselhaft finden, dass wir selbst oder dass überhaupt irgend etwas existiert und diesen Gedanken nicht ganz loswerden, selbst wenn wir erkannt haben, dass hier der Begriff des Rätselhaften so wenig Anwendung finden kann, wie der Begriff des Wertes oder Unwertes bei Beurteilung des ganzen Lebens.

Ein anderes hierher gehöriges Beispiel liefert die schon alte jetzt als Solipsismus bezeichnete Verirrung. Gleichwie es mechanisch erklärbar ist, dass eine Blutwelle in unserem Ohre die Empfindung eines Tones erzeugen kann, dem kein äusserer Eindruck entspricht oder, dass wir Nachbilder heller Gegenstände noch wahrnehmen, nachdem diese unserem Blicke entschwunden sind; ja dass wir selbst in vollkommener Finsternis mannigfaltige, oft phantastische Gebilde sehen, denen keinerlei Gegenstände entsprechen, so ist es auch begreiflich, dass unser Bewusstseinsorgan im Traume eine von der Aussenwelt ganz unabhängige phantastische Thätigkeit entfaltet. Eine ähnliche in gemildertem Masse auftretende Thätigkeit ist als Phantasie sogar zur Bildung neuer Ideenverbindungen nützlich und notwendig. Aber auch diese schiesst wieder oft über das Ziel hinaus. Der naive Mensch betrachtet Sonne

und Mond, Bäume und Quellen als beseelte Wesen, aber auch der gebildete denkt sich jede Kraft noch unter dem Bilde einer menschlichen Kraftanstrengung. In diesen Fällen ist dann eine strenge Kontrolle, eine scharfe Negation von allem bloss Hinzugeträumten notwendig. Diese wird durch häufige Übung wieder zur Gewohnheit. Indem man sie auf die Spitze treibt und auch anwendet, wo sie nicht hingehört, kommt man zur Idee, dass überhaupt alle unsere Vorstellungen Träume seien und nichts existiere, als der vorstellende, also ein einziger träumender Mensch. Diese Verirrung ist ebenso vom Standpunkte der Darwinschen Theorie begreiflich, wie die Entwicklung unserer normalen Vorstellungsthätigkeit. Die mechanische Natur der letzteren wird aber neuerdings dokumentiert durch die Möglichkeit ihrer Verwirrung schon im gesunden Zustande durch Schlaf, mehr aber noch im kranken durch Hallucinationen, Fieberphantasien und Wahnsinn.

Vom Standpunkt der Darwinschen Theorie ist auch das Verhältnis des Instinktes der Tierwelt zum Verstande des Menschen begreiflich. Je vollkommener ein Tier ist, desto mehr treten bei demselben neben dem Instinkte bereits Spuren von Verstand auf.

Einem Tiere, das nur einer geringen Zahl von Handlungen bedarf, welche zudem fortwährend unter ausserordentlich ähnlichen Verhältnissen zu erfolgen haben, ist es von höchstem Nutzen, wenn ihm, ohne dass es viel zu überlegen braucht, sogleich der Trieb zur richtigen Handlungsweise direkt angeboren ist, wie dem Vogel, der ohne Unterweisung vermöge ange-

borenen Instinktes mit bewunderungswürdiger Kunstfertigkeit Nester zu bauen versteht. Uns erschiene es wohl auf den ersten Anblick als ein weit vollkommenerer Zustand, wenn wir ohne Unterricht und ohne vieles Nachdenken stets das Richtige zu treffen wüssten. Während es aber unter den einfachen Bedingungen, unter denen sich jene Tiere befinden, das Leichtere und minder Komplizierte war, dass sich ihnen der Trieb zur ganzen Handlungsweise in summa vererbte, so steht dies wieder jeder Anpassung an geänderte Verhältnisse, jedem Fortschritte entgegen und unter komplizierten Lebensbedingungen erweist sich die dem Menschen angeborene Fähigkeit bei weitem überlegen, sich innere Bilder der äusseren Ereignisse zu konstruieren, mittels derselben Erfahrungen zu sammeln und diesen gemäss die Handlungen in jedem Falle regulieren zu können.

Übrigens tritt beim Menschen der Instinkt zwar sehr zurück, seine Spuren sind aber doch überall noch bemerkbar, und zwar keineswegs bloss in Fällen, wie der schon erwähnte Saugtrieb, oder der Nachahmungstrieb der Kinder, sondern auch bei allen elementaren das Nachdenken unterdrückenden oder ihm vorauseilenden Trieben der Erwachsenen. Der Schreck bei einem plötzlichen Geräusche, die Furcht bei plötzlicher Gefahr kommen ebenso unserm verständigen Handeln wider unsern Willen zuvor, wie der Zorn bei einem jähen Angriffe. Die ererbte Gewohnheit, gegen starke Eindrücke heftig zu reagieren, welche nützlich ist, um unserem Handeln den nötigen Nachdruck und die nötige Lebhaftigkeit zu verleihen, übt da

eine unbezwingliche Wirkung aus und wird schädlich, wenn sie der Überlegung allzusehr vorauseilt. Überhaupt entstammen die Grundtriebe unseres Charakters, sowohl Genussucht und Trägheit, als auch Ehrgeiz, Herrschsucht, Mitleid und Neid ererbten Anlagen, also in erster Linie angeborenen Instinkten. Wieweit sind wir davon entfernt, dass reine Verstandesgründe die Motive aller unserer Handlungen wären? Die innersten Impulse zu denselben entstammen noch immer meist angeborenen Trieben und Leidenschaften, also ohne unser Zuthun in uns keimenden Instinkten, welche, wenn sie den Verstand beherrschen, zwar schädlich und verwerflich werden, aber doch notwendig sind, um unserer Handlungsweise Lebhaftigkeit, unserem Charakter seine eigentümliche Färbung zu verleihen. Das Weltgetriebe erhält sich, wie Schiller sagt, „heute wie ehemals durch Hunger und durch Liebe und die Zeit ist noch ferne, wo Philosophie den Ring der Welt zusammenhält."

Einen instinktiven Charakter hat auch der Aberglaube, welchen oft selbst die gebildetsten Menschen nicht ganz loswerden. Derselbe entsteht durch Fortwirken unseres Kausalbedürfnisses in Fällen, wo dazu keine Berechtigung vorhanden ist. Die Gewohnheit überall Kausalverbindungen zu suchen, veranlasst uns, rein zufällig scheinende Ereignisse mit irgend anderen, oft ganz heterogenen kausal zu verknüpfen, und das Gesetz von Ursache und Wirkung, welches richtig angewandt die Grundlage aller Erkenntnis ist, wird zum Irrlichte, das uns auf falsche Pfade führt.

Nun erübrigt noch zu erinnern, wie gut auch der ganze Mechanismus der sozialen Einrichtungen in den Rahmen unserer Betrachtungen passt. Da haben wir unzählige Anstandsregeln und Höflichkeitsformen teilweise so unnatürlich und gezwungen, dass sie vom Standpunkt einer unbefangenen Überlegung, die man öfters Vernunft nennt, die aber die Allmacht der Mechanik vergisst, absurd und lächerlich erscheinen. Diese Anstandsregeln sind nicht zu allen Zeiten dieselben; bei fremden Völkern weichen sie von den unseren oft so sehr ab, dass wir ganz verwirrt werden; aber sie müssen sein.

Die Thätigkeit der Konservativen, der pedantischen zopfigen steifen Anstandsrichter, die über die genaue Beobachtung jeder hergebrachten Sitte und jeder Regel für den gesellschaftlichen Verkehr, über genaue Verwendung aller ihrer Titel bei Ansprachen und Zubilligung aller ihrer gesellschaftlichen Vorrechte wachen, erscheint uns oft lächerlich; aber sie ist wohlthätig und muss sein, damit nicht Verrohung des gesellschaftlichen Verkehrs eintritt. Dafür, dass sie nicht zur Versteinerung des Geistes führt, sorgen wieder die Emanzipierten, Ungezwungenen, die hommes sans gêne. Beide Gattungen von Menschen bekämpfen einander und halten zusammen die Gesellschaft im richtigen Gleichgewicht.

Auf einem ganz andern Gebiete des sozialen Lebens wirkt ein anderer Mechanismus bei steter regster Bewegung immer das Gleichgewicht bewahrend, einer der grossartigsten bewunderungswürdigsten Mechanismen, die die

Menschheit geschaffen hat, der des Kapitals, des Geldes. Man lese Zolas Roman „L'argent". Den primitiven Tauschhandel der Urvölker hat es derart verfeinert, dass die verschiedenen Formen des Geldes mit allen Gesetzen und hergebrachten Regeln des kaufmännischen und Börsenverkehrs bewunderungswürdiger ineinandergreifen als die Räder des kompliziertesten Uhrwerks, und mit gleicher Lebhaftigkeit, Sicherheit und Präzision arbeiten wie die bestkonstruierten Elektromotoren.

Wer zu kurz gekommen, schimpft über den Mammon; der Schwindler, der die Regeln aus Gewinnsucht verdreht, wird ausgestossen wie unbrauchbare Stoffe aus einem lebenden Organismus; aber für unsere moderne Civilisation ist der Geld- und Börsenverkehr ebenso wichtig als die Buchdruckerkunst, der Dampf, die Elektrizität.

Übt der Einzelne nicht eine Zaubermacht aus, wenn ihm eine Menge an sich ganz wertloser Metallstücke zum Mittel wird, Paläste, Parke, Yachten, kurz, alles zu schaffen, was das Leben verschönt, ja Preise zu stiften, die noch lange nach seinem Tode zur Schaffung von Meisterwerken der Kunst und Wissenschaft wesentlich beitragen? Doch der Zauberer selbst, unterliegt er nicht auch wieder den Gesetzen der Mechanik, wenn ihm die falsche Stellung eines Häutchens in seinem Herzen, der Wandbruch eines Äderchens in seinem Gehirne die Benutzung aller angesammelten Herrlichkeiten entzieht und mit einem Schlage den Mächtigen in ein Stück toten Stoffes verwandelt?

Ja auch die Verspottung des Papiergeldes

scheint mir ein einseitiger Standpunkt zu sein. Dieses hat doch wohl auch eine andere Seite als die in Goethes Faust in so grelles Licht gesetzte. Ja wenn wir darunter alle Wertpapiere, Obligationen, Wechsel u. dergl. einbegreifen, so ist es geradezu die Krone des wichtigsten Teiles des menschlichen Verkehrs, des Mechanismus, der Mein und Dein den heutigen komplizierten Bedürfnissen entsprechend regelt.

Um vom Grossartigen wieder zum Kleinlichen überzugehen, erinnere ich, dass der unwiderstehliche, im Falle geringen Nachlassens durch Klatschsucht stets wieder geschärfte Trieb zum Putzen durch Entfernungen aller schädlichen Ansteckungsstoffe aus den Wohnungen von höchstem Nutzen ist. Freilich schiesst er übers Ziel hinaus, wenn z. B. Messingteile stets blank erhalten werden, deren Patina nicht nur unschädlich, sondern bei der heutigen grellen Abendbeleuchtung sogar dem Auge wohlthätig wäre. Aber ich will beileibe nicht behaupten, dass wir besser daran wären, wenn das Staubabwischen den Bakteriologen an stelle der Hausbediensteten übertragen würde.

Weitere Beispiele für meine These zu finden, wäre ich nicht verlegen; ich wäre eher verlegen, irgend einen Vorgang zu finden, der nicht Beispiel dafür wäre.

Wir haben hiermit nicht nur unsere körperlichen Organe, sondern auch unser Seelenleben, ja Kunst und Wissenschaft, Gefühlseindrücke und Begeisterung zur Domäne der Mechanik gemacht. Ist nun die Mechanik zur Darstellung dieser Dinge nicht in der That allzu mecha-

nisch? Selbst der komplizierteste von Menschenhand verfertigte Mechanismus, wie geringfügig und leblos ist er gegenüber dem einfachsten pflanzlichen oder tierischen Gebilde!

Ich sehe voraus, welch ein Grauen bei meinen letzten Ausführungen den Schwärmer befällt, wie er fürchtet, dass alles Grosse und Erhabene zum toten fühllosen Mechanismus entwürdigt wird und alle Poesie dahinsinkt. Aber mir scheint all diese Furcht auf einem völligen Missverständnisse des Vorgebrachten zu beruhen.

Unsere Ideen von den Dingen sind ja niemals mit dem Wesen derselben identisch. Es sind blosse Bilder, oder vielmehr Zeichen dafür, welche das Bezeichnete notwendig einseitig darstellen, ja nichts weiter leisten können, als dass sie gewisse Arten der Verknüpfungen daran nachahmen, wobei das Wesen völlig unberührt bleibt.

Wir brauchen also von der Schärfe und Bestimmtheit unserer früheren Ausdrücke nichts zurückzunehmen. Wir haben damit doch nichts weiter gethan, als dass wir eine gewisse Analogie zwischen den seelischen Phänomenen und den einfachen Mechanismen der Natur behauptet haben. Wir haben nur ein einseitiges Bild konstruiert zum Behufe der Versinnlichung gewisser Verknüpfungen der Erscheinungen und Voraussage neuer uns unbekannter. Neben diesem einen Bilde können und müssen aber wegen seiner Einseitigkeit andere einhergehen, welche die innerliche, die ethische Seite des Gegenstandes darstellen und die Erhebung unserer Seele durch die letzteren wird nicht

mehr gemindert werden, sobald wir vom mechanischen Bilde die richtige Auffassung haben Dasselbe wird nur dort anzuwenden sein, wo es hingehört; aber wir werden seinen Nutzen nicht bestreiten und bedenken, dass auch die erhabensten Ideen und Vorstellungen doch wieder nur Bilder, nur äussere Zeichen für die Art der Verknüpfung der Erscheinungen sind.

Damit entfällt auch der Einwand, der wohl vielleicht gegen meine Ausführungen erhoben werden wird, dass dieselben der Religion zuwiderliefen. Nichts ist verkehrter, als die auf ganz anderer ungleich festerer Basis ruhenden religiösen Begriffe mit den schwankenden subjektiven Bildern in Verbindung zu bringen, welche wir uns von den Aussendingen machen. Ich wäre der letzte, der die vorgebrachten Ansichten aufstellte, wenn sie irgend eine Gefahr für die Religion bergen würden. Aber ich weiss gewiss, dass die Zeit kommen wird, wo jedermann einsieht, dass dieselben für die Religion ebenso irrelevant sind, wie die Frage, ob die Erde still steht oder sich um die Sonne bewegt.

Indes das Prinzip der mechanischen Erklärung seine Herrschaft im Reiche der gesamten Wissenschaft immer mehr ausdehnte, verlor es merkwürdigerweise auf seinem eigensten Gebiete, dem der theoretischen Physik, wieder an Boden. Die Ursache davon lag, wie dies auch bei erobernden Nationen oft der Fall ist, teils im inneren Zwiespalte, teils auch in äusseren Verhältnissen.

Während man mit dem grössten Erfolge bestrebt war, die Anwendungen der Mechanik

bis ins kleinste Detail auszuarbeiten, trat eine Richtung auf, welche an den Grundpfeilern derselben zu rütteln begann und auf Unklarheiten in den Prinzipien der Mechanik hinwies. Der Grund legende Begriff der Mechanik ist der der Bewegung. Der Begriff der reinen von jeder andern Veränderung losgelösten Bewegung tritt nur bei der Betrachtung starrer Körper vollkommen klar zu Tage. Hier haben wir in der That ein vollkommen unveränderliches Gebilde, an dem sich nichts als seine Lage im Raume verändert. Es giebt nun in der Natur keinen vollkommen starren Körper, aber allerdings feste Körper, welche ihre Gestalt während der Bewegung nur unmerklich ändern. Die Gestaltveränderungen der Flüssigkeiten und Gase sucht man ungezwungen auf die Bewegung ihrer kleinsten Teile zurückzuführen. Sie haben ja in der That schon für das Auge Ähnlichkeit mit den Formveränderungen eines Sandhaufens, der aus einzelnen, sinnlich wahrnehmbaren Körnern besteht. Dennoch liegt für die wirkliche Flüssigkeit etwas Hypothetisches in der Annahme, dass sich auch bei dieser jedes einzelne Teilchen zu allen Zeiten identifizieren lässt. Erfahrungsmässig ist uns ja nur die Unveränderlichkeit der Gesamtmasse und des Gesamtgewichtes gegeben.

Man suchte nun a priori zu beweisen, dass sich jede auch scheinbar qualitative Veränderung auf eine Bewegung kleinster Teile zurückführen lassen müsse, da eine Bewegung der einzige Vorgang sei, wobei der bewegte Gegenstand immer derselbe bleibt. Ich halte alle derartigen metaphysischen Gründe für unzu-

reichend. Freilich den Begriff der Bewegung müssen wir jedenfalls bilden. Wenn sich daher alle scheinbar qualitativen Veränderungen unter dem Bilde von Bewegungen oder Änderungen der Anordnung kleinster Teile darstellen liessen, so würde dies zu einer besonders einfachen Naturerklärung führen. Die Natur würde uns dann am begreiflichsten erscheinen. Allein wir können sie dazu nicht zwingen. Die Möglichkeit, dass dies nicht angeht, dass wir zur Darstellung der Natur auch noch andere Bilder von anderen Veränderungen notwendig haben, muss offen gelassen werden und es ist begreiflich, dass die Berücksichtigung dieser Möglichkeit gerade durch die neuere Entwickelung der Physik nahe gelegt wurde.

Die mechanische Physik hatte sich alle Körper als Aggregate materieller Punkte gedacht, welche direkt in die Ferne aufeinander wirken. In ganz kleine (molekulare) Entfernungen sollten die Kohäsions-, Adhäsions- und chemischen Kräfte wirken, in weitere Distanzen die Gravitation. Neben der ponderabeln Materie wurde noch der Lichtäther angenommen, den man sich vollkommen analog einem festen Körper dachte, wogegen man die elektromagnetischen Erscheinungen, wie wir schon eingangs erörterten, durch die elektrischen und magnetischen Fluida erklärte, deren Teilchen ebenfalls direkt in die Ferne aufeinander wirken sollten. Die letztere Hypothese wusste lange allen beobachteten Erscheinungen gerecht zu werden. Erst vor wenig mehr als 10 Jahren gelang es Hertz, durch Versuche zu beweisen, dass, wie schon Faraday und Maxwell vermutet

hatten, die elektrischen und magnetischen Kräfte nicht unmittelbar in die Ferne wirken, sondern durch Zustandsveränderungen bedingt sind, welche sich mit der Lichtgeschwindigkeit von Volumelement zu Volumelement fortpflanzen. Dadurch erhielt die altehrwürdige Theorie der elektrischen Fluida einen Stoss, dem sie auch bald erlag. Aber auch noch eine andere Theorie wurde durch Hertz' Versuche getroffen. Es zeigten nämlich die Gesetze der Fortpflanzung der elektromagnetischen Wellen eine so absolute Übereinstimmung mit den Gesetzen der Lichtbewegung, dass an der Identität beider Erscheinungen nicht mehr gezweifelt werden konnte. War damit auch noch nicht definitiv widerlegt, dass das Licht auf einer schwingenden Bewegung der kleinsten Teilchen eines Lichtäthers beruht, so war doch erwiesen, dass dieser Lichtäther sicherlich andere viel kompliziertere Eigenschaften haben muss, als man ihm bisher beigelegt hatte. Hierdurch gewann die Theorie der Elektrizität und des Magnetismus ein solches Übergewicht, dass von einigen Seiten der Versuch gemacht wurde, an Stelle der mechanischen Hegemonie in der theoretischen Physik eine solche des Elektromagnetismus zu setzen, indem man versuchte, umgekehrt die einfachsten Gesetze der Mechanik aus der Theorie des Elektromagnetismus herzuleiten.

Anderseits war man gegen alle Hypothesen misstrauisch geworden und beschränkte die Aufgabe der Theorie darauf, eine nirgends über das erfahrungsmässig Gegebene hinausgehende Beschreibung der Erscheinungen zu liefern.

Man hat da die Wahl zwischen 2 extremen Methoden. Macht man zu spezielle Hypothesen, so läuft man Gefahr, Überflüssiges und sogar Unrichtiges in den Vorstellungskreis aufzunehmen. Sucht man sich dagegen aller Hypothesen zu entschlagen, so wird die Theorie unbestimmt und ungeeignet, ganz neuartige Erscheinungen vorauszusagen und so das Experiment auf neue Bahnen zu lenken. Man begreift, dass auf eine Zeit allzu kühner Hypothesen eine entsprechende Reaktion folgte.

Dazu kam, dass ein Begriff, dessen Wichtigkeit schon von Leibniz klar erkannt wurde und der längst in der Mechanik eine bedeutende Rolle spielte, sich allmählich zum mächtigen, die ganze Erscheinungswelt umfassenden Bande herauswuchs, nämlich der der Energie. Obwohl abstrakter als der Begriff der Materie, konnte er doch auch bei jenen Erscheinungen noch genau verfolgt und sogar quantitativ bestimmt werden, wo uns alle Anhaltspunkte über eine Materie, an die sie etwa gebunden wären, fehlen.

Die Energie zeigt nun in jeder ihrer Erscheinungsformen andere charakteristische Eigentümlichkeiten und doch wieder merkwürdige Analogien, so dass die Lehre von den Wandlungen und Eigenschaften der Energie bald so einflussreich wurde, dass sie auch ihrerseits die Hegemonie in der theoretischen Physik anstrebte und diese zur Energetik zu machen suchte. Ich brauche dies gerade hier nicht weiter zu erörtern, da ja sowohl die extremste Richtung der direkten Fernwirkung, als auch die Energetik je in einer Antrittsvorlesung eines

Mitglieds dieser Universität so lichtvoll behandelt wurden.

Was die formale logische Grundlage betrifft, so hatte die alte Mechanik sich dem Dualismus zwischen Kraft und Stoff angeschlossen. Die Materie ist das Bewegliche. Man ist nun gewohnt, für jede spezielle Bewegung die Ursache aufzusuchen. Indem man diese Denkgewohnheit über die Grenzen ihrer Berechtigung ausdehnte, also in ihrer Anwendung über das Ziel hinausschoss, glaubte man auch dafür, dass überhaupt Bewegungserscheinungen eintreten, eine besondere von der Materie getrennte Ursache annehmen zu müssen, welcher man den Namen Kraft gab und neben der Materie eine besondere Existenz zuschrieb. Kirchhoff leugnete die Notwendigkeit hiervon und glaubte, mit der blossen Annahme der Materie und der Thatsache ihrer Bewegung nach bestimmten zu beschreibenden Gesetzen ausreichen zu können. Er behielt jedoch die direkte Fernwirkung bei. Wenn wir aber ernstlich fragen, was von derselben nach unsern heutigen Anschauungen übrig geblieben ist, so finden wir nicht mehr viel. Die elektrischen und magnetischen Kräfte wirken nicht in die Entfernung, sondern von Volumelement zu Volumelement. Von den elastischen und chemischen Kräften von der Adhäsion und Kohäsion, deren Wirkungsbereich ohnedies ein winzig kleiner ist, kann ebenfalls keine direkte Fernwirkung nachgewiesen werden. Es bleibt nur die Gravitation, aber auch hier lässt die Analogie des Wirkungsgesetzes mit dem der elektrostatischen und mag-

netischen Kräfte die Vermittelung durch ein Medium wahrscheinlich erscheinen.

Wenn auch Newton selbst die direkte Fernwirkung nur als einen Notbehelf erklärte, so ist doch das ganze Gebäude der klassischen Mechanik auf die Idee derselben zugeschnitten. Es kann uns daher nicht wundern, dass Hertz dasselbe von Grund aus zu reformieren suchte und an Stelle der beschleunigenden Wirkungen Bedingungsgleichungen setzte. Aber auch Hertz konstruierte die Materie aus materiellen Punkten. Dieselben üben zwar keine Kräfte in die Ferne aufeinander aus, aber die Bedingungen, welche zwischen ihnen bestehen, verbinden entfernte Punkte ebenso unvermittelt direkt miteinander. Hertz setzt also an Stelle der Fernwirkungen gewissermassen Fernbedingungsgleichungen.

Brill hat versucht, die Hertzsche Methode auf Kontinua anzuwenden und es gelang ihm auf diese Weise die Ableitung der Bewegungsgleichungen für inkompressible Flüssigkeiten. Man könnte nun nach Lord Kelvin die Natur aus einem Wechselspiele von Wirbelringen oder sonstigen Bewegungserscheinungen in einer solchen Flüssigkeit erklären, in der auch starre Gebilde eingetaucht sein könnten. Man hätte dann in der That ein Bild der gesamten Erscheinungswelt ganz auf dem Boden der Hertzschen Mechanik gewonnen. Aber man sieht sofort, es wäre nicht gar viel von den alten phantastischen Weltbildern verschieden. Der Gewinn wäre bei weitem nicht so gross, als es die schöne philosophische Grundlage der Hertzschen Mechanik verspricht. Die letzte in

einer anderen hypothesenfreieren Weise auszubauen, ist aber bisher nicht gelungen.

Verlocken die neuesten Ansichten über den Elektromagnetismus nur das Heil ausschliesslich in der Wirkung von Volumelementen auf benachbarte zu suchen, so veranlassten gerade auch wieder in neuester Zeit gewisse an Kathodenstrahlen und bei der Elektrolyse beobachteten Erscheinungen zur Annahme, dass selbst die Elektrizität eine atomistische Zusammensetzung hat, aus diskreten Elementen, den Elektronen, besteht. Man sieht also, die alte Kantsche Antinomie, der Gegensatz zwischen der Teilbarkeit der Materie ins Unendliche und ihrer atomistischen Konstitution, hält die Wissenschaft noch immer in Atem. Nur betrachten wir gegenwärtig beide Ansichten nicht als solche, die mit inneren logischen, aus den Denkgesetzen entspringenden Widersprüchen behaftet sind, sondern wir sehen in jeder ein von uns konstruiertes inneres Bild und fragen, welches Bild mit mehr Klarheit und Leichtigkeit ausgebaut werden kann und mit der grössten Korrektheit und einem Minimum von Unbestimmtheit die Gesetze der Erscheinungen wieder giebt.

Wenn wir nun zum Schlusse das Resultat unserer Betrachtungen resumieren, so können wir als solches bezeichnen, dass sich eine Seite aller Vorgänge der unbelebten und belebten Natur durch rein mechanische Bilder in einer Exaktheit darstellen, wie man sich ausdrückt, begreiflich machen lässt, wie es sonst in keiner anderen Weise bisher gelungen ist, während

andererseits doch alle höheren Bestrebungen und Ideale keine Einbusse erleiden.

Und nun noch ein Wort an Sie, meine künftigen Schüler und studentische Kommilitonen! Seien Sie voll Idealismus und hoher Begeisterung in der Auffassung dessen, was Ihnen in der Alma mater geboten wird, aber in der Verarbeitung seien Sie mechanisch, unermüdlich und gleichförmig fortarbeitend, wie Maschinen.

II. Antritts-Vorlesung.

Gehalten in Wien im Oktober 1902.

Meine Herren und Damen!

Man pflegt die Antrittsvorlesung stets mit einem Lobeshymnus auf seinen Vorgänger zu eröffnen. Diese hier und da beschwerliche Aufgabe kann ich mir heute ersparen, denn gelang es auch Napoleon dem Ersten nicht, sein eigener Urgrossvater zu sein, so bin doch ich gegenwärtig mein eigener Vorgänger. Ich kann also sofort auf die Behandlung meines eigentlichen Themas eingehen.

Nun in der Abhaltung von Antrittsvorlesungen über die Prinzipien der Mechanik habe ich mir nachgerade eine gewisse Routine erworben. Schon die Vorlesung, mit der ich vor 33 Jahren in Graz meine Thätigkeit als ordentlicher Universitätsprofessor begann, behandelte dieses Thema. Seitdem eröffne ich in Wien am heutigen Tage zum 3. Male meine Vorlesungen mit der Betrachtung dieser Materie, dazu kommt einmal eine Antrittsvorlesung in

München und einmal eine in Leipzig über denselben Gegenstand.

Er ist in der That bedeutend genug, dass man ihn so oft behandeln kann, ohne sich allzusehr zu wiederholen. Die Mechanik ist das Fundament, auf welches das ganze Gebäude der theoretischen Physik aufgebaut ist, die Wurzel, welcher alle übrigen Zweige dieser Wissenschaft entspriessen. Man begreift das, wenn man einerseits die historische Entwickung der physikalischen Wissenschaften betrachtet, andererseits auch, wenn man deren logischen nneren Zusammenhang ins Auge fasst.

Mag sich die Wissenschaft noch so sehr der Idealität ihrer Ziele rühmen und auf die Technik und Praxis mit einer gewissen Geringschätzung herabschauen, es lässt sich doch nicht leugnen, dass sie ihren Ursprung in dem Streben nach der Befriedigung rein praktischer Bedürfnisse nahm. Andererseits wäre der Siegeszug der heutigen Naturwissenschaft niemals ein so beispiellos glänzender gewesen, wenn dieselbe nicht an den Technikern so tüchtige Pioniere besässe.

Um die ersten Spuren mechanischer Thätigkeit des Menschen zu finden, müssen wir uns aus der heutigen Zeit, aus dem Zeitalter der Röntgenstrahlen und der Telegraphie ohne Draht in die allerersten Uranfänge menschlicher Kultur zurückversetzen. Das erste menschliche Werkzeug war der Knüttel. Ihn handhabt auch der Orang-Utang und zwar zu einem Zwecke, dem sich noch heute, wo wir uns so erhaben über ihn denken, ein Gutteil menschlichen Erfindungsgeistes und technischen Scharfsinns zuwendet. Wie soll ich diesen Zweck nennen?

Menschenmord nennen ihn die Friedensfreunde; Einsetzen des höchsten Preises des Lebens für die edelsten Güter der Menschheit, für Ehre, Freiheit und Vaterland nennen ihn die Soldaten.

Wie dem auch sei, jedenfalls müssen wir im Knüttel schon ein mechanisches Werkzeug, das erste Geschenk des erwachenden Sinnes für Technik erblicken. Als später die Kultur der Menschheit sich zu entwickeln begann, waren es nicht akustische oder optische Apparate, kalorische oder gar elektromagnetische Maschinen, was man zuerst erfand. Die Sache ging ein wenig langsamer. Das Bedürfnis, natürliche Höhlen besser zu verschliessen, künstliche anzulegen, führte allmählich zum Bau von Wohnungen und Burgen. Die Notwendigkeit, zu diesem Zwecke wuchtige Steine oder kolossale Baumstämme herbeizuschaffen, reizte den Erfindungsgeist. Der Mensch rundete passend geformte Äste zu Walzen, baute später roh gezimmerte Räder, den Knüttel benutzte er als Hebel in der primitivsten Form und betrat so erst unbewusst, dann mit immer mehr Absicht und Bewusstsein das Gebiet der Mechanik im engeren Sinne.

Hut ab vor diesen Erfindern in Bärenfellen und Schuhen aus Baumrinde. Der Mensch, der zuerst mittels geschickt untergelegter Walzen einen Stein bewegt hat, dessen Wucht für immer den Riesenfäusten seiner Mitmenschen zu spotten schien, empfand sicher nicht geringere Genugthuung als Marconi, da er das erste durch die Luft über den Ozean geleitete Telegraphensignal vernahm, selbstverständlich unter der

Voraussetzung, dass alles wahr ist, was die Zeitungen hierüber berichten.

Aus so unscheinbaren Anfängen wuchs die Mechanik, anfangs unendlich langsam, aber doch stetig und später in immer rascherem Tempo empor. Schon Archimedes flösste das zu seinen Zeiten Erreichte solche Bewunderung ein, dass er sich die Welt aus den Angeln zu heben getraut hätte, wenn ihm nur ein fester Stützpunkt hätte geboten werden können. Nun, die heutigen Fortschritte der Technik haben zwar nicht die Erdkugel bewegt, aber die ganze soziale Ordnung, den ganzen Wandel und Verkehr der Menschheit haben sie in der That nahezu aus den Angeln gehoben.

Ja die Fortschritte auf dem Gebiete der Naturwissenschaften haben sogar die ganze Denk- und Empfindungsweise der Menschheit vom Grund aus umgestaltet. Während das frühere humanistische Zeitalter in allem Beseeltes, Empfindendes erblickte, gewöhnen wir uns leider immer mehr, alles vom Standpunkte der Maschine zu betrachten. Früher durchschweifte der Fusswanderer singend Wald und Flur und was konnte man in der Postkutsche Besseres thun, als dichten und träumen, wenn nicht gerade der Ärger über die Langeweile überwog; jetzt wird im Expresszug, im Ozeandampfer noch gearbeitet und gerechnet. Ehemals suchte der Kutscher durch Zureden in der Menschensprache den Sinn seines Gaules zu lenken; jetzt dirigiert man den Elektromotor oder das Automobile mit etlichen Kurbeln schweigend.

Und doch werden wir die Vorstellung der Beseeltheit der Natur nicht los. Die grossen

Maschinen von heute, arbeiten sie nicht wie bewusste Wesen? Sie schnauben und pusten, heulen und winseln, stossen Klagelaute, Angst- und Warnungsrufe aus, bei Überschuss von Arbeitskraft pfeifen sie gellend. Sie nehmen die zur Erhaltung ihrer Kraft erforderlichen Stoffe aus der Umgebung auf und scheiden davon das Unbrauchbare wieder aus, genau denselben Gesetzen unterthan wie unser eigener Körper.

Es hat für mich einen eigentümlichen Reiz, mir vorzustellen, wie die in den verschiedensten Gebieten bahnbrechenden Geister sich über das freuen würden, was ihre Nachfolger, vielfach auf ihren Schultern stehend, nach ihnen errungen haben, so z. B. was Mozart empfinden würde, wenn er jetzt eine Meisteraufführung der 9. Simphonie oder des Parsifal anhören könnte. Ungefähr dasselbe müssten die grossen griechischen Naturphilosophen, vor allem der mathematische Feuerkopf Archimedes zu den Leistungen unserer heutigen Technik sagen; an Begeisterung und Sinn für das Grossartige würde es ihnen gewiss nicht fehlen. Bezeichnen wir doch noch heute den höchsten Grad der Begeisterung mit dem schönen griechischen Worte Enthusiasmus.

Doch ich bin ein wenig von meinem eigentlichen Gegenstande abgeirrt und muss wieder zu diesem zurückkehren.

Ich sprach bisher fortwährend von Maschinen und von Technik. Sie würden aber fehl gehen, wenn Sie erwarteten, dass ich Sie in meinen Vorlesungen in die Kunst des Maschinenbaues einweihen werde. Dies ist Sache der tech-

nischen Mechanik und Maschinenlehre; der Gegenstand meiner Vorlesungen aber wird die analytische Mechanik sein. Ihre Definition ist viel allgemeiner. Sie hat die Gesetze zu erforschen, nach denen sich die Gesamtheit der Bewegungserscheinungen in der uns umgebenden Natur abspielt.

Wir finden daselbst zunächst sehr viele Körper, welche eine, wenigstens soweit die Beobachtung geht, unveränderliche Gestalt haben. Ihre Bewegung ist also eine blosse Ortsveränderung und Drehung ohne jede Formänderung und die analytische Mechanik wird zunächst die Gesetze für diese Ortsveränderung anzugeben haben. Andere Körper, die Flüssigkeiten (tropfbare und gasförmige), ändern ihre Gestalt während der Bewegung fortwährend in der mannigfaltigsten Weise. Man kann sich nun ein anschauliches Bild dieser steten Gestaltänderungen machen, wenn man sich die Flüssigkeiten aus kleinsten Teilchen zusammengesetzt denkt, von denen sich jedes selbständig nach denselben Gesetzen wie die festen Körper bewegt, jedoch so, dass stets 2 benachbarte Teilchen der Flüssigkeit immer nahezu dieselbe Bewegung machen. Zu den Kräften, welche von aussen auf jedes Teilchen wirken, sind noch die hinzuzunehmen, welche die verschiedenen Teilchen aufeinander ausüben. Auf diese Weise kann auch die Bewegung der Flüssigkeiten auf die Gesetze der Mechanik der festen Körper zurückgeführt werden.

Die Bewegungserscheinungen sind diejenigen, welche wir am häufigsten und unmittelbarsten beobachten. Alle anderen Naturerscheinungen

sind versteckter. Wir können auch die Bewegungserscheinungen mit der geringsten Summe von Begriffen erfassen. Wir reichen zu ihrer Beschreibung mit dem Begriffe des Ortes im Raume und der zeitlichen Veränderung desselben aus, wogegen wir bei den anderen Erscheinungen noch viel unklarere Begriffe, wie Temperatur, Lichtintensität und Farbe, elektrische Spannung etc., nötig haben.

Es ist nun überall die Aufgabe der Wissenschaft, das Kompliziertere aus dem Einfacheren zu erklären; oder, wenn man lieber will, durch Bilder, welche dem einfacheren Erscheinungsgebiete entnommen sind, anschaulich darzustellen. Daher suchte man auch in der Physik die übrigen Erscheinungen, die des Schalles, Lichtes, der Wärme, des Magnetismus und der Elektrizität auf blosse Bewegungserscheinungen der kleinsten Teilchen dieser Körper zurückzuführen, und zwar gelingt dies bei sehr vielen, freilich nicht bei allen Erscheinungen mit gutem Erfolge. Dadurch wurde eben die Wissenschaft der Bewegungserscheinungen, also die Mechanik, zur Wurzel der übrigen physikalischen Disziplinen, welche allmählich immer mehr und mehr sich in spezielle Kapitel der Mechanik zu verwandeln schienen.

Erst in neuester Zeit ist dagegen eine Reaktion eingetreten. Die Schwierigkeiten, welche die rein mechanische Erklärung des Magnetismus und der Elektrizität bot, liessen Zweifel darüber aufkommen, ob alles mechanisch erklärbar sei und gerade der Elektromagnetismus gewann immer an Wichtigkeit nicht nur für die Praxis, sondern auch für die Theorie. Schliess-

lich wurde seine Macht so gross, dass er sogar den Spiess umzukehren und die Mechanik elektromagnetisch zu erklären suchte. Während man früher Magnetismus und Elektrizität durch eine rotierende oder schwingende Bewegung der kleinsten Teile der Körper zu erklären versucht hatte, so ging man jetzt darauf aus, die Fundamentalgesetze der Bewegung der Körper selbst aus den Gesetzen des Elektromagnetismus abzuleiten.

Das bekannteste Gesetz der Mechanik ist das der Trägheit. Jeder Gymnasiast ist heutzutage damit vertraut, wobei ich natürlich bloss von der Trägheit im physikalischen Sinne spreche. Bis vor kurzem hielt man das Trägheitsgesetz für das erste Fundamentalgesetz der Natur, welches selbst unerklärbar ist, aber zur Erklärung aller Erscheinungen beigezogen werden muss. Nun folgt aber aus den Maxwellschen Gleichungen für den Elektromagnetismus, dass ein bewegtes elektrisches Partikelchen, ohne selbst Masse oder Trägheit zu besitzen, bloss durch die Wirkung des umgebenden Äthers sich genau so bewegen muss, als ob es träge Masse hätte. Man machte daher die Hypothese, dass die Körper keine träge Masse besitzen, sondern bloss aus massenlosen elektrischen Partikelchen, den Elektronen bestehen, ihre Trägheit also eine bloss scheinbare, durch die Wirkung des umgebenden Äthers bei ihrer Bewegung durch denselben hervorgerufene sei. In ähnlicher Weise gelang es, auch die Wirkung der mechanischen Kräfte auf elektromagnetische Erscheinungen zurückzuführen. Während man also früher alle Erscheinungen durch die Wir-

kung von Mechanismen erklären wollte, so ist jetzt der Äther ein Mechanismus, der an sich freilich wieder vollkommen dunkel, die Wirkung aller Mechanismen erklären soll. Man wollte jetzt nicht mehr alles mechanisch erklären, sondern suchte vielmehr einen Mechanismus zur Erklärung aller Mechanismen.

Was heisst es nun, einen Mechanismus vollkommen richtig verstehen? Jedermann weiss, dass das praktische Kriterium dafür darin besteht, dass man ihn richtig zu behandeln weiss. Allein ich gehe weiter und behaupte, dass dies auch die einzig haltbare Definition des Verständnisses eines Mechanismus ist. Man wendet da freilich ein, dass es denkbar ist, dass eine Person die Behandlungsweise eines Mechanismus erlernt hat, ohne diesen selbst zu verstehen. Allein dieser Einwand ist nicht stichhaltig. Wir sagen bloss, sie versteht den Mechanismus nicht, weil ihre Kenntnis seiner Behandlungsweise auf dessen reguläre Thätigkeit beschränkt ist. Sobald am Mechanismus etwas gebrochen ist, schlecht funktioniert oder sonst eine unvorhergesehene Störung eintritt, weiss sie sich nicht mehr zu helfen. Dass er den Mechanismus verstehe dagegen, sagen wir von demjenigen, der auch in allen diesen Fällen das Richtige zu thun weiss. So scheint dieser Umstand wirklich die Definition des Verständnisses zu bilden. Wie wir die Begriffe bilden sollen, kann nicht definiert werden, ist auch in der That vollkommen gleichgültig, wenn sie nur stets zur richtigen Handlungsweise führen.

So ist ein bekannter verlockender Fehlschluss der sogenannte Solipsismus, die Ansicht, dass die Welt nicht real, sondern ein blosses Produkt unserer Phantasie, wie ein Traumgebilde sei. Auch ich hing dieser Schrulle nach, versäumte infolgedessen praktisch richtig zu handeln und kam dadurch zu Schaden; zu meiner grössten Freude, denn ich erkannte darin den gesuchten Beweis der Existenz der Aussenwelt, welcher allein darin bestehen kann, dass man minder zu richtigen Handlungen befähigt ist, wenn man diese Existenz in Zweifel zieht.

Als ich vor 33 Jahren meine schon besprochenen ersten Vorlesungen über Mechanik hielt, neckte mich einer meiner damaligen Grazer Kollegen, indem er sagte: „Wie kann man sich nur mit so etwas rein Mechanischem befassen". Er beabsichtigte natürlich bloss ein Wortspiel; ich aber sass ihm auf und ereiferte mich darzuthun, dass die Mechanik nichts Mechanisches sei; aber trotz ihrer Schwierigkeit, trotz des unendlichen Aufwandes von Scharfsinn, den durch Jahrhunderte hindurch die grössten Gelehrten auf ihre Entwickelung verwendeten, hat es doch mit dem Mechanischen etwas auf sich.

Vom Begriffe der Trägheit habe ich schon gesprochen, ein 2. Grundbegriff der Mechanik ist der der Arbeit. Man könnte das wichtigste Gesetz der Mechanik ungefähr dahin aussprechen, dass die Natur alles mit einem Minimum von Arbeitsaufwand leistet. Wem kämen dabei nicht wieder triviale Nebengedanken? Ist der Arbeitsbegriff nicht für die Praxis ebenso der wichtigste und zugleich rätselvollste wie

für die gesamte Naturwissenschaft? Schon das aus dem Paradiese vertriebene erste Menschenpaar sah in der Arbeit den höchsten Fluch, andererseits aber wäre der Mensch ohne Arbeit kein Mensch. Stetige unausgesetzte Arbeit hat der Mensch freilich mit dem Zugtier, ja sogar mit der leblosen, von ihm selbst fabrizierten Maschine gemein und doch wird Arbeitsamkeit als eine der schönsten Charaktereigenschaften eines jeden, vom Herrscher bis zum Tagelöhner, gepriesen.

Zum Schluss möchte ich die Frage aufwerfen, ist die Menschheit durch alle Fortschritte der Kultur und Technik glücklicher geworden? In der That eine heikle Frage. Gewiss, ein Mechanismus, die Menschen glücklich zu machen, ist noch nicht erfunden worden. Das Glück muss jeder in der eigenen Brust suchen und finden.

Aber schädliche, das Glück störende Einflüsse hinwegzuschaffen, gelang der Wissenschaft und Civilisation, indem sie Blitzgefahr, Seuchen der Völker und Krankheiten der Einzelnen in vielen Fällen erfolgreich zu bekämpfen wusste. Sie vermehrte ferner die Möglichkeit, das Glück zu finden, indem sie uns Mittel bot, unseren schönen Erdball leichter zu durchschweifen und kennen zu lernen, den Aufbau des Sternenhimmels uns lebhaft vorzustellen und die ewigen Gesetze des Naturganzen wenigstens dunkel zu ahnen. So ermöglicht sie der Menschheit eine immer weiter gehende Entfaltung ihrer Körper- und Geisteskräfte, eine immer wachsende Herrschaft über die gesamte übrige Natur und befähigt den, der den inneren

Frieden gefunden hat, diesen in erhöhter Lebensentfaltung und grösserer Vollkommenheit zu geniessen.

Hochgeehrte Anwesende, ich habe die Aufgabe, Ihnen in den gegenwärtigen Vorlesungen gar Mannigfaltiges darzubieten: Verwickelte Lehrsätze, auf das höchste verfeinerte Begriffe, komplizierte Beweise. Entschuldigen Sie, wenn ich von alledem heute noch wenig geleistet habe. Ich habe nicht einmal, wie es sich geziemen würde, den Begriff meiner Wissenschaft, der theoretischen Physik, definiert, nicht einmal den Plan entwickelt, nach dem ich dieselbe in diesen Vorlesungen zu behandeln gedenke. Alles das wollte ich Ihnen heute nicht bieten, ich denke, dass wir später im Verlaufe der Arbeit besser darüber klar werden. Heute wollte ich Ihnen vielmehr nur ein Geringes bieten, für mich freilich auch wiederum alles, was ich habe, mich selbst, meine ganze Denk- und Empfindungsweise.

Ebenso werde ich auch im Verlaufe der Vorlesungen von Ihnen gar Mannigfaltiges fordern müssen: Angestrengte Aufmerksamkeit, eisernen Fleiss, unermüdliche Willenskraft. Aber verzeihen Sie mir, wenn ich, ehe ich an dieses alles gehe, Sie für mich um etwas bitte, woran mir am meisten gelegen ist, um Ihr Vertrauen, Ihre Zuneigung, Ihre Liebe, mit einem Worte, um das Höchste, was Sie zu geben vermögen, Sie selbst.

Druck von August Pries in Leipzig.

Druck von August Pries in Leipzig.

1656

Alexander Zirek

Jahresbericht

über den

Schul-Kursus 1867—68

an dem

Königlichen Gymnasium zu Emmerich.

Von dem

Director des Gymnasiums

Dr. Johann Stauder.

J. L. Romen'sche Buchdruckerei in Emmerich.

Unter den mannigfachen Hülfsmitteln des Unterrichts, welche in niederen und höheren Schulen zur Anwendung kommen, nehmen die Lehr- und Uebungsbücher unstreitig die hervorragendste Stelle ein. Das Kind trägt seinen compendiösen Wissensschatz im Fibelbuche mit sich; je weiter das Lernen fortschreitet, desto mehr nimmt die Zahl und Größe der erforderlichen Bücher zu, und steigt endlich so, daß am Schlusse der Schullaufbahn der entlassene Abiturient eine ziemlich umfangreiche Bibliothek aufweisen könnte, bestehend aus den von ihm gebrauchten Lehr- und Uebungsbüchern. Die Classiker und sonstigen zur Lectüre dienenden Werke sind ja für ihn zunächst auch nur Uebungsbücher gewesen, und haben später erst vielleicht Aussicht, Objekte bildenden Genusses, willkommene Freunde humaner Muße zu werden.

Der Bedarf hat eine schwer zu übersehende Zahl von Schulbüchern aller Art, große und kleine, hervorgerufen. Manche sind ephemere Erscheinungen geblieben, viele erfreuen sich einer sehr großen Verbreitung, alle ohne Ausnahme werden unendlich oft getadelt und angefeindet. Letzteres trifft weniger die Uebungsbücher als die Lehrbücher, und ist, wenn es von Seiten übelwilliger Schüler geschieht, ganz selbstverständlich, denn deren größte Feinde sind die Grammatiken, die Lehrbücher der Geschichte, Mathematik rc.

Jedoch auch von Seiten der Lehrer fällt manches Wort der Mißbilligung und des Tadels über die Lehrbücher, welcher, weil im Interesse der Sache ausgesprochen, Beachtung verdient, und dessen freimüthige Mittheilung von manchem Verfasser eines Lehrbuches auch geradezu gewünscht wird. Ich glaube nicht, daß einem derartigen Wunsche in sehr vielen Fällen entsprochen wird, denn nach längerem Gebrauche eines Buches (und durch solchen erst stellen wünschenswerthe Aenderungen sich klar heraus) gewöhnt man sich an dasselbe, empfindet etwaige Mängel nicht mehr allzusehr, und erzielt durch entsprechend angepaßte Unterrichtsweise zufriedenstellende Resultate. Ist der Lehrer nicht so bald befriedigt, dann gibt der Wunsch und die Hoffnung, in einem neuen Werke die erkannten Uebelstände zu verbessern, Anlaß zur Bearbeitung eines neuen Lehrbuches. Darin liegt neben dem thatsächlichen Bedarf, gewiß ein Hauptgrund des gewaltigen Anwachsens unserer Lehrbücher-Litteratur.

Die Ankündigung eines neuen Unterrichtsbuches sollte daher jedesmal fast mit Entschuldigungen begleitet, oder doch durch triftige Gründe gerechtfertigt werden. Vor allem aber muß sich das neue Buch wesentlich und nicht nur in Nebendingen von den früheren unterscheiden. Was an den andern ausgesetzt wird, soll wirklich vermieden und nach Möglichkeit besser gemacht sein.

In stetem Bewußtsein dieser berechtigten Anforderungen hat der Verfasser gegenwärtiger Zeilen bei Bearbeitung eines physikalischen Unterrichtsbuches verfahren, von welchem in der Folge eine Probe den Fachgenossen zur Beurtheilung vorgelegt werden soll.

Welcherlei Klagen erhebt man gegen die Lehrbücher? Die einen behaupten, und gewiß mit allem Recht, ein völlig unbrauchbares Lehrbuch gäbe es gar nicht: Es lasse sich mit einem jeden ein gedeihlicher, den Schüler wohl fördernder Unterricht ertheilen, und alles komme nur auf den Lehrer an. Dem gegenüber bezeichnen andere ihre Lehrbücher als das Hauptthinderniß, welches dem erwünschten Fortgange des Unterrichts im Wege stehe. Bald wird Auswahl und Anordnung des Stoffes getadelt, bald die Behandlung im einzelnen unzweckmäßig gefunden. Fast stets erklärt man die Lehrbücher für zu weitläufig und umfangreich, so daß die Masse des Materiales sich nicht bewältigen lasse, ohne die Schüler zu verdrücken, oder eine oft mißliche Auswahl treffen zu müssen. Sehr häufig wird der Zwang hervorgehoben, den das Verfolgen des Lehrbuches dem Lehrer auflegt, und mehr anderes, worauf einzugehen uns hier zu weit von unserem Ziele ablenken würde. Jene erstere, so zu sagen optimistische Behauptung der allgemeinen Brauchbarkeit sämmtlicher Lehrbücher ließe sich auch leicht dahin erweitern, ein Lehrbuch sei überhaupt etwas gleichgültiges, wo nicht überflüssiges, und es scheint deßhalb wichtig, uns zunächst zu versichern, ob dies vielleicht in der That richtig sei. Fänden wir, alle, auch die besteingerichteten Lehrbücher sind unnöthig und dürften eben so gut fehlen, damit der Lehrer völlig selbständig in Auswahl, Ordnung und Behandlung seines Stoffes verfahren könne, dann würden wir schon in dem alleinigen Vorhandensein der Lehrbücher den Grund allen Tadels derselben erblicken müssen, und da wir sie nicht vertilgen können, so bliebe nichts übrig, als das unvermeidliche zu tragen, und sie gleich anderen vorhandenen Unterrichtsmitteln für unsere Schüler so vortheilhaft als möglich zu verwerthen. Jeder Versuch, an ihnen zu bessern, wäre ohne Ziel. Ergeben sich jedoch die Lehrbücher als an sich keineswegs überflüssig, sondern recht wohl brauchbar und durch anderes nicht zu ersetzen, dann kann nur allein in der Einrichtung unserer, dermalen in Gebrauch befindlichen Lehrbücher die Ursache so vieler über sie ergehenden Beschwerden gesucht werden und es tritt die Frage nach ihrer zweckdienlichsten Einrichtung uns zur Beantwortung entgegen.

Ein Lehrbuch ist ein Buch, welches etwas lehrt. Von einem Lehrer ist dabei keine Rede. Der Autor des Buches ist der Lehrer. Bücher, mit deren Hülfe ein Lehrer seine Schüler unterrichtet, sollten anders heißen, und werden auch wohl Grundriß, Leitfaden für den Unterricht ꝛc. genannt, in dem richtigen Gefühl, es seien dies keine Lehrbücher und sollen auch keine sein.

Lehrbücher in dem ebengenannten Sinn besitzen wir, besonders für die exacten Wissenschaften, die wir hier vorzugsweise im Auge halten, höchst ausgezeichnete in reichster Auswahl. Wer an seine Universitätszeit sich zurückerinnern will, wird mir bestätigen, wie unsere vortrefflichen Lehrbücher das Nachschreiben einer Vorlesung nur in höchst seltenen Fällen als nothwendig erscheinen ließen. Aus Lehrbüchern lassen sich die philosophischen Wissenschaften meistentheils weit besser studiren als aus Vorlesungen. Diese bringen das wissenschaftliche Arbeiten zur Anschauung und bezwecken erst in zweiter Linie die Mittheilung wissenschaftlicher Resultate. Für die Mehrheit der philosophischen Studien ist das Lehrbuch nothwendig, ja allenfalls ausreichend. Nicht so ganz für die Naturwissenschaften.

Hier ist kein Buch im Stande, die unmittelbare Anschauung zu ersetzen. Der vortragende und dabei vor den Augen seiner Zuhörer experimentirende Lehrer ist die Hauptsache. Wir wissen, wie wenig die Naturwissenschaften vorangeschritten sind, so lange dieselben nur aus Büchern studirt wurden. Ist nun vielleicht für sie ein Lehrbuch überflüssig? Gewiß nicht. Das oft nur einmalige, wenn auch aufmerksame Sehen eines Dinges, einer Erscheinung reicht nicht für lange hin. Der empfangene Eindruck wird von dem folgenden verdrängt und verwischt. Nachschreiben selbst flüchtiger Notizen hindert die ungetheilte Aufmerksamkeit auf das was vorgeht, und ein Lehrbuch muß unbedingt dem Gedächtniß zu Hülfe kommen, muß nachträglich immer wieder an das gesehene und mit erlebte erinnern. Der sel. Geheimerath Mittscherlich verlangte von seinen Zuhörern, sie sollten, bevor sie das Auditorium betraten, in seinem Lehrbuche (dem die Vorlesung sich eng anschloß) den kommenden Abschnitt studirt haben, und nachher, wenn sie die beschriebenen Gegenstände und Erscheinungen mit Augen gesehen, denselben Abschnitt wieder nachstudiren. So wurde das Lehrbuch ein Vorbereitungsmittel auf die Vorlesung und ein Erinnerungsmittel an das daselbst gesehene zu dessen sicherer und bleibender Auffassung.

Allein, nicht mit Studenten haben wir es zu thun, wenn gleich selbst der kleine Sextaner sich gern stolz einen Studenten schelten läßt. Wir stehen nicht in einem Universitäts-Hörsaal, sondern vor Schulbänken. Unseren Gymnasiasten kann ein Lehrbuch, aus welchem sie selbständig etwas lernen sollen, wenig nützen. Die Stufe geistiger Entwickelung, auf welcher der Gymnasialschüler auch bei seinem Eintritt in die Prima noch steht, macht das Studium eines Lehrbuches ihm anfangs schlechthin unmöglich, später jedenfalls höchst schwierig, zeitraubend und zweifelhaft im Erfolg. Er wird unterrichtet durch den Lehrer, welcher daher auch in weit näherem Verkehr mit ihm steht, als der Professor mit seinen Zuhörern. Durch gegenseitiges Fragen und Antworten, Einüben und Repetiren wird das Verständniß des Lehrobjectes erzielt, und nicht eher vorwärts gegangen, als bis der Lehrer von dem erfolgten vollständigen Erfassen des vorgenommenen vielseitig sich überzeugt hat. Dieses Verhältniß unserer Schüler zu uns läßt erkennen, daß wir ein Lehrbuch allenfalls zu entbehren vermögen. Allzulang ist auch der allgemeine Gebrauch vorgeschriebener Lehrbücher noch nicht her, und wie der Verfasser selbst seine ersten mathematischen und physikalischen Kenntnisse seinem Lehrer allein verdankt, so möchte eine solche freie Behandlung des Unterrichtes sich wohl noch jetzt an manchen Anstalten finden, ohne daß der Lehrerfolg grade deßhalb ein geringerer sein dürfte. Unerläßlich war dabei allerdings, das wichtigste, was vorgekommen, aufzuschreiben, und welchen Eifer, wieviel kostbare Zeit verwendeten nicht pflichttreue Schüler auf Ausarbeitung ihrer Hefte. Ein solcher Aufwand von Zeit und Arbeitskraft war gewiß bedenklich, allein er war nicht zu vermeiden, und nothwendig mußte sich z. B. ein Lehrsatz mit seinen Beweisen, den man 2—3 mal aus einem Concept in das andere und in das Reinheft geschrieben, dem Gedächtniß fest einprägen. Wir unterzogen uns auch dieser Arbeit gar nicht ungern und viele lernten factisch dabei ganz gut. Aber wahrhaftig, dasselbe konnte mit weniger Fingerarbeit auch gelernt werden, wenn dem Schüler sogleich ein Heft wäre in die Hand gegeben worden, worin er das, was er schreiben wollte, unmittelbar fehlerfrei vorfand.

So wäre denn ein Lehrbuch, oder besser ein Leitfaden, ein Bedürfniß, wenigstens die Nützlichkeit eines solchen hätte sich herausgestellt. Ob es in der angedeuteten Form eines vorwurfsfreien Schüler-

heftes (es ist dies die Form mancher mathematischen Lehrbücher) grade zweckmäßig wäre, ist eine andere Frage. Wie jeder Lehrer weiß, wollen die Schüler im allgemeinen recht gern arbeiten, aber mit den Händen und mit dem Gedächtniß, weniger gern mit dem Verstande. Die große Mehrzahl wird es vorziehen, eine mathematische Entwickelung wörtlich nachzuschreiben und dann eben so wörtlich sich einzuprägen, als mit dem Verstande derselben zu folgen, um sie zu verstehen und in freier Thätigkeit des eigenen Geistes zu reproduciren. Dergleichen Schüler werden sich also daran machen, ihr Lehrbuch, Abschnitt für Abschnitt, auswendig zu lernen, wenigstens in dieser Weise auf bevorstehende größere Repetitionen und Prüfungen sich vorbereiten, ja vielleicht kopirt einer gar sein Lehrbuch nochmals und schreibt neben demselben ein dickes Heft. Er mag dann immerhin bei einer Prüfung, je nach der Methode des Examinirens, einen nicht ungünstigen Eindruck machen, aber für seine geistige Ausbildung hat er nur ein Minimum gewonnen. Indeß sind solche Exemplare von Fleiß und Beschränktheit zugleich nicht zahlreich, daher auch der Erfolg mathematischer Prüfungen nur selten äußerlich sehr glänzend. Das ist jedoch nur ein geringer Schaden, denn die auswendig gelernte Antwort ist leicht herausgehört, und trotz aller Glätte nach ihrem wahren Werth zu würdigen. Ein anderer Schüler kann in seiner Antwort sich verwickeln und verfahren, und doch dabei eine höchst erfreuliche Uebung im selbständigen Nachdenken und Schließen bekunden, während jener höchstens seinen mechanischen Fleiß bewährte. Wie endlich werden beide einer gestellten Aufgabe gegenüber stehen?

So erkannten wir die Nothwendigkeit eines Lehrbuches, sehen aber auch, wie dasselbe, gleich der besten nützlichsten Sache verkehrt angewendet werden kann. In welcher Weise ist dem zu begegnen und der Hauptzweck des Unterrichts, Schärfung des Verstandes, Uebung im logischen Denken und Urtheilen, mit dem zweiten Zweck, der Aneignung einer gewissen Summe positiver Kenntnisse, am vollständigsten zu erreichen? Ich meine, das Lehrbuch selbst müsse den angedeuteten Mißbrauch unmöglich machen. Es muß sich wesentlich von dem besten Schülerheft unterscheiden. Was es enthält, das muß der Schüler schließlich unverlierbar fest inne haben, es also auch allenfalls auswendig lernen dürfen. Es darf nichts geben als so zu sagen, das Scelett des ganzen Unterrichtes, nichts, was der Schüler durch eigene Thätigkeit ergänzen kann, wenn er geweckten Geistes dem Vortrage des Lehrers gefolgt war. So gehören in das Lehrbuch wichtige Definitionen, auf deren präcise Fassung Werth gelegt werden muß, Hauptlehrsätze, Hauptformeln, jedoch nur selten ihre Entwickelung, häufig vorkommende, vielgebrauchte Zahlen, keine Aufgaben.*) Der Unterricht wird dieses dürftig erscheinende Fachwerk schon ausfüllen, dem Scelett Fleisch, Blut und Leben geben.

Ein in diesem Sinne gehaltenes Buch würde, wenige Bogen stark, inhaltreich genug sein können. Es wäre freilich nicht: „Für Schulen und zum Selbstunterricht", aber derlei Werke wollen zwei ziemlich weit auseinander liegende Ziele zugleich erreichen und bleiben deßhalb oft von beiden gleich weit entfernt.

Ich kenne ein sehr vorzügliches mathematisches Unterrichtsbuch für Gymnasien: Hauptsätze der Elementar-Mathematik von F. G. Mehler, Berlin bei Reimer, welches auf dem kleinen Raum von

*) Auf die Bequemlichkeit der Aufgabensammlungen möchte man billig verzichten, wenn man beachtet, in welcher Weise der Nutzen derselben leider so oft illusorisch gemacht wird.

kaum 8 Bogen alles enthält, was von dem besten Abiturienten des besten Preußischen Gymnasiums an mathematischen Kenntnissen gefordert werden kann. Es stehen aber darin auch nur die Hauptsätze, welche der Lehrer beim Unterricht bedarf. Demselben bleibt mit der völligen Freiheit auch die Aufgabe der Ausführung und allseitigen Belebung des Stoffes. Es ist ein Thema, mannigfacher Variation fähig, und soll nicht handwerksmäßig abgespielt werden. Die so ungeheuer gründlichen und schleppenden Einleitungstheoreme, sonst der gewöhnliche Beginn der einzelnen Abschnitte, die zu nichts so gut dienen, als den Schüler gründlich zu ermüden, sucht man hier vergebens. Ueber diese Partieen hinwegzukommen, bleibt dem Lehrer überlassen. Nichts aber ist übergangen, was sicher gewußt und eingeprägt werden muß. Solch ein Buch ist angenehm, und ähnlich eingerichtet mit den in dem Stoffe begründeten Modificationen, denke ich mir ein physikalisches Unterrichtsbuch für Schulen. Naturgeschichte und Physik sind in den Lehrplan unserer Gymnasien aufgenommen, nicht sowohl, weil durch Betreibung dieser Wissenschaften eben so gut als durch das Studium der klassischen Sprachen die allgemein propädeutischen Zwecke des Gymnasiums erreicht werden können, als weil unsere Zeit ein gewisses Maß naturwissenschaftlicher Kenntnisse von jedem gebildeten Menschen verlangt. Selbstverständlich begnügt sich das Gymnasium nicht damit, etwa in der Schülerbibliothek einen Vorrath populärer naturwissenschaftlicher Schriften aufzusammeln, und den Schülern zur Lectüre zu bieten. Kenntnisse so leichten Gewichtes geziemen sich nicht für den künftigen Studirenden. Er muß früh neben der unterhaltenden auch die strenge Seite der Wissenschaft kennen lernen. Ihn darf die Schwierigkeit nicht schrecken, deren Ueberwindung von nachhaltigerem Werthe ist, größeren Genuß, reinere Befriedigung gewährt, als der leichte Wissensfirniß, mit welchem sich auf ein Stündchen in der Unterhaltung glänzen läßt. Physik wird schon gereiftern Schülern vorgetragen. Sobald als möglich, muß denselben das ganze Lehrgebäude dieser Wissenschaft in seinen Hauptzügen vorgestellt, und in allen beim Unterricht behandelten Theilen ein wirkliches Wissen, d. h. ein Wissen, verbunden mit Können, erzielt werden. Wenn der Schüler im Stande ist, eine physikalische Aufgabe zu lösen, dann erst kann er sagen, er verstehe etwas von Physik. Er muß wirklich, z. B. ein Gasvolum auf bestimmten Barometer und Thermometerstand reduciren können, sonst ist aller Unterricht vergebens. Wahr ist es, die mathematischen Kenntnisse eines Gymnasiasten reichen nur in sehr beschränkter Weise zur Behandlung physikalischer Probleme aus, innerhalb dieser Grenzen jedoch müssen sie zur Anwendung kommen, das scheint mir unerläßlich. Der Schüler muß folglich die einschlägigen Naturgesetze kennen, nebst den erforderlichen Zahlenangaben und Coefficienten, ohne welche er nichts beginnen kann. Sein Buch muß sie ihm geben, damit der Lehrer nicht seine wenige Zeit mit Dictaten verliere. Die vorhandenen Lehrbücher geben sie auch wohl, aber noch so viel anderes dabei, daß der Schüler die Hauptsache oft gar nicht herausfindet. Sind dann die Formeln im Unterricht gehörig entwickelt, die Gesetze evident abgeleitet, dann muß die eigene Kraft des Schülers, anfänglich unter Anleitung des Lehrers, eine passend gestellte Aufgabe bewältigen.

Wir sehen jetzt, was das physikalische Schulbuch enthalten muß:

Die unentbehrlichsten Definitionen, die hauptsächlichsten physikalischen Gesetze, endlich die wichtigsten physikalischen Constanten in genauen Zahlenangaben. Ein solches Buch, während es dem Lehrer

volle Freiheit in der Behandlung seines Gegenstandes läßt, schützt ihn zugleich vor Uebergehung irgend eines wesentlichen Punktes. Er kann jetzt, experimentell oder analytisch, je nach dem grade vorliegenden Stoffe und dem Standpunkte seiner Schüler, vor diesen die Thatsachen entwickeln, welche dieselben in ihrem Buche in geordneter Sammlung besitzen, wogegen er jetzt besten Falls nur sagen kann, was im Buche steht. Die Schüler werden dem Vortrage in der Klasse, durch welchen ihnen das Verständniß ihres Lehrbuches erst eröffnet wird, mit Freuden folgen, wogegen sie jetzt, wenn nicht grade auf dem Experimentirtische etwas zu sehen ist, gar zu gerne mit Nebendingen sich beschäftigen. Sie werden Mittheilnehmer an der Untersuchung, sie erleben mit die Auffindung der Naturgesetze, und erkennen dieselben als das geistige Band in der Mannigfaltigkeit der Naturerscheinungen. Auf solche Art gewinnt der ganze Unterrichtszweig an Werth und Würde, und wird nicht mehr, wie jetzt wohl noch zuweilen geschieht, für wenig anderes, als kostbare unnütze Spielerei angesehen. Die Physikstunden hören auf, Erholungsstunden zu sein, und das ist gut.

Ein in der angedeuteten Intention bearbeitetes physikalisches Unterrichtsbuch ist mir nicht bekannt. Deßhalb habe ich den Versuch gemacht, ein solches zusammenzustellen und gebe im folgenden als Probe, wie ich mir die Sache denke, den meiner Meinung nach wichtigsten Abschnitt der Physik, die Mechanik, mit Ausschluß der Lehre von der Wellenbewegung. Ich bin weit entfernt von dem Glauben, nun wirklich schon das erstrebte beste erreicht zu haben, und würde völlig befriedigt sein, wenn durch erneute Anregung der für uns Lehrer so hochwichtigen und deßhalb auch interessanten Lehrbücherfrage erfahrenere und talentvollere Collegen zur Weiterbehandlung derselben sich bewogen finden möchten.

Einleitung.

a. Die Aufgabe der Physik ist die Ermittelung der Eigenschaften der Körper und der an denselben auftretenden Erscheinungen, die Auffindung bestimmter Gesetze, nach welchen die Naturkräfte wirken (Maaß-, Gewichts-, Zeit-Angaben); endlich die Erklärung der Naturerscheinungen aus obersten, die Naturgesetze umfassenden Prinzipien.

b. Fundamental-Einheit des Längenmaaßes ist das Meter, der zehnmillionte Theil des Erdmeridian-Quadranten.

1 Meter	gleich	3,186199 pr. Fuß.
1 pr. Fuß	=	0,3132535 M.
1 Millimeter	=	0,458813 pr. Linien.
1 pr. Linie	=	2,179538 Millim.
1 geogr. M.	=	23642,89 pr. Fuß.
	=	7420,1527 M.

Fundamental-Einheit des Gewichtes ist das Gramm, das Gewicht eines Cubik-Centimeter reinen Wassers im Zustande seiner größten Dichtigkeit bei 4,08° C.

1 Gramm	gleich	0,6 Quentchen.
1 pr. Pfund	=	500 Gramm.
1 Cub. Fuß Wasser wiegt		61,7379 Pfd.
1 Cub. Zoll „ „		1,07184 Loth.
1 Cub. Fuß atmosph. Luft wiegt		2,406 Loth.

Fundamental-Einheit der Zeit ist die Secunde.

c. Allgemeine Körpereigenschaften sind:

Räumliche Ausdehnung.
Ausdehnbarkeit und Zusammendrückbarkeit.
Theilbarkeit.
Beweglichkeit.
Trägheit oder Beharrungsvermögen.

Ihre theilweise Erklärung finden dieselben durch die Atomentheorie, welche zugleich Aufschluß gibt über das Auftreten der Körper in den verschiedenen Aggregatformen als:

Feste Körper.
Tropfbar flüssige Körper.
Luftförmige Körper.

d. Kraft heißt eine jede, den Zustand eines Körpers in irgend einer Weise verändernde Ursache.

Erste Abtheilung.

Bewegungslehre.

Erstes Kapitel.

Von den bewegenden Kräften.

§. 1. Allgemeine Gesetze der bewegenden Kräfte.

a. Eine bewegende Kraft wirkt auf den von ihr angegriffenen Punkt, mag dieser in Ruhe oder bereits in Bewegung sein, in derselben Weise.

b. Zwei, denselben Punkt angreifende Kräfte vereinigen ihre Wirkungen in der Art, daß der resultirende Weg des angegriffenen Punktes in Länge und Richtung gleich ist der Diagonale des Parallelogramms, welches aus den Wegen construirt werden kann, die aus dem alleinigen Einfluß jeder der beiden Kräfte hervorgegangen wären.

(Componenten, Resultante. Letztere gleich 0 im Falle des Gleichgewichtes.)

c. Liegt der angegriffene Punkt auf einer um einen festen Punkt drehbaren Linie, so ist die Wirkung der Kraft f ihrem Abstande r vom Drehpunkt proportional. Das Produkt fr heißt das statische Moment der Kraft.

d. Wird ein System fest verbundener Punkte durch zwei parallele Kräfte angegriffen, so ist ihre Resultirende gleich ihrer algebraischen Summe. Der Angriffspunkt derselben liegt auf ihrer Verbindungslinie, innerhalb der Componenten, wenn diese gleichgerichtet, außerhalb auf Seiten der größeren, wenn sie entgegengesetzt gerichtet sind. Seine Abstände von den Angriffspunkten der Componenten sind diesen selbst umgekehrt proportional.

(Kräftepaare, Mittelpunkt paralleler Kräfte, Schwerpunkt, stabiles, labiles, indifferentes Gleichgewicht.)

e. Halten mehrere Kräfte einander im Gleichgewicht, so ist jede einzelne gleich und entgegengesetzt der Resultirenden aller übrigen.

f. Erhält ein System verbundener Punkte, welche von im Gleichgewicht stehenden Kräften angegriffen werden, eine sehr geringe Drehung um irgend einen Punkt, so ist die algebraische Summe der Produkte aus den einzelnen Kräften in die von ihren Angriffspunkten zurückgelegten Wege gleich Null. (Prinzip der virtuellen Bewegungen.)

§. 2. Gleichförmige Bewegung.

a. Momentan wirkende Kräfte bringen gleichförmige Bewegung hervor. In derselben ist der zurückgelegte Weg S der Dauer t der Bewegung proportional.

$$S = ct \qquad (1.)$$

Der in der Zeiteinheit zurückgelegte Weg c heißt die Geschwindigkeit des bewegten Körpers.

b. Es beträgt die mittlere Geschwindigkeit

eines Fußgängers	5	Fuß
trabenden Pferdes	10	„
Locomotive	20— 30	„
Brieftaube	100	„
Büchsenkugel	1200—1500	„
Kanonenkugel	2000	„

§. 3. Gleichförmig beschleunigte Bewegung.

a. Anhaltend wirkende, gleichbleibende Kräfte bringen gleichförmig beschleunigte Bewegung hervor. Die Endgeschwindigkeit v, welche der bewegte Körper nach Verlauf der Zeit t erlangt, ist dieser Zeit proportional

$$v = \gamma . t \qquad (2.)$$

die in der Zeiteinheit erlangte Geschwindigkeit γ heißt die Beschleunigung der bewegenden Kraft.

Der Weg S, welchen der bewegte Körper in der Zeit t zurücklegt, ist dem Quadrate dieser Zeit proportional

$$S = {}^1\!/_2\, \gamma . t^2 \qquad (3.)$$

Aus 2 und 3 folgt noch

$$v^2 = 2\, \gamma\, S \qquad (4.)$$

b. Besitzt der bewegte Körper eine der bewegenden Kraft gleich oder entgegengesetzt gerichtete Anfangsgeschwindigkeit a, so folgt:

$$v = a \pm \gamma\, t \qquad (2a)$$

$$S = at \pm {}^1\!/_2\, \gamma\, t^2 \qquad (3a)$$

c. Die Beschleunigung ist der wirkenden Kraft f direkt, dem Gewicht p des bewegten Körpers umgekehrt proportional

$$\gamma = g . \frac{f}{p} \qquad (5.)$$

das Verhältniß der bewegenden Kraft zu der von derselben einem Körper ertheilten Beschleunigung heißt die Masse m des Körpers.

$$m = \frac{f}{\gamma} \qquad (6.)$$

da also $\gamma = \frac{f}{m}$ ist, so folgt:

$$v = \frac{f}{m} . t \qquad (2b)$$

$$S = {}^1\!/_2 . \frac{f}{m} . t^2 \qquad (3b)$$

$$v = a \pm \frac{f}{m} . t \qquad (2c)$$

$$S = at \pm {}^1\!/_2 . \frac{f}{m} . t^2 \qquad (3c)$$

d. Aus 2c folgt

$$ft = mv \qquad (7.)$$

das Produkt mv heißt die Bewegungsgröße des Körpers.

Grundsatz: die Bewegungsgröße eines Systems, welches nur durch in ihm selbst liegende Kräfte bewegt wird, ist constant.

e. Aus 3b folgt:

$$Sf = \frac{1}{2} mv^2 \qquad (8.)$$

das Produkt Sf heißt die Arbeit der bewegenden Kraft, das Produkt mv^2 (neuerdings $\frac{1}{2} mv^2$) heißt die lebendige Kraft des bewegten Körpers.

§. 4. Rotationsbewegung.

a. Dreht eine Masse m sich mit der Geschwindigkeit v in der Entfernung r von einer festen Axe um dieselbe, so erlangt sie das Bestreben, sich von dem Drehungsmittelpunkt zu entfernen. (Tangentialkraft, Centripetalkraft, Centrifugalkraft.)

Die Centrifugal- oder Schwungkraft ist der rotirenden Masse und dem Quadrat der Rotationsgeschwindigkeit direkt, dem Radius der Bahn umgekehrt proportional

$$f = \frac{mv^2}{r} \qquad (9.)$$

b. Befinden sich auf derselben Drehungsaxe einmal eine Masse m im Abstande r, ein anderes Mal eine Masse M im Abstande R vom Drehpunkt, so ertheilt eine in einem bestimmten Punkt angreifende Kraft ihnen die gleiche Winkelgeschwindigkeit, wenn

$$m : M = R^2 : r^2$$

oder $m\, r^2 = M\, R^2$ ist.

Das Produkt $m\, r^2$ heißt das Trägheitsmoment der Masse m in Beziehung auf den Drehpunkt.

Das Trägheitsmoment eines vierkantigen Stabs von der Länge l, der Breite b und dem Gewicht p ist in Bezug auf eine, durch seinen Schwerpunkt gehende, seiner Höhe parallele Axe =

$$\frac{p}{12} (l^2 + b^2)$$

§. 5. Irdische Schwere. Specifisches Gewicht.

a. Die Körper üben einen Druck auf ihre Unterlage aus. Nicht unterstützt, fallen sie. Es erleiden also die Körper einen Zug nach unten (nach dem Erdmittelpunkt hin). Sie werden von der Erde angezogen. Die angehende Kraft der Erde heißt die Schwere, der Druck der Körper auf ihre Unterlage ihr Gewicht.

b. Specifisches Gewicht heißt das Gewichtsverhältniß gleicher Körpervolumina.

Specifische Gewichte fester Körper (Wasser = 1.)

Bimsstein	0,914 — 1,647	Diamant	3,44 — 3,55
Blei	11,352	Eichenholz	0,65

Eis	0,916	Quecksilber	13,598
Eisen (gegossen)	7,204	Schwefel	2,072
Glas	2,37 — 3,3	Silber	10,477
Gold	19,258	Tannenholz	0,555
Kork	0,24	Zink	7,191
Kupfer	8,788	Zinn	7,291
Platin	21,7		

Flüssige Körper (Wasser = 1.)

Alkohol (absoluter)	0,7947
Salpetersäure (79,7 %)	1,5
Salzsäure (39,675 %)	1,2
Schwefelsäure (concentr.)	1,85

Luftförmige Körper (Atmosph. Luft = 1.)

Chlor	2,4403	Stickstoff	0,976
Kohlensäure	1,5208	Wasserstoff	0,0688
Sauerstoff	1,1026		

§. 6. Fallbewegung.

Wird in den für gleichförmig beschleunigte Bewegung geltenden Formeln die bewegende Kraft f gleich dem Gewichte p des bewegten Körpers gesetzt, so erhält man die Gesetze des freien Falles der Körper.

Aus 5 folgt:

$$\gamma = g$$

die Zahl g, die Beschleunigung der Schwere, ist wegen der sphäroidischen Gestalt und der Rotationsbewegung der Erde nicht überall gleich.

Unter 0° Breite ist g = 9,78 Meter = 31,16297 Fuß
45° g = 9,80552 = 31,24399
90° g = 9,8308 = 31,32498

die Formeln 2, 3, 4 gehen über in die nachstehenden:

$$v = gt \qquad (10.)$$

$$S = \tfrac{1}{2}\, gt^2 \qquad (11.)$$

$$v^2 = 2g\, S \qquad (12.)$$

§. 7. Wurfbewegung.

a. Bei senkrecht mit der Geschwindigkeit a aufwärts gerichtetem Wurf ist

$$v = a - gt \qquad (10a)$$

also die Zeit des Steigens:

$$t = \frac{a}{g} \qquad (13.)$$

Ferner $$S = at - \frac{1}{2} gt^2 \qquad (11a)$$

also die Steighöhe: $$S = \frac{1}{2} \frac{a^2}{g} \qquad (14.)$$

Für die Fallzeit und die nach dem Fall erlangte Endgeschwindigkeit ergibt sich:

$$t = \frac{a}{g}$$

$$v = a.$$

Der vertikal in die Höhe geworfene Körper steigt während der ersten Hälfte seiner Bewegungszeit, und fällt während der zweiten Hälfte. Er erlangt durch den Fall seine Anfangsgeschwindigkeit wieder.

b. Ein schief in die Höhe geworfener Körper beschreibt einen Ellipsenbogen. Auf die geringe Entfernung, in welche ein Körper geworfen werden kann, darf die Richtung der Schwere als parallel bleibend angesehen werden, und unter dieser Voraussetzung folgt für die Wurfbahn ein Parabelbogen. (Unsymmetrische Bahn in der Luft.)

Ist a die Anfangsgeschwindigkeit, α die Elevation des Wurfes, so ist die Wurfweite

$$x = \frac{a^2}{g} \sin 2\alpha \qquad (15.)$$

Ihr Maximum bei einer Elevation von 45°. Die größte, in der Mitte der Bahn erreichte Höhe ist

$$y = \frac{a^2}{2g} \sin^2\alpha \qquad (16.)$$

Die Geschwindigkeit in irgend einer Höhe h ist

$$v = \sqrt{a^2 - 2gh}$$

in gleicher Horizontale mit dem Anfangspunkte der Bewegung ist

$$v = a.$$

§. 8. Bewegung auf geneigter Ebene.

Liegt ein Körper auf einer um α^0 gegen die Horizontale geneigten Ebene, so beschleunigt denselben die der geneigten Ebene parallele Componente der Schwere, p sin α. Die Beschleunigung ist also

$$\gamma = g. \sin \alpha \qquad (17.)$$

Ist l die Länge, h die Höhe der geneigten Ebene, also $l = \frac{h}{\sin \alpha}$, so durchläuft der Körper die Strecke l in der Zeit

$$t = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (18.)$$

und erlangt im tieffstem Punkte derselben die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2gh}$$

dieselbe, welche er durch freien Fall von der Höhe h erlangt haben würde.

§. 9. Pendelbewegung.

a. Ein schwerer Punkt, an einem gewichtslosen Faden aufgehängt, heißt ein einfaches Pendel. Ist l die Länge desselben, und seine Schwingungen von so geringer Amplitude, daß man die durchlaufenen Bogen ihren Sehnen gleichsetzen darf, so ist die Dauer einer (halben) Schwingung

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (19.)$$

Die Pendelschwingungen von geringer Elongation sind isochron. Sie sind unabhängig von dem Gewichte des schwingenden Punktes.

b. Länge eines physischen Pendels nennt man diejenige des einfachen Pendels, welches mit ihm gleiche Schwingungsdauer hat. Sie ist gleich dem Verhältniß der Summe der Trägheitsmomente zu der Summe der statischen Momente der sämmtlichen Moleküle des Pendels.

Die Länge des Sekundenpendels ist

$$l = \frac{g}{\pi^2}$$

also proportional der Beschleunigung der Schwere.

Unter 0° Breite ist	$l = 0{,}990938$ Meter	$= 3{,}1579$	Fuß.
45°	$l = 0{,}993509$	$= 3{,}1655$	„
90°	$l = 0{,}99608$	$= 3{,}1737$	„

c. Die Pendelschwingungen verbleiben in parallelen Ebenen, auch wenn der Aufhängungspunkt bewegt wird. Daher zeigt die Schwingungsebene eines Pendels der Rotation der Erde wegen eine scheinbare Drehung in der der Rotation entgegengesetzten Richtung (Foucaults Beweis der Axendrehung der Erde.)

Ist φ die geographische Breite, α die Drehung der Erde in einer bestimmten Zeit, so ist die gleichzeitige Drehung der Pendelebene:

$$\alpha . \sin \varphi .$$

§. 10. Maß der bewegenden Kräfte. Vergleichung mit der Schwere.

a. Eine arbeitende Kraft ist dem Widerstande, welchen sie überwindet, gleich. Die Überwindung eines Widerstandes von 1 Pfund (Kilogramm) auf eine Strecke von 1 Fuß (Meter) wird als Arbeitseinheit angenommen, und heißt 1 Fußpfund (Meterkilogramm). Die in einer Secunde geleistete Zahl von Fußpfund gibt die Arbeitsfähigkeit der Kraft an.

480 Fußpfund (75 Meterkilogramm) heißen eine Pferdekraft.

b. Ertheilt eine Kraft von f Fußpfund einem Körper vom Gewicht p eine Beschleunigung γ, so ist, da die Masse des Körpers

$$m = \frac{p}{g} = \frac{f}{\gamma},$$

die Beschleunigung

$$\gamma = f . \frac{g}{p}$$

und man erhält für die Bewegung des Körpers die Formeln:

$$v = \frac{fg}{p} \cdot t \qquad (2d)$$

$$S = {}^1/_2 \frac{fg}{p} t^2 \qquad (3d)$$

$$v = a \pm \frac{fg}{p} t \qquad (2e)$$

$$S = at \pm {}^1/_2 \frac{fg}{p} t^2 \qquad (3e)$$

$$t = \frac{a}{g} \cdot \frac{p}{f} \qquad (13a)$$

$$S = {}^1/_2 \frac{a^2}{g} \cdot \frac{p}{f} \qquad (14a)$$

§. 11. Planetenbewegung.

Die Planeten bewegen sich um die Sonne (die Monde um ihre Central-Körper) nach den von Kepler aufgefundenen Gesetzen.

1. Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
2. In gleichen Zeitintervallen beschreiben die Leitstrahlen gleiche Sectoren der Bahn.
3. Die zweiten Potenzen der Umlaufszeiten sind proportional den dritten Potenzen der mittleren Abstände der Planeten von der Sonne.

§. 12. Newton's Gravitationsgesetz.

Die bisher angeführten Erscheinungen finden ihre Erklärung durch das von Newton aufgestellte Prinzip der allgemeinen Gravitation:

Jedes Atom zieht jedes andere Atom an, mit einer Kraft, welche dem Quadrate des gegenseitigen Abstandes beider umgekehrt proportional ist.

Zweites Kapitel.

Mechanik fester, flüssiger und luftförmiger Körper.

§. 13. Festigkeit.

a. Absolute Festigkeit heißt der Widerstand der Körper gegen das Zerreißen. Dieselbe ist bei Stäben, welche durch Gewichte gestreckt werden, unabhängig von ihrer Länge, proportional ihrem Querschnitt. Erfahrungsmäßig zerreißen Stäbe von 1 Quadratzoll Querschnitt bei folgenden Minimal-Belastungen:

Gußstahl	1368 Ctr.
Schmiedeeisen	412—824
Gußeisen	177—190

Kupfer (gezogen)	410—820 Ctr.
Blei	820—900
Eichenholz	95—123

b. Relative Festigkeit heißt der Widerstand der Körper gegen das Abbrechen.

Dieselbe hängt bei Stäben von ihrer Befestigungs- und Belastungsweise ab. Unter übrigens gleichen Umständen ist sie proportional der Breite und der zweiten Potenz der Höhe, umgekehrt proportional der Länge des Stabes.

c. Rückwirkende Festigkeit heißt der Widerstand der Körper gegen das Zerdrücken. Dieselbe nimmt bei Pfeilern, Säulen und Stützbalken mit zunehmender Länge in gesteigertem Verhältniß ab.

d. Torsionsfestigkeit heißt der Widerstand der Körper gegen das Abdrehen. Dieselbe ist, gleich der absoluten Festigkeit, unabhängig von der Länge, proportional dem Querschnitt des Körpers.

§. 14. Elasticität.

a. Ueberschreiten die die Festigkeit eines Körpers angreifenden Kräfte nicht ein gewisses Maß, so stellt sich das frühere, durch sie gestörte Gleichgewicht zwischen den Körpermolekülen wieder her. Diese Fähigkeit der Körper, ihre gewaltsam veränderte Form wieder herzustellen, heißt Elasticität. Wird die Elasticitätsgränze überschritten, so constituirt sich ein neuer Gleichgewichtszustand der Moleküle, und der Körper erleidet eine bleibende Veränderung seiner Form.

b. Wird ein Stab von der Länge l und dem Querschnitt q durch ein Gewicht p gestreckt, so ist seine Verlängerung

$$a = \frac{pl}{q} \cdot f \qquad (20.)$$

der Faktor f ist von dem Material des Stabes abhängig. $\frac{1}{f} = c$ heißt der Elasticitätscoefficient, und bezeichnet das Gewicht, welches einen Stab von der Länge und den Querschnitt 1 auf die doppelte Länge ausstrecken würde, falls das Material eine solche Ausdehnung innerhalb der Elasticitätsgränze gestattete.

Unter Annahme des Zolles als Längeneinheit ist

für Stahl	c = 250000—300000 Ctr.
Schmiedeeisen	= 200000—270000
Gußeisen	= 136800—170000
Eisendraht	= 246240—260000
Messingdraht	= 136800—170000
Eichenholz	= 16400 —18000

Die Dehnung, bei welcher die Elasticitätsgränze erreicht wird, beträgt

bei Stahl	0,0011976 der urspr. Länge.
Schmiedeeisen	0,0006597
Gußeisen	0,000833
Eisendraht	0,0008

Messingdraht	0,0013477
Holz	0,00166

c. Wird ein an einem Ende horizontal befestigter Stab von der Länge l, der Breite b, der Dicke d am anderen Ende durch ein Gewicht p belastet, so entfernt sich das freie Ende von seiner ursprünglichen Lage um eine Strecke

$$a = \frac{pl^3}{bd^2} \cdot c \qquad (21.)$$

d. Wird ein cylindrischer an einem Ende befestigter Stab von der Länge l und dem Radius r durch eine am Umfang des freien Endes wirkende Kraft f um seine Axe gedreht, so beschreibt ein Punkt dieses Endes einen Winkel

$$\gamma = \frac{fl}{r^4} \cdot c \qquad (22.)$$

c ist wiederum ein von dem Material abhängiger Coefficient.

§. 15. Stoß der Körper.

Stoßen zwei unelastische Körper, deren Massen m u. M, deren gleich oder entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeiten v und ± V sind, central aufeinander, so ist nach dem Stoß ihre gemeinschaftliche Geschwindigkeit

$$c = \frac{mv \pm MV}{m + M} \qquad (23.)$$

Sind die zusammenstoßenden Massen elastisch, so erlangt nach erfolgtem Stoße die Masse m die Geschwindigkeit

$$c = \frac{\pm 2MV + v\ (m - M)}{m + M} \qquad (24.)$$

die Masse M die Geschwindigkeit

$$C = \frac{2mv \mp V\ (m - M)}{m + M} \qquad (24a)$$

Ist m = M, so folgt

$$c = \pm V$$
$$C = v$$

Gleiche, elastische Massen vertauschen nach dem Zusammenstoß ihre Geschwindigkeiten.

Ist M die Masse eines unbeweglichen Körpers, so ist M im Vergleich zu m sehr groß anzunehmen, dagegen V = 0, und es erfolgt

$$c = - v$$

Ein gegen eine feste Wand stoßender elastischer Körper prallt mit der Geschwindigkeit des Aufschlages in entgegengesetzter Richtung zurück.

§. 16. Reibung.

a. Unter Reibung versteht man den Widerstand, den ein Körper bei der Bewegung über die Oberfläche eines anderen hin erfährt (gleitende, wälzende Reibung).

Die gleitende Reibung ist proportional dem Druck des gleitenden Körpers auf seine Unterlage. Dieselbe wird vermindert durch Glätten der Reibungsflächen und passende Schmiermittel.

Ungleichartige Körper veranlassen im allgemeinen geringere Reibung als gleichartige. Die Reibung ist von der Geschwindigkeit der Bewegung und der Ausdehnung der Reibungsflächen unabhängig. Die Reibung ist im Beginn der Bewegung 2 bis 3 mal stärker als im Verlauf derselben.

b. Die Reibung während der Bewegung beträgt für

Holz auf Holz (eingefettet) 0,07 des Drucks.
Metall auf Metall (eingeölt) 0,07
Holz auf Metall (eingeölt) 0,06

Die wälzende Reibung am Umfang der Wagenräder beträgt

auf Chausseen und Brücken 0,025 der Belastung.
Straßenpflaster 0,0166
Eisenbahnen 0,005

§. 17. Die mechanischen Potenzen oder Elementar-Maschinen.

a. Der Hebel (ein- und zweiarmiger Hebel.)

Kräfte am Hebel sind im Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe ihrer Momente gleich Null ist.

b. Die Rolle (feste und lose Rolle).

Kraft und Last an der festen Rolle sind im Gleichgewicht, wenn beide gleich groß sind.

An der losen Rolle findet Gleichgewicht statt, wenn die an dem freien Seilende wirkende Kraft zu der an der Rollenaxe angreifenden Last dasselbe Verhältniß hat, wie der Radius der Rolle zu der Sehne des vom dem Seil umspannten Bogens. Am Flaschenzug findet Gleichgewicht statt, wenn das Verhältniß der Last zur Kraft gleich ist der Zahl der die lose Flasche tragenden Schnurtheile. Am Potenzenzug mit n Zugrollen findet Gleichgewicht statt, wenn das Verhältniß der Last zur Kraft gleich 2^n ist.

c. Die schiefe Ebene (Schraube und Keil).

Ist α der Neigungswinkel der schiefen Ebene, so findet auf derselben Gleichgewicht statt, wenn das Verhältniß der Kraft zur Last gleich $\sin\alpha$ oder gleich $\operatorname{tg}\alpha$ ist, je nachdem die Kraft eine der schiefen Ebene selbst oder ihrer Basis parallele Richtung hat.

An der Schraube (Schraubenspindel und Schraubenmutter) findet Gleichgewicht statt, wenn die drehende Kraft zu der vorwärts bewegenden (Widerstand leistenden) sich verhält, wie die Höhe eines Schraubenganges zum Umfang der Schraube.

Am Keil findet Gleichgewicht statt, wenn die auf den Rücken des Keiles wirkende Kraft zu dem auf die Seiten desselben wirkenden Widerstand sich verhält, wie die Breite des Keilrückens zu seiner Seitenlänge oder seiner Höhe, je nachdem der Widerstand senkrecht gegen die Seite oder gegen die Höhe des Keiles gerichtet ist.

d. Durch Maschinen wird keine Kraft producirt, sondern nur die Arbeitsgröße einer vorhandenen Kraft an andere Punkte übertragen.

§. 18. Gesetze des hydrostatischen Gleichgewichts.

a. Gestalt der Flüssigkeiten.

Die Oberfläche einer ruhigen Flüssigkeitsmasse ist, der Schwere wegen, horizontal. Von äußeren Einflüssen befreit, haben die Flüssigkeiten Kugelgestalt.

b. Hydrostatischer Druck.

Wasser in einem vollständig gefüllten Gefäß pflanzt einen von außen empfangenen Druck nach allen Richtungen gleichmäßig fort. Der Druck gegen ein Stück der Gefäßwand ist der Größe dieses Stückes proportional.

c. Hydrostatisches Paradoxon.

Der Druck des Wassers an einem bestimmten Punkt ist nach allen Richtungen gleich, und proportional dem Abstande von der Oberfläche (Auftrieb). Er ist, unabhängig von der Gestalt des Gefäßes und der Wassermenge, gleich dem Gewicht einer Wassersäule, welche die Druckfläche zur Basis und den Niveauabstand zur Höhe hat.

d. Gesetz der communicirenden Gefäße.

In communicirenden Gefäßen steht dieselbe Flüssigkeit gleich hoch. Die Höhen verschiedener Flüssigkeiten über ihrer Trennungsfläche sind ihren specifischen Gewichten umgekehrt proportional.

e. Archimedisches Prinzip.

Ein in Wasser eintauchender Körper verliert von seinem Gewichte soviel, als das von ihm verdrängte Wasser wiegt.

f. Schwimmen der Körper.

Specifisch leichtere Körper als Wasser werden durch den Auftrieb so weit aus dem Wasser gehoben, bis ihr absolutes Gewicht demjenigen des von ihnen verdrängten Wassers gleich ist.

§. 19. Bewegung des Wassers.

a. Toricellisches Theorem.

Die Ausflußgeschwindigkeit des Wassers aus einer im Abstand h von der Oberfläche befindlichen Oeffnung ist

$$v = \sqrt{2g.h} \qquad (25.)$$

b. Ausflußmenge des Wassers.

Die theoretische Ausflußmenge aus einer im Abstande h von der Oberfläche befindlichen Oeffnung a ist

$$a.v$$

Wegen der in geringer Entfernung von der Oeffnung stattfindenden Contraction des Strales ist die wirkliche Ausflußmenge geringer und gleich

$$c.a.v$$

Für Wasser ist bei vollständiger Contraction der Coefficient $c = 0{,}62$. Bei Anwendung kurzer Ansatzröhren von der Gestalt des contrahirten Strales ist $c = 0{,}95$.

§. 20. Gesetze des Gleichgewichts der Gase.

a. Mariottesches Gesetz.

Die Dichtigkeit eines Gases ist proportional dem Druck, unter welchem es sich befindet. Sein Volumen ist diesem Druck umgekehrt proportional.

b. Daltonsches Gesetz.

Die Dichtigkeit eines Gases in einem Raum, welcher ein anderes Gas enthält, ist dieselbe, wie im leeren Raum, vorausgesetzt, daß beide Gase sich nicht chemisch verbinden.

c. Druck der Luft.

Der Druck eines Gases auf eine Fläche ist proportional der Größe derselben.

Der Druck der Luft ist gleich dem Gewicht einer Luftsäule von der Höhe der Atmosphäre, welche die Druckfläche zur Basis hat. Derselbe beträgt im Mittel auf 1 Quadratzoll 14,132 Pfund.

d. Barometer und barometrische Höhenmessung.

Der Luftdruck hält einer Wassersäule von 32 Fuß, einer Quecksilbersäule von (normal) $760^{m.m}$ oder 336 par. Linien das Gleichgewicht. (Veränderlichkeit, Schwankungen des Barometerstandes.) Erhebt man sich stufenweis in gleichen Absätzen von der Erdoberfläche, so sinkt gleichzeitig der Barometerstand in geometrischer Progression.

Sind B und b (in par. Linien) die gleichzeitig bei gleicher Lufttemperatur beobachteten Barometerstände an zwei Stationen von verschiedener Höhe, so ist der Höhenunterschied derselben in par. Fuß

$$h = 56488 \, (\log B - \log b) \qquad (26.)$$

e. Reduction der Gasvolumina.

Hat eine Gasmenge unter dem Barometerdruck b das Volumen vb so ist ihr Volumen bei normalem Barometerstande

$$Vn = \frac{b \, . \, vb}{760} \text{ oder } = \frac{b \, . \, vb}{336} \qquad (27.)$$

f. Aus dem Auftrieb der Luft erklärt sich das Steigen der Luftballons; aus einseitig überwiegendem Luftdruck die Erscheinungen des Hebers, des Heronsballes, der Pumpen, ꝛc.

§. 21. Bewegung der Gase.

a. Die theoretische Geschwindigkeit, mit welcher ein Gas von der Dichtigkeit d aus einem Reservoir unter dem Druck b in den leeren Raum ausströmt, ist

$$v = \sqrt{2g \, . \, \frac{b}{d}} \qquad (28.)$$

also für jeden Druck und jede Dichtigkeit, da beide stets in demselben Verhältniß sich ändern, constant. Da die Dichtigkeit der Luft in Beziehung auf Wasser = 0,0013 ist, so ist für Luft

$$v = \sqrt{2 \, . \, 31,25 \, . \, \frac{32}{0,0013}} = 1240'.$$

b. Die Ausflußmenge eines Gases aus einer Röhrenleitung ist der Länge der Röhre umgekehrt proportional.

c. Der Widerstand der Luft gegen einen in derselben bewegten Körper ist der Stoßfläche und dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional.

Ein Eisenbahnwaggon von 22½ Quadratfuß Fläche und 16′ Geschwindigkeit erfährt (nach Eisenlohr) einen Luftwiderstand von 17 — 18 Pfund.

§. 22. Gegenseitige Wirkungen fester, flüssiger und luftförmiger Körper.

a. Adhäsion. Feste Körper, welche mit ausgedehnter Fläche einander berühren, haften (adhäriren) mit großer Kraft an einander. Gleichermaßen adhäriren Flüssigkeiten an festen Körpern.

Ist die Adhäsion zwischen einem festen Körper und einer Flüssigkeit stärker, als die Cohäsion des festen Körpers, so löst derselbe in der Flüssigkeit sich auf.

Ist die Adhäsion stärker als die Cohäsion der Flüssigkeit, so benetzt die Flüssigkeit den festen Körper (Capillarität.)

Gase werden an der Oberfläche fester Körper verdichtet, von Flüssigkeiten absorbirt. Die absorbirten Gasmengen sind dem Druck, unter welchem sich das Gas befindet, proportional.

b. Diffusion.

Diffusion der Flüssigkeiten nennt man das gegenseitige Durchdringen mischbarer Flüssigkeiten, welches, auch der Schwere entgegen bei Berührung zweier Flüssigkeiten stattfindet.

Endosmose heißt die durch poröse Scheidewände hindurch stattfindende Diffusion der Flüssigkeiten.

Diffusion der Gase heißt deren Mischung, welche auch in der Schwere entgegengesetzter Richtung stattfindet, wenn zwei Gase in unmittelbarer Berührung oder durch poröse Scheidewände von einander getrennt sind.

Schulnachrichten.

I. Lehrverfassung.

Prima.

Ordinarius: Herr Oberlehrer Professor Dederich.

1. Religionslehre: a) kath. Die Lehre von Gott, dem Schöpfer, Erhalter und Regierer der Welt. Das Werk der Erlösung und Heiligung des Menschen. — Kirchengeschichte der neueren Zeit (Martin). 2 St. Hr. R.-L. Dr. Coppenrath.

b) evang. 1) Evangelische Glaubenslehre. Von der göttlichen Offenbarung. Von dem Codex der christlichen Offenbarung. Von Gott, seinem Wesen, Sein und Eigenschaften. Von der Schöpfung, Erhaltung und Regierung der Welt. Von den Engeln. — 2) Kirchengeschichte. Von der Stiftung der Kirche bis zur Trennung der griechischen und römischen Kirche. — 3) Lectüre. Das Evang. Mathäi. Repetirt wurden früher gelernte Kirchenlieder. 2 St. Hr. Pfarrer Uhlenbruck.

2. Deutsch. Litteraturgeschichte bis Opitz. Lektüre und Erklärung geeigneter Proben aus Deycks Auswahl, insbesondere der Nibelungenlieder und der Kudrun. Göthe's Iphigenie. Vorträge über Gelesenes. Logische und psychologische Erörterungen. Dispositionsübungen und Aufsätze. Themata: 1) Das erste Buch der Odyssee. 2) Pyrrhos und Hannibal. 3) Φίλον πρὸς ἄνδρα χρὴ λέγειν ἐλευθέρως. 4) Plato's Apologie. 5) Hoffnung, eine Treiberin und Trösterin. 6) Erst wäge, dann wage! (Klassenarbeit). 7) Der Siege göttlichster ist das Vergeben. 8) Metrische Uebung (Hor. Carm. II, 3). 9) Wer den Besten seiner Zeit genug gethan, der hat gelebt für alle Zeiten. 10) Das 13. Jahrhundert, eine Blütezeit deutscher Dichtung (Klassenarbeit). 3 St. Hr. G.-L. Dr. Schwenger.

3. Latein. Cicero Tusc. I. Sallust. Cat. Tacit. Ann. II. Privatlectüre Liv. III. V. Alle 4 Wochen ein Aufsatz. Wöchentlich ein Pensum und Extemporale. Uebungen im Lateinsprechen. Themata der Aufsätze: 1) Quo iure Maharbal dixerit: „non omnia eidem Dii dederunt. Vincere scis, Hannibal, victoria uti nescis." 2) In unius viri virtute saepe niti universae reipublicae salutem. 3) Exponantur Ciceronis de immortalitate animi argumenta (Tusc. I.). 4) Fatalem fuisse Romanis diem Alliensem, multo fataliorem Graecis diem Chaeronensem. 5) Asperis rebus gentes magis corroborari, quam rebus secundis, historia probatur. 6) De funesta Atheniensium in Sicilia clade. De belli Peloponnesiaci causis et initiis (Klassenarbeiten). 7) Uter dignior erat, qui Achillis arma acciperet, Ulixes an Aiax? 8) Non nobis solum nati sumus. 9) Scipio celeritate sua Carthaginem oppressit, Fabius cunctatione id egit, ne Roma opprimi posset. 10) Qui viri bello Peloponnesiaco vel ingenio vel rerum gestarum laude praeter ceteros floruerint (Klassenarbeit). 6 St. Der Ordinarius.

Horat. Carm. I, II. Einige Satiren und Episteln. Die Erklärung meist in lateinischer Sprache. Memoriren ausgewählter Oden. 2 St. Der Director.

4. Griechisch. Plato Apolog. Thuc. II. Privatim Xenoph. Anab. VII. Memor. Socr. zum Theil ins Lateinische übersetzt. Mündliche Uebersetzungen aus Franke III; alle 14 T. ein Pensum. Extemporalien. Wiederholungen aus Buttmann. — Hom. Il. XVI—XX. Privatim XXII und XXIII. Soph. Aias. 6 St. Der Director.

5. Französisch. Montesquieu Considérations. Cid par Corneille. Wiederholung der wichtigsten Kapitel der Grammatik (Knebel). Alle 14 T. ein Pensum. Uebersetzungen aus Probst. Klassenarbeiten. Memoriren schöner Stellen. 2 St. Der Director.

6. Hebräisch. Die unregelmäßigen Verba. Syntax. Lesung ausgewählter Stücke aus der hebräischen Prosa und Poesie (Gesenius). 2 St. Hr. R.-L. Dr. Coppenrath.

7. Geschichte und Geographie. Die mittlere Geschichte. Wiederholung des geographischen Thema's der Tertia (Pütz). 3 St. Der Ordinarius.

8. Mathematik. Wiederholungen. Trigonometrie. Stereometrie. Progressionen (Boyman). 4 St. Hr. O.-L. Dr. Caspar.

9. Physik. Von der Schwere. Vom Schall (Trappe). 2 St. Derselbe.

Secunda.

Ordinarius: Herr Gymnasiallehrer Dr. Havestadt.

1. Religionslehre: a) kath. Die Lehre von der vorchristlichen und der christlichen Offenbarung; von der Göttlichkeit derselben; Lehre von der Kirche. — Fortsetzung der Kirchengeschichte des ersten Zeitalters (Martin). 2 St. Hr. R.-L. Dr. Coppenrath.

b) evang. combinirt mit Prima.

2. Deutsch. Die Hauptgattungen der Prosa und Poesie (bes. die Epik) erläutert an Musterstücken in Deycks. Hermann und Dorothea von Göthe. — Deklamations- und Dispositionsübungen. — 12 Aufsätze. 2 St. Der Ordinarius.

3. Latein. Liv. XXI. Cic. pro lege Manilia, pro Archia poeta, in Cat. III. Epp. selectae. Wiederholungen aus der Grammatik, bes. die Casuslehre (Meiring). Wöchentliche Scripta, nach der Correctur zum lat. Vortrage benutzt. — Die Obersecundaner fertigten 6 lat. Aufsätze an. Uebungen im Lateinsprechen. Memoriren passender Stellen der Lectüre. 8 St. Der Ordinarius.

Virg. Aeneid. III, IV und VI, 1—506. Hr. O.-L. Hottenrott.

4. Griechisch. Xen. Anab. I, II. Herod. V. VII (mit Auswahl). Wiederholungen aus der Formenlehre; aus der Syntax speciell Buttmann §. 129—134, andere Partien der Syntax bei der Lectüre und beim mündlichen Uebersetzen aus Franke. Alle 14 Tage ein Scriptum. — Memoriren aller vorkommenden Vokabeln. 4 St. Der Ordinarius.

Hom. Od. XIII, XVI, XXI, XXII. Privatim Auswahl aus IX—XII. Memoriren besonders schöner Stellen. 2 St. Der Director.

5. Französisch. Paganel, Frédéric le Grand I. Grammatik nach Knebel §. 95—115. Wiederholungen aus andern Theilen der Syntax. Alle 14 Tage ein Scriptum. Klassenarbeiten. 2 St. Der Ordinarius.

6. Hebräisch. Die Grammatik bis zu den unregelmäßigen Verben. Uebersetzung leichterer Stücke aus den historischen Büchern des A. T. (Gesenius). Hr. R.-L. Dr. Coppenrath.

7. Geschichte und Geographie. Alte Geschichte mit Ausschluß der römischen. Geographie der betreffenden Länder (Pütz). 3 St. Hr. O.-L. Prof. Dederich.

8. Mathematik. Gleichungen zweiten Grades. Allgemeine Potenzenrechnung. Logarithmen. Aehnlichkeit der Figuren. Algebraische Geometrie (Boyman). 4 St. Hr. O.-L. Dr. Caspar.

9. Physik. Von der Cohäsion. Vom Licht in experimenteller Behandlung (Trappe). 1 St. Hr. O.-L. Dr. Caspar.

Tertia.

Ordinarius: Herr Gymnasiallehrer Dr. Ehlinger.

1. Religionslehre: a) kath. Die Lehre von den h. Sacramenten im Allgemeinen und im Besonderen; von den letzten Dingen des Menschen (Martin). 2 St. Hr. R.-L. Dr. Coppenrath.

b) evang. Geschichte des Reiches Gottes unter dem alten Bunde. Memoriren von Bibelsprüchen, Psalmen und Kirchenliedern. 2 St. Hr. Pfarrer Uhlenbruck.

2. Deutsch. Erklärung prosaischer Musterstücke, ausgewählter Balladen und Romanzen. Declamation und kleinere Vorträge (Pütz). Die periodischen Sätze wiederholt und das Wesentlichste aus der Metrik. Alle 3 Wochen ein Aufsatz. 2 St. Der Ordinarius.

3. Latein. Caes. b. g. IV, V, VI, 1—32. Ovid. Met. Ausgewähltes aus V, VIII, X. Die Modus- und Tempuslehre; Wiederholung und Erweiterung der Casuslehre (Meiring). Mündliche und schriftliche Uebersetzungen (Hottenrott IV.). Wochentlich eine häusliche Arbeit und alle 14 Tage eine Composition. 10 St. Der Ordinarius.

4. Griechisch. Die Verba auf μι, die unregelmäßigen Verba; die Präpositionen (Buttmann). Uebersetzung aus Jacobs und Hottenrott. Alle 14 Tage ein Pensum und eine Composition. Hom. Od. I, 1—180, wovon 1 bis 30 auswendig. 6 St. Der Ordinarius.

5. Französisch. Plötz Schulgrammatik Lection 1—36. Memoriren aller Vokabeln. Alle 14 Tage eine häusliche Arbeit, alle 6 Wochen eine Klassenarbeit. Memoriren einzelner Sätze besonders historischen Inhalts. 2 St. Hr. G.-L. Dr. Havestadt.

6. Geschichte und Geographie. Allgemeine deutsche Geschichte bis 1648. Brandenburg-Preußische Geschichte. Politische Geographie Europas, insbesondere Deutschlands und Preußens (Pütz). 3 St. Hr. O.-L. Prof. Dederich.

7. Mathematik. Gleichungen ersten Grades. Von den Vierecken und dem Kreise (Boyman). 3 St. Hr. O.-L. Dr. Caspar.

8. Naturgeschichte. Uebersicht der drei Naturreiche. Von den wichtigsten Elementarstoffen (Schilling). 2 St. Hr. O.-L. Dr. Caspar.

Quarta.

Ordinarius: Herr Oberlehrer Hottenrott.

1. Religionslehre: a) kath. Wiederholung der wichtigsten Abschnitte des Katechismus. Erklärung des Kirchenjahres. 2 St. Hr. Rel.-L. Dr. Coppenrath.

b) evang. combinirt mit Tertia.

2. Deutsch. Lectüre aus Bone. Der zusammengesetzte Satz und besonders die Perioden. Deklamation. Freie Nacherzählungen des Gelesenen. Alle 3 Wochen ein Aufsatz (Beschreibungen und Erzählungen). Im Sommer 2 Klassenarbeiten. 2 St. Hr. G.-L. Dr. Havestadt.

3. Latein. Corn. Nepos 1, 2, 3, 4, 5, 8, 15, 17, 23; Phädrus 20 ausgewählte Fabeln. Die Casuslehre, das Gerundium, Acc. c. Inf., die Fragesätze, die Participia, Abl. abs., Supina, Imperativ (Siberti-Meiring). Mündliches Uebersetzen aus Hottenrott III. Wöchentlich eine häusliche Arbeit; alle 14 Tage ein Klassenscriptum. Aristides und Cimon wurden memorirt. 10 St. Der Ordinarius.

4. Griechisch. Die regelmäßige Formenlehre bis zu den Verben auf μι (Buttmann). Übersetzen aus Jacobs I Curs. Übersetzen ins Griechische an der Tafel. Alle 14 Tage eine häusliche und eine Klassenarbeit. 6 St. Der Ordinarius.

5. Französisch. Repetition des regelmäßigen Zeitworts; Plötz Elementarbuch, Abschnitt V; Schulgrammatik Abschnitt I, II. Alle 14 Tage eine häusliche Arbeit, alle 6 Wochen eine Klassenarbeit. 2 St. Hr. G.-L. Dr. Schwenger.

6. Geschichte und Geographie. Übersicht der Geschichte und Geographie der Staaten des Alterthums. Berücksichtigung der Griechischen Sagen. Politische Geographie der außereuropäischen Länder (Pütz). 3 St. Hr. O.-L. Prof. Dederich.

7. Mathematik. Einleitung in die allgemeine Arithmetik. Decimalbrüche. Buchstabenrechnung. Wurzeln. Von den Linien, Winkeln, Dreiecken (Boyman). 3 St. Hr. O.-L. Dr. Caspar.

8. Zeichnen. Nach Vorlegeblättern und Wandtafeln. 2 St. Hr. L. Schäfer.

Quinta.

Ordinarius: Herr Gymnasiallehrer Dr. Schwenger.

1. Religionslehre: a) kath. Das vierte Hauptstück des Katechismus: von den Geboten Gottes und der Kirche, der Gnade und den Gnadenmitteln. — Die biblische Geschichte des N. T. (Schuster). Erklärung der kirchlichen Festtage. 3 St. Hr. R.-L. Dr. Coppenrath.

b) evang. Die Geschichte des alten Testaments nach Zahn's bibl. Historien. — Memoriren von Bibelsprüchen, Psalmen und Kirchenliedern. 2 St. Hr. Pfarrer Uhlenbruck.

2. Deutsch. Lesung und Erklärung prosaischer und poetischer Musterstücke aus Bone. Nacherzählen und Deklamiren. — Uebung in der Rechtschreibung durch wöchentliches Dictandoschreiben. Das Wichtigste vom zusammengesetzten Satze. Alle 14 Tage eine häusliche Arbeit. 2 St. Der Ordinarius.

3. Latein. Wiederholung der regelmäßigen und Einübung der unregelmäßigen Formen. Einiges aus der Syntax (Meiring). Mündliche und schriftliche Uebersetzungen nach Hottenrott II. Wöchentlich eine häusliche Arbeit, alle 14 Tage eine Klassenarbeit. 10 St. Der Ordinarius.

4. Französisch. Plötz Elementarbuch Abschnitt I, II, III. Einübung des regelmäßigen Zeitworts. Alle 14 Tage eine häusliche Arbeit, alle 4 Wochen eine Klassenarbeit. 3 St. Der Ordinarius.

5. Geographie. Wiederholung des Pensums der Sexta. Europa, speziell Deutschland mit besonderer Berücksichtigung Preußens. (Daniel.) 2 St. Hr. Cand. Schrammen.

6. Rechnen. Die Rechnung mit Brüchen. Zeitrechnung, Verhältniß- und Kettenregel, Procent- und Zinsrechnung, Gesellschaftsrechnung. Schriftliche Aufgaben. (Richter und Grönings II.) 3 St. Hr. G.-L. Dr. Ehlinger.

7. Naturgeschichte. Die Organe und Lebenserscheinungen der Pflanzen und Thiere (Schilling). 2 St. Hr. O.-L. Dr. Caspar.

8. Zeichnen. Nach Vorlegeblättern und Körpern. 2 St. Hr. L. Schäfer.
9. Schreiben. Nach Vorschriften an der Wandtafel. 3 St. Hr. L. Schäfer.

Sexta.

Ordinarius: Herr Candidat Schrammen.

1. Religionslehre: a) kath. Die drei ersten Hauptstücke des Katechismus: von Gott und seinen Eigenschaften, von der Erlösung und von der Kirche. — Geschichte des A. T. (Schuster). Erklärung der gewöhnlichen Gebete. 3 St. Hr. R.-L. Dr. Coppenrath.

b) evang. combinirt mit Quinta.

2. Deutsch. Lesung leichter prosaischer und poetischer Stücke aus Bone. Declamiren und Nacherzählen. Uebungen in der Orthographie und Interpunktion. Einfacher Satz. Wöchentlich ein Dictat; alle 14 Tage eine freie Arbeit; alle 4 Wochen eine Classenarbeit. 2 St. Der Ordinarius.

3. Latein. Die Formenlehre bis zum unregelmäßigen Zeitwort (Meiring). Mündliche und schriftliche Uebungen (Hottenrott I.). Wöchentlich eine häusliche Arbeit; alle 14 Tage eine Classenarbeit. 10 St. Der Ordinarius.

4. Geographie. Die nöthigsten Erläuterungen aus der mathematischen und physikalischen Erdbeschreibung. Die Oceane und die allgemeinen topischen Uebersichten der 5 Erdtheile (Daniel). 2 St. Der Ordinarius.

5. Rechnen. Die vier Species in unbenannten und benannten, ganzen und gebrochenen Zahlen. Dreisatz. Kopfrechnen. Schriftliche Aufgaben (Richter und Grönings II.). 4 St. Der Ordinarius.

6. Naturgeschichte. Beschreibung verschiedener Thiere und Pflanzen. Erklärung einzelner Naturerscheinungen. 2 St. Hr. O.-L. Dr. Caspar.

7. Zeichnen. Nach Vorlegeblättern und Wandtafeln. 2 St. Hr. L. Schäfer.

8. Schreiben. 3 St. Hr. L. Schäfer.

Vorbereitungs-Klasse.

Ordinarius: Herr Lehrer Schäfer.

1. Religion. Der kleine Katechismus von Deharbe ganz durchgenommen nebst dem Unterrichte für die erste Beichte. 3 St. Hr. Kaplan Ressing.

Biblische Geschichten für beide Confessionen nach Schuster resp. Zahn. Hr. L. Schäfer.

2. Deutsch. a) Für Abth. II. Die Wortarten, speziell Artikel, Substantiv, Adjectiv und Verbum. Declination, Biegung des Zeitworts nach den 3 Hauptzeitformen. Lesen in deutscher Schreib- und Druckschrift.

b) Für Abth. I. Lehre von den Wortarten weiter geführt und vervollständigt. Wortbildung. Declination und Conjugation durch fortgesetzte mündliche und schriftl. Uebungen vervollständigt und befestigt. Das Nothwendigste aus dem einfachen nackten Satze an den Lesestücken eingeübt. Uebungen im ausdrucksvollen, geläufigen Lesen in deutscher und lateinischer Schrift.

c) Für beide Abtheilungen. Erklärung der Lesestücke, Uebungen im Declamiren, sowie im mündl. und schriftl. Nacherzählen. Wöchentlich eine häusliche Arbeit, monatlich ein Klassen-Scriptum. Orthographische Regeln und Uebungen, insbesondere auch häufiges Dictandoschreiben in den Heften und an der Wandtafel (Büscher). Memoriren und Nacherzählen bibl. Geschichten des alten Testaments. 8 St. Der Ordinarius.

3. Rechnen. Für Abth. II. Mündliche und schriftliche Uebungen in den vier Species unbenannter Zahlen. Zahlenschreiben und Lesen.

Für Abth. I. Fortgesetzte mündl. und schriftl. Uebungen in den vier Species unbenannter und benannter Zahlen (Richter und Grönings II.). 5 St. Der Ordinarius.

4. Schreiben. Deutsche und lateinische Schrift; nach Vorschriften an der Wandtafel. Orthographisch Reinschreiben. 4 St. Der Ordinarius.

5. Naturgeschichte. Abth. I. combinirt mit VI. 2 St. Hr. O.-L. Dr. Caspar.

6. Geographie. Abth. I. combinirt mit VI. 2 St. Hr. Cand. Schrammen.

7. Singen, s. u. Gesang.

8. Turnen, s. u. Turnen.

Hodegetische Belehrungen.

Außer gelegentlichen Andeutungen gegen Ende des Sommersemesters Ansprachen des Directors an die Schüler der Prima über Gymnasialbildung und deren Beziehung zu den academischen Studien, sowie die bei der Wahl des Berufs leitenden Gesichtspunkte.

Declamatorien

wurden auch in diesem Jahre regelmäßig abgehalten. Mit Vorträgen über bestimmte Schriftsteller, aus denen poetische und prosaische Musterstücke ausgewählt wurden, wechselten eigene deutsche Arbeiten der Schüler und kurze geographische, geschichtliche und naturhistorische Skizzen.

Gesangunterricht.

1. Untere Abtheilung. Die Elemente. Uebungen im Treffen der Töne und zur Ausbildung der Stimme. Einstimmige und zweistimmige Lieder.

2. Obere Abtheilung. Vierstimmige gemischte und Männerchöre. 4 St. Hr. Prof. Dederich.

Turnen und Schwimmen.

Turnübungen wurden während des Winters mit 3 Abtheilungen, aus Vorturnern und Freiwilligen bestehend, während des Sommers mit 2 Abtheilungen in 3 resp. 4 Stunden angestellt unter der Leitung des G.-L. Dr. Ehlinger.

Die Badeanstalt war von einer größeren Zahl von Schwimmschülern besucht.

Zeichnen.

Für die Schüler der 3 oberen Klassen war Gelegenheit zum Zeichnen in 2 St. w. gegeben.

Uebersichtstabelle

über die Verwendung der Lehrkräfte und die Vertheilung des Unterrichts.

Lehrer.	Prima.	Secunda.	Tertia.	Quarta.	Quinta.	Sexta.	Vorb.-Klasse.	Zahl der Lectionen jedes Lehrers.
Dr. Stauder, Director.	Horaz 2 St. Griech. 6 „ Französ. 2 „	Homer 2 St.	—	—	—	—	—	12
Prof. Dederich, erster Oberlehrer, Ordin. der I.	Latein 6 „ Geschichte 3 „	Geschichte 3 „	Geschichte 3 St.	Geschichte 3 St.	—	—	—	18 1)
Hottenrott, zweiter Oberlehrer, Ordin. der IV.	—	Virgil 2 „	—	Latein 10 „ Griech. 6 „	—	—	—	18
Dr. Caspar, dritter Oberlehrer.	Mathem. 4 „ Physik 2 „	Mathem. 4 „ Physik 1 „	Mathem. 3 „ Naturgesch. 2 „	Mathem. 3 „	Naturgeschichte 2 St.	Naturgeschichte 2 St. mit	Vorb.-Kl. I.	23
Dr. Coppenrath, ordentlicher Religionslehrer.	Religion 2 „ Hebräisch 2 „	Religion 2 „ Hebräisch 2 „	Religion 2 „	Religion 2 „	Religion 3 St.	Religion 3 St.	—	18
Dr. Havestadt, erster ordentl. Lehrer, Ordin. der II.	—	Latein 8 „ Griech. 4 „ Deutsch 2 „ Französ. 2 „	Französ. 2 „	Deutsch 2 „	—	—	—	20
Dr. Ehlinger, zweiter ordentl. Lehrer, Ordin. der III.	—	—	Deutsch 2 „ Latein 10 „ Griech. 6 „	—	Rechnen 3 „	—	—	21 2)
Dr. Schwenger, dritter ordentl. Lehrer, Ordin. der V.	Deutsch 3 „	—	—	Französ. 2 „	Deutsch 2 „ Latein 10 „ Französ. 3 „	—	—	20
Schrammen, Candidat des höheren Schulamts, Ordin. der VI.	—	—	—	—	Geogr. 2 „	Deutsch 2 „ Latein 10 „ Rechnen 4 „ Geogr. 2 „	mit Vorb.-Kl. I.	20
Uhlenbruck, evang. Pfarrer.	Religion 2 Stunden.		Religion 2 Stunden.		Religion 2 Stunden.		—	6
Schäfer, Elementarlehrer, Ordin. der Vorb.-Kl.	—	—	—	Zeichnen 2 „ mit den 3 obern Klassen.	Zeichnen 2 „ Schreiben 3 „	Zeichnen 2 „ Schreiben 3 „	Deutsch 8 St. Rechnen 5 „ Schreiben 4 „	29
Nessing, Kaplan.	—	—	—	—	—	—	Religion 3 „	3
Esser, Probecandidat.	—	—	(Geschichte 3 „)	(Latein. 2 „) (Deutsch 2 „)	—	—	—	(7)
Schmitz, Probecandidat.	—	—	(Mathem. 3 „)	(Französ. 2 „)	—	(Naturgeschichte 2 „)	—	(7)

1) Derselbe ertheilte den Gesangunterricht in 4 St. wöchentlich.
2) Derselbe ertheilte den Turnunterricht im Winter in 3, im Sommer in 4 St. wöchentlich.

II. Verfügungen der Behörden von allgemeinem Interesse.

Durch Verf. vom 28. September v. J. Mittheilung eines Erlasses Sr. Excellenz des Herrn Ministers der geistlichen, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten, wornach die zu Offizieren ernannten Lehrer in Zukunft gar nicht mehr in die Unabkömmlichkeits-Verzeichnisse aufzunehmen sind. Ueberhaupt aber ist bei Aufstellung der Verzeichnisse nicht zu ausschließlich das Interesse der Schule, sondern immer auch das der anderen Seite des öffentlichen Dienstes in Betracht zu ziehen.

Unter dem 28. Dezember v. J. eröffnet das Königliche Provinzial-Schul-Collegium dem Verwaltungsrath, daß Se. Excellenz der Herr Minister geruht haben, dem hiesigen Gymnasium vom 1. Januar 1867 ab einen jährlichen Zuschuß von 500 Thalern aus Staatsmitteln Behufs Aufbesserung der Lehrergehälter zu bewilligen. Für diese Zuwendung fühlt der Berichterstatter sich gedrungen, den hohen Behörden auch an dieser Stelle im Namen der Anstalt seinen ehrfurchtsvollen Dank auszusprechen.

III. Chronik.

Das Schuljahr wurde eröffnet am 4. Oktober v. J.

Am 15. September v. J. starb der Quartaner Alfons Romen aus Emmerich. Die Anstalt verlor an ihm einen braven, fleißigen Schüler, der zu schönen Hoffnungen berechtigte.

Mit Beginn des Semesters wurde in der neuen Turnhalle zum erstenmal für Vorturner und Freiwillige, so weit der Raum es gestattete, ein Wintercursus in 3 Abth. eröffnet.

Am 21. März wurde der Geburtstag Sr. Majestät des Königs durch eine öffentliche Schulfeier, wobei der Director die Festrede hielt, sowie durch ein Hochamt mit Te Deum in herkömmlicher Weise feierlich begangen.

Am 22. Mai führte der Religionslehrer Herr Dr. Coppenrath 21 Schüler zur ersten h. Communion.

Durch Verff. vom 8. und 22. Mai wurde den Schulamts-Candidaten Wilhelm Esser und Jakob Schmitz gestattet, ihr Probejahr an der hiesigen Anstalt abzuhalten.

Die Arbeiten an dem zu errichtenden Convicte sind so weit gediehen, daß die auf 60 Schüler berechnete Anstalt bis Ostern k. J. voraussichtlich eröffnet werden kann.

IV. Statistische Nachrichten.

Am Gymnasium fungirten in diesem Jahre incl. des Directors 8 ordentliche Lehrer, 1 wissenschaftlicher Hülfslehrer, 1 evangelischer Ortsgeistlicher und 2 Probecandidaten; an der Vorbereitungs-Klasse 1 Elementarlehrer und 1 katholischer Ortsgeistlicher.

Anzahl der Schüler im Anfange des Schuljahres

a.	in dem Gymnasium	183
b.	in der Vorbereitungs-Klasse	25
	Zusammen	208

Nach den einzelnen Klassen befanden sich:

In	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	Vorb.-Kl.
	25	36	20	27	31	44	25

Darunter waren neu Aufgenommene im Gymnasium 46, in der Vorbereitungs-Klasse 9; im Ganzen 170 Katholiken, 34 Evangelische, 1 Mennonit, 3 Israeliten; 155 aus dem Schulort, 53 Ortsfremde, darunter 2 Ausländer. Aufgenommen wurden während des Schuljahrs im Gymnasium 6, in der Vorbereitungs-Klasse 10, mithin war die Anstalt im Ganzen besucht von 189 + 35 = **224** Schülern. Ausgeschieden sind bis jetzt aus dem Gymnasium 21, aus der Vorbereitungs-Klasse 2, also sind noch vorhanden 168 + 33 = 201. Nach den einzelnen Klassen:

In	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	Vorb.-Kl.
	24	33	17	26	28	40	33

Aus den katholischen Stipendienfonds erhielten im November 33 Schüler je 15, 15 je 10, 31 je 8 Thaler, 1 die Hälfte des Waier'schen Beneficiums mit 13 Thlr. 2 Sgr. 5 Pf.; im Mai 26 je 15, 12 je 10, 18 je 9, 29 je 8 Thaler. Außerdem wurden die 2. Hälfte des Waierschen Stipendiums und die Beträge der Präfecturstiftung mit 33 Thlrn. 2 Sgr. 7 Pf. vertheilt. Die Gesammtsumme der im Laufe des Schuljahrs vergebenen Beneficien beträgt demnach 1866 Thlr. 7 Sgr. 5 Pf.

Die Verleihung der Stipendien findet alljährlich an den beiden bezeichneten Terminen statt. Die betr. Schüler haben sich bei dem Director vor Ablauf des Semesters zu melden, auswärtige eine Bescheinigung des Ortsvorstands über die Vermögensverhältnisse der Eltern beizubringen, worin nothwendig die Angabe der Klassensteuer enthalten sein muß. Die Vertheilung gilt jedesmal für das abgelaufene halbe Jahr; neu aufgenommene Schüler können also erst nach einem Semester auf Grund eines befriedigenden Zeugnisses ein Beneficium erhalten, Abiturienten noch im Oktober darum nachsuchen.

Zur diesjährigen Abiturienten-Prüfung wurden 9 Oberprimaner zugelassen. Nachdem die schriftlichen Arbeiten vom 27. Juni bis 4 Juli angefertigt waren, fand die mündliche Prüfung unter Vorsitz des Geheimen Regierungs- und Provinzial-Schul-Raths Herrn Dr. Lucas am 27. und 28. Juli statt. Alle Abiturienten wurden für reif erklärt, nämlich:

Küppers, Marcus	aus Rees,	19	Jahre alt,	kath.,	Medizin, Bonn,
Müller, Gerhard	„ Emmerich,	18	„ „	evang.,	Forstfach, unbestimmt,
Müller, Joseph	„ Uerdingen,	18	„ „	kath.,	Theologie, Bonn,
van Münster, Alfons	„ Emmerich,	20	„ „	„	Medizin, Bonn,
Püttmann, Albrecht	„ „	19	„ „	„	Postfach, —
Reurtmans, Johann	„ Crefeld,	19	„ „	„	Medizin, Bonn,
Rütten, Johann	„ Orsbeck,	18	„ „	„	Zollfach, —
Schyelting, Heinrich	„ Emmerich,	20	„ „	„	Medizin, Berlin,
Wilson, Karl	„ „	19	„ „	evang.,	Jura, Bonn.

Den Abiturienten Gerhard Müller und Joseph Müller wurde die mündliche Prüfung auf Grund ihrer früheren Leistungen und der schriftlichen Arbeiten erlassen.

Abiturienten-Arbeiten.

Die Aufgaben waren:

1. Religion. a) kathol. α) Man begründe und erkläre die kirchliche Lehre von der Erbsünde. β) Welche Eigenschaften kann das vorhergehende Gewissen haben?

b) evang. Die hohe Bedeutung der Auferstehung Jesu.

2. Deutsch. Des Lebens Mühe lehrt uns allein des Lebens Güter schätzen.

3. Latein. a) Aufsatz. Quae virtutes bonum civem maxime deceant. b) Scriptum. Eine Stelle aus Süpfles Aufgaben zum Uebersetzen.

4. Griechisches Scriptum. Ein Dictat nach Xenoph. Mem. III, 2.

5. Französisches Scriptum. Eine Stelle aus Michelet Histoire Romaine.

6. Hebräisch. Man übersetze und analysire aus I. Mos. c. 2 v. 6—9 excl.

7. Mathematik. a) Um einen gegebenen Kreis einen Rhombus zu construiren, dessen Seiten eine gegebene Länge haben. b) Ein Quadratfuß Eisenblech wiegt 5 Loth. Wie groß muß eine daraus angefertigte Kugel mindestens gemacht werden, damit dieselbe im Wasser schwimmen kann? c) $x + y + z = 19$; $x \cdot y \cdot z = 216$; $x : y = y : z$. d) Welche Höhe hat ein Thurm, dessen Spitze in den Endpunkten einer nach demselben hingerichteten horizontalen Standlinie von 367′ Länge unter den Elevationswinkeln von 40° 26′ 18″ und 28° 7′ 11″ erscheint?

Ferien und freie Tage.

Weichnachtsferien vom 22. Dezember bis 3 Januar.
Tag der Wahl zum Hause der Abgeordneten.
Am 21. März Vorfeier zu dem Geburtsfest Sr. Majestät des Königs.
Osterferien vom 9.—27. April.
Pfingstferien vom 30. Mai bis 4. Juni.
Kirmesferien 6. und 7. Juli.

Bibliothek.

Die Bibliothek wurde aus den etatsmäßig bestimmten Mitteln der Anstalt entsprechend vermehrt. An Geschenken erhielt dieselbe: a) von dem Königlichen Provinzial-Schul-Collegium Gerhard's Archäologische Zeitschrift Jahrg. 1867. Firmenich-Richartz Germaniens Volkerstimmen. Nachträge 1867. b) von Privaten: 1) der Schöningh'schen Buchhandlung in Paderborn Düntzer Homer's Ilias, 1. Heft. 2) der Weidmann'schen Buchhandlung in Berlin Klöden, Lehrbuch der Geographie, 4. Auflage.

Für die Schüler-Bibliothek wurden angeschafft:

Ruß, In der freien Natur. Ruß, Meine Freunde, Lebensbilder aus der Thierwelt. Engelmann, Mittelhochdeutsches Lesebuch. Schauenburg und Hoche, Deutsches Lesebuch I. Lindemann, Bibliothek deutscher Klassiker für Schule und Haus in 2 Exemplaren. Liefr. 1—4. Fr. Vornbaum, die brandenburgisch-preußische Geschichte. Holland, deutsche Characterbilder. Stacke, Bertrand du Gueslin. Reiser, Deutschland's Schmach und Ehre. Wiseman, Shakespeare. Von Andlaw, Sieben heilige Könige. Gompertz, Demosthenes als Staatsmann und Redner. Osterwald, Sophokleserzahlungen. Niemeyer, Jugendleben Klopstock's, Lessing's, Wieland's und Herder's. Würdig, der alte Dessauer.

Physikalisches Kabinet und naturhistorische Sammlungen.

Für das physikalische Kabinet wurden neu angeschafft: Ein Apparat zu Glühversuchen. Ein electromagnetischer Treibapparat. Vier Geißler'sche Röhren. Ein arbeitsfähiges Modell einer Hochdruck-Dampfmaschine. Ein Centrifugal Apparat. Ein Apparat zur Diffusion der Gase. Eine Vorrichtung zur Erläuterung des Schwimmens der Körper. Die im Besitz des Gymnasiums befindliche Luftpumpe wurde gründlich reparirt.

Die naturhistorischen Sammlungen wurden durch Geschenke um folgende Gegenstände vermehrt: Eine Partie Mineralien von Herrn Dr. Schwenger. Desgleichen von dem Secundaner ten Brink, den Tertianern Berendt, Koch, Wolters, dem Quartaner Wurtz, den Sextanern Lanz, Thiele, Zinkeisen. Ein Sepiaschulp von dem Quintaner Lanz. Das Kopfskelet eines Hechtes von dem Secundaner Hoogen. Eine Sammlung Eier von dem Quintaner Schmitz. Zwei Reisvögel von dem Primaner Küppers und dem Secundaner Büsgen. Zwei Pirols von dem Tertianer v. Zütphen und dem Quintaner Gerritzen. Eine Schnepfe von dem Quintaner Heering. Eine Fledermaus von dem Sextaner Leenders.

V. Schluß des Schuljahrs.

Oeffentliche Prüfungen in der Aula (Gerichtsgebäude).

Montag den 31. August, Morgens von 9—12 Uhr:

Sexta:	Religionslehre.	Hr. Rel.-L. Dr. Coppenrath.
	Latein.	Hr. Cand. Schrammen.
Quinta:	Latein.	Hr. G.-L. Dr. Schwenger.
	Geographie.	Hr. Cand. Schrammen.
Quarta:	Griechisch.	Hr. O.-L. Hottenrott.
	Mathematik.	Hr. O.-L. Dr. Caspar.

Nachmittags 3—4 Uhr:

Vorbereitungs-Klasse:	Deutsch.	Hr. L. Schäfer.
	Rechnen.	Hr. L. Schäfer.

4 Uhr Schauturnen auf dem Hofe des Gymnasiums.

Dinstag den 1. September.

Morgens 7½ Uhr: feierlicher Schlußgottesdienst mit Te Deum.

Hierauf 9—12 Uhr:

Tertia:	Latein.	Hr. G.-L. Dr. Ehlinger.
	Brandenburg.-preuß. Geschichte.	Hr. Cand. Esser.
Secunda:	Griechisch.	Hr. G.-L. Dr. Havestadt.
	Mathematik.	Hr. O.-L. Dr. Caspar.
Prima:	Latein.	Hr. O.-L. Prof. Dederich.
	Deutsch.	Hr. G.-L. Dr. Schwenger.

Nachmittags 3 Uhr:

Schlußfeier in der Aula (Gerichtsgebäude).

Gesang. Declamation:

Der Schüler der Vorb.-Kl. Hermann Romen: Am Rhein, von Bone.
" Sextaner Philipp Lanz: Das Vaterland, von Vogl.
" Quintaner Jakob ter Smitten: Der Alpenjäger, von Friedr. v. Schiller.
" Quartaner Max Gräfe: Hectors Abschied, von Schiller.
" Tertianer Wilhelm Neugebauer: Pipin der Kurze, von Streckfuß.
" Secundaner Karl Büsgen: Monolog der Iphigenie Act. 1, Sc. 1, von Göthe.

Die Primaner Albrecht Püttmann und Alphons van Münster: Aus Göthe's Iphigenie Aufzug II, 1.

Gesang.

Deutsche Rede des Unterprimaners Eduard Marcour über das Thema:

Hoffnung und Mäßigung, euch verehr' ich auf einem Altar.
Jene nur wecket die Kraft, diese nur sichert den Sieg.

Lateinische Rede des Abiturienten Johann Rütten: De patriae amore.

Gesang.

Entlassung der Abiturienten durch den Director.

Gesang.

Hierauf werden die Censuren vertheilt und der Ascensus bekannt gemacht.

Die Schüler der 3 unteren Klassen, welche an den Ferienbeschäftigungen Theil nehmen sollen, haben sich in den ersten Tagen der Ferien bei Herrn Gymnasiallehrer Dr. Ehlinger zu melden. Für die Schüler der Vorbereitungs-Klasse wird Herr Lehrer Schäfer nach freier Uebereinkunft mit den Eltern eine solche veranstalten.

Der regelmäßige Unterricht beginnt Freitag den 9. Oktober, nachdem zur Eröffnung desselben ein Hochamt abgehalten worden. Die Prüfungen für die neu Aufzunehmenden und nachträglich zu Versetzenden finden am 7. und 8. von Morgens 8 Uhr ab statt. Am vorhergehenden Tage Dinstag den 6. Oktober ist der Director des Morgens von 9 — 12 und des Nachmittags von 2 Uhr ab in seiner Wohnung bereit, Anmeldungen für Gymnasium und Vorbereitungs-Klasse entgegenzunehmen. Dieselben müssen durch die Eltern oder deren Stellvertreter schriftlich oder mündlich unter Vorlegung eines genügenden Unterrichts-Zeugnisses erfolgen. Auswärtige sind nach Rücksprache mit dem Director so unterzubringen, daß sie gehörig beaufsichtigt sind. Wirthshäuser können nicht als geeignet befunden werden.

Das normale Alter für den Eintritt in die Vorbereitungs-Klasse ist das 7te resp. 8te, für VI. das 9te Lebensjahr, und ist dringend zu wünschen, daß derselbe auf beiden Stufen rechtzeitig und zwar im Herbst erfolge.

In Betreff des um Ostern zu eröffnenden Convicts bemerke ich vorläufig, daß dasselbe gegen einen mäßigen Pensionsfatz für alle katholischen Schüler des hiesigen Gymnasiums ohne Rücksicht auf ihre künftige Bestimmung zugänglich ist. Das Nähere wird seiner Zeit durch öffentliche Blätter bekannt gemacht werden.

Dr. **Stauder,**
Gymnasial-Director.

Die

Prinzipien der Mechanik

bei

Boltzmann und Hertz

von

Johannes Classen.

Aus dem

Jahrbuch der Hamburgischen Wissenschaftlichen Anstalten. XV.

Hamburg 1898.

Commissions-Verlag von Lucas Gräfe & Sillem.

Alexander Ziwet

Die Prinzipien der Mechanik bei Boltzmann und Hertz

von

Johannes Classen.

Aus dem
Jahrbuch der Hamburgischen Wissenschaftlichen Anstalten. XV.

Hamburg 1898.
Commissions-Verlag von Lucas Gräfe & Sillem.

Noch bis vor nicht langer Zeit hat wohl zweifellos den Physikern stets das Ziel vorgeschwebt, für die Erscheinungen in der unbelebten Natur die richtige Erklärung zu finden durch Zurückführen derselben auf wenige allgemeine Naturgesetze vermittelst mathematisch-mechanischer Darstellungsweise. Erst bei Kirchhoff tritt zum ersten Mal der Gedanke auf, dass die analytische Mechanik und damit auch die Physik niemals etwas anderes zu leisten habe, als eine möglichst einfache und genaue Beschreibung der Vorgänge zu schaffen. Von dem Wahne des Erkennens soll sich die Wissenschaft bescheiden zur schlichten, naturgetreuen Beschreibung. Um diesen Umschwung richtig zu würdigen, müssen zunächst einige Worterklärungen festgelegt werden.

Wenn wir glauben, das Aufeinanderfolgen zweier Vorgänge verstanden zu haben, so drücken wir das dadurch aus, dass wir sagen, der eine ist die Ursache des anderen. Das ist offenbar nur eine Namengebung, durch welche unsere Gewissheit in der Kenntniss des Aufeinanderfolgens um nichts gefördert wird; wir bringen durch die Anwendung des Causalitätsbegriffes nur unsern Glauben zum Ausdruck, dass das von uns in der Erfahrung beobachtete Aufeinanderfolgen auf einem uns unbekannten in der Natur selbst liegenden Grunde beruhe. Wenn aber auch unsere Erkenntniss selbst nicht gewonnen hat, so ist doch unsere Stellungnahme zu dem Vorgange durch Anwendung des Wortes „Ursache“ eine andere geworden, wir sprechen damit aus, dass wir, für den Augenblick wenigstens, in der Annahme des Zusammenhanges als einer Naturnothwendigkeit eine befriedigende Erklärung erblicken wollen. Es ist daher ganz dasselbe, ob man sagt: „eine Erscheinung erklären, heisst sie auf ihre Ursachen zurückführen“ oder „einen Vorgang als Ursache eines andern ansehen, heisst mit der Annahme einer Naturnothwendigkeit für das Aufeinanderfolgen sich begnügen.“

Sollte demnach die Physik wirklich die Aufgabe haben, für die Vorgänge in der Natur eine Erklärung zu geben, so müsste sich einsehen lassen, warum wir mit der Einführung gewisser Gesetze als Naturnothwendigkeiten uns begnügen müssen. Dem entsprechend hat man auch thatsächlich zu allen Zeiten versucht, das eine oder andere Gesetz als ein derartiges Grundgesetz aufzustellen, und hat dann in dem Entwickeln der Vorgänge aus diesem Gesetz heraus die Erklärung gefunden; nur an einer ausreichenden Begründung, warum man gerade mit diesem Grundgesetz sich zufrieden geben kann, hat es noch stets gefehlt.

Wir haben nun eine, aber auch nur eine Möglichkeit, darzustellen, dass irgend Eins mit Nothwendigkeit irgend ein Anderes zur Folge hat, das ist die zwingende Kraft, mit der in der mathematischen Ableitung aus dem Vordersatz der Nachsatz sich ergiebt; alle sonstigen Herleitungen von Gesetzen in allen andern Wissenschaften sind nur Anwendungen der Begriffe „Ursache“ und „Wirkung“ in dem oben angegebenen Sinne. Solange daher die Physik als ihr Ziel ansieht, für die Erscheinungen wirkliche Erklärungen zu geben, muss sie sich jedenfalls beschränken auf solche Vorgänge, die sich mathematisch darstellen lassen, oder in Hertz'scher Sprache ausgedrückt: da das Grundgesetz denknothwendige Folgen zu ziehen gestatten muss, muss es mathematisch formulirt sein. Daher muss auch die Physik mit Grunddefinitionen beginnen, wie jeder Zweig der Mathematik, und kann dabei natürlich den ganzen Schatz der mathematischen Wissenschaft für sich als gegeben ansehen. Die Mathematik kann nun Reihen von Punkten, Schaaren von Linien und Flächen nach jeder gewünschten Gesetzmässigkeit zur Darstellung und Untersuchung bringen; sie kann durch kontinuirliche Aenderung eines Parameters ein Raumgebilde eine Reihe von Lagen durchlaufen lassen. Indem nun die Mechanik festlegt, dass die Werthe eines solchen in der Mathematik willkürlichen Parameters bei ihr übereinstimmen sollen mit den nach unsern erfahrungsmässig festgelegten Zeitmaassen gemessenen Zeitabschnitten, die von einem willkürlich zu wählenden Augenblick an verflossen sind, spricht sie aus, dass sie eine Bewegung beschreiben will, die zwar nur von uns erdacht ist, die aber vorgestellt werden soll, als eine in Wirklichkeit ablaufende Bewegung. Alle so dargestellten Bewegungen sind aber immer nur Bewegungen mathematischer Gebilde. Um auch noch zum Ausdruck zu bringen, dass Bewegungen behandelt werden sollen von Körpern, wie sie in der Natur vorkommen, bedarf die Mechanik noch der Einführung eines zweiten Begriffes. Dies geschieht dadurch, dass jedem Raumelement ein bestimmter Inhalt, und damit seiner Bewegung ein gewisser Werth beigelegt wird. Mag man nun die genaue Definition des Massenbegriffes nach der Art von Hertz wählen oder nach Mach (Boltzmann), jedenfalls ist die Einführung eines derartigen Begriffes als eines Werthfaktors in den Gleichungen für die Mechanik unbedingt erforderlich, um den Schritt von rein mathematischen Raumgebilden zu Körpern zur Darstellung zu bringen. Durch die Einführung der beiden Begriffe, des Zeitmaasses und der Masse schreibt die Mechanik vor, dass die von ihr beschriebenen Vorgänge angesehen werden sollen, als wenn es wirkliche Bewegungen in der Natur vorhandener Körper wären; aber etwas anderes, als eine rein mathematische Beschreibung gedachter Vorgänge kann die Mechanik offenbar mit diesen Mitteln allein niemals liefern. Freilich hat eine gewisse Art der Namengebung, die sich in der Mechanik als bequem darbietet, schon oftmals den Schein erweckt, als wenn ihren

Sätzen ein anderer, tieferer Werth zukommen könne; allein es liegt in der Einführung des Wortes Kraft für das Produkt aus Masse und Beschleunigung offenbar nur derselbe Fall vor, wie bei der Anwendung der Worte Ursache und Wirkung. Es liegt von vornherein in der Methode der Mechanik die Dinge so darzustellen, als wenn sie wirklich wären. Wenn nun bei einer Bewegung z. B. der Planetenbewegung, die Beobachtung zeigt, dass sie übereinstimmt mit der Beschreibung derselben nach Newtons Gravitationsgesetz, so können wir schliessen, dass nach aller uns bekannten Erfahrung eine Beschleunigung der Planeten gegen die Sonne, wie das mathematische Gesetz sie ausspricht, wirklich besteht; sowie wir aber hierin eine in der Natur selbst begründete Kraft erblicken, so kann das nur heissen, wir sind mit der Erklärung der Planetenbewegung durch die Zurückführung auf diese Kraft zufrieden. Da wir aber niemals den Nachweis bringen können, dass wir hiermit zufrieden sein müssen und uns auch die Erfahrung nicht sagen kann, dass das Gravitationsgesetz auch für alle zukünftig beobachteten Fälle sich immer wieder bestätigen wird, so bleibt die Darstellung der Mechanik mit den genannten Mitteln in diesem Falle, wie in jedem andern, vom strengen Standpunkt der Wissenschaft aus, immer nur eine Beschreibung. Nach den Arbeiten von Kirchhoff und Mach, besonders auch nach dem neuesten Werke von Boltzmann dürften denn auch die Zweifel überall beseitigt sein, dass die Newton'schen Prinzipien der Mechanik als Definitionen in geeigneter Weise vorangestellt werden können, aus denen der ganze weitere Aufbau sich dann ergiebt, nach denselben rein logischen Entwicklungen, wie sich jeder mathematische Wissenschaftszweig aus den vorauszuschickenden Grundbegriffen aufbaut.

Freilich hat man schon seit der eigentlichen Begründung der analytischen Mechanik durch Lagrange immer wieder versucht, für dieselbe den Anspruch auf einen tieferen Werth, als den einer blossen Beschreibung zu erheben. Man hat auch stets das richtige Gefühl gezeigt für das, wodurch allein ein solch tieferer Werth der Mechanik gegeben werden könnte. Wenn ein Geist im Stande wäre, die Lagen und die Geschwindigkeiten aller Massen im Raume zugleich zu erfassen und er kennte dann die Weltformel, nach der die Natur wirklich die einzelnen Massen ihre Bewegungen gegenseitig bestimmen lässt, dann könnte er den ganzen Verlauf der Erscheinungen im Voraus berechnen.

Wenn wir neben unsern Definitionen noch ein Grundgesetz hätten, nach dem die Natur wirklich verfährt, ja, dann könnten wir allerdings in einer solchen mechanischen Darstellung eine Erklärung erblicken, die uns das Schaffen der Natur wiedergiebt. Aber welches ist dies Gesetz? Ist es das d'Alembert'sche Prinzip, das Prinzip der kleinsten Wirkung oder des kleinsten Zwanges, die Unmöglichkeit des Perpetuum mobile, oder das Energiegesetz? Woher sollen wir einen Beweis für irgend eins dieser Gesetze

nehmen, der sich nicht auf unsern Grunddefinitionen und einigen willkürlichen Definitionen aufbaut? Philosophisch ist ein solcher Beweis nie zu erbringen, denn auf diesem Wege können wir vielleicht die Anwendbarkeit gewisser Begriffe in der Erfahrung wahrscheinlich machen, aber warum wir gerade diese Begriffe in diese besondere mathematische Form einzukleiden haben, wie obige Gesetze sie verlangen, geht über die Möglichkeit einer metaphysischen Beweisführung weit hinaus und dadurch eben wird jeder Versuch von Seiten der Philosophie zu einem Beweise zu gelangen, von vornherein aussichtslos. Und in der mathematischen Methode haben wir überhaupt nicht die Fähigkeit zu irgend einem Beweise, der sich nicht aus den Anfangsdefinitionen herausleitet. In richtiger Consequenz dieser Thatsachen hat denn auch Boltzmann in seiner neuen Darstellung der Prinzipien der Mechanik kein Grundgesetz an die Spitze gestellt, sondern nur sieben Grundannahmen, welche die Definitionen sind, für alle die Begriffe, mit denen im Folgenden gearbeitet werden soll. Nur eine von diesen Definitionen dürfte anfechtbar sein, nämlich die, in welcher festgelegt wird, dass ein Massentheilchen eine Beschleunigung erhalten kann, deren Grösse eine Funktion der Entfernung von einem andern Massentheilchen ist und deren Richtung in der Richtung der Verbindungslinie beider liegt. Es lässt sich nicht leugnen, dass an Stelle dieser wohl auch eine andere stehen könnte, dass hier mithin nach einer gewissen Willkür verfahren ist. Boltzmann erklärt aber auch ganz offen, dass er von allen denkbaren Fällen eben nur die betrachten will, die sich mit dieser Annahme vertragen, und die Erfahrung scheint ihm auch insofern Recht zu geben, als sich bisher wenigstens wohl noch kein Fall nachweisen liesse, der sich dieser Betrachtungsweise unbedingt widersetzte. In der Willkür dieser Annahme liegt aber auch zugleich das ehrlichste Bekenntniss, wie es auch offen ausgesprochen ist, dass es sich nur um eine Beschreibung selbst ausgewählter Fälle handeln kann.

Wenn auch diese Boltzman'sche Arbeit erst ganz neuerdings erschienen ist, so waren alle diese Betrachtungen zu der Zeit, als Hertz seine Prinzipien der Mechanik entwarf, der Sache nach schon lange bekannt und auch anerkannt, und doch hat Hertz seiner Mechanik wieder ein allgemeines Grundgesetz an die Spitze gestellt, aus dem der gesammte Inhalt der physikalischen Erfahrung sich herleiten lassen soll. Wie ist das möglich? Wie ist der Beweis oder auch nur das Wahrscheinlichmachen eines solchen Gesetzes möglich. In welchem Verhältniss kann dieses Gesetz zu einem eventuell vorhandenen allgemeinen Naturgesetz stehen? Das sind Fragen, die Jedem sich aufdrängen müssen, der mit Verehrung zur Hertz'schen Meisterschaft im physikalischen Forschen aufblickt.

Schlagen wir die Seiten in Hertz's Mechanik auf, wo das Grundgesetz mathematisch formulirt wird, so sehen wir, dass sein Grundgesetz ganz

direkt die Lagrange'schen allgemeinen Bewegungsgleichungen sind. Es ist nicht eine glückliche Combination des Newtons Trägheitsgesetzes mit Gauss' Prinzip des kleinsten Zwanges, es ist kein Minimumgesetz, kein Integralgesetz, sondern es ist eben jene eigenthümliche Differentialgleichung, von der wir durch Maxwell und Helmholtz wissen, dass sie in den verschiedensten Theilen der Physik zugleich ihre Anwendung findet, sobald es nur gelingt, den Coordinaten in derselben die geeignete Deutung zu geben. Schlagen wir dann zurück und sehen, wie es Hertz möglich geworden, sein Prinzip in dieser charakteristischen Form auszusprechen, so sehen wir, dass hier eine Entdeckung eigener Art vorliegt. Anders kann man es kaum nennen, wenn Hertz uns zeigt, dass die mathematische Combination, die in der Lagrange'schen Gleichung vorliegt, und deren Werth wir für die Physik schon kennen, auch in der reinen Mathematik schon eine besondere Bedeutung hat. Nachdem Hertz in dem ersten Theil seiner Mechanik die mathematische Darstellung von Bewegungsmöglichkeiten von vornherein bis zur grössten Mannigfaltigkeit getrieben hat, entnimmt er der Geometrie des Raumes die Begriffe der kürzesten, geodätischen und geradsten Bahnen und dadurch schon wird der Grundtypus für das spätere Grundgesetz gewonnen.

Noch beliebig viele andere Bahnen liessen sich konstruiren, aber das Grundgesetz stellt die Behauptung auf, dass von allen mathematisch möglichen, die mathematisch einfachsten, nämlich die geradesten Bahnen in der Natur vorkommen. Gerade wie Boltzmann bei seiner oben genannten Grundannahme, so erklärt auch Hertz, dass in seiner Mechanik eben nur solche Fälle behandelt werden sollen, die seinem Grundgesetze folgen, und gerade so, wie Boltzmann kommt auch er zu dem Schluss, dass aus der Erfahrung bisher kein Grund zu entnehmen ist, dass diese Mechanik nicht ausreichen sollte. Aber doch ist der Standpunkt ein anderer. Boltzmann's Hypothese ruht auf einer physikalischen Vorstellung von einem Theilchen, das ein anderes in Bewegung setzt, in der reinen Mathematik kommt derartiges nicht vor, aus der Erfahrung direkt ein Urtheil über die Wahrscheinlichkeit dieser Hypothese zu gewinnen, ist undenkbar, da die kleinsten Theile, auf die es sich bezieht, immer unzugänglich sind. Daher ist jede andere Hypothese, die nur schliesslich auch auf das Prinzip des kleinsten Zwanges führt, gleichberechtigt; und dass derartige Hypothesen möglich sind, dürfte einem Mathematiker nicht zweifelhaft sein. Die Boltzmann'sche Hypothese, wenn auch gegenwärtig wohl die einfachste, bleibt doch eine Willkürlichkeit. Anders bei Hertz. Denkbar ist, dass man andere, als die geradesten Bahnen als die natürlichen anzusehen versucht, aber mathematisch unmöglich ist, dass auch andere Bahnen durch die Lagrange'sche Form dargestellt werden, denn der Begriff der geradesten Bahn ist der Raumgeometrie entnommen und gerade der und kein anderer stellt sich in dieser

charakteristischen Form dar. Wir können mathematisch ja auch die Gesetze von Räumen mit mehr als drei Mannigfaltigkeiten entwickeln, aber der Raum, indem die Natur sich uns offenbart, hat eben immer nur drei Dimensionen. Sollte man im Sinne von Hertz nicht auch sagen können: wir können uns wohl denken, dass die Bahnen in der Natur auch nach allen möglichen anderen Formen sich gestalten, aber bis jetzt hat die Natur uns nur immer gezeigt, dass die Lagrange'schen Gleichungen in ihr gelten, mithin die geradesten Bahnen in ihr verwirklicht sind.

Noch in anderer Weise steht Hertz in seiner Mechanik Boltzmann gegenüber. Wer das alte Ideal der Physik, uns eine „Erklärung" der Naturerscheinungen zu geben, aufgeben kann, der kann sich der Richtung von Boltzmann anschliessen. Wer dasselbe aber nicht aufgeben will, der bedarf eines Gesetzes, welches, als allgemeines Naturgesetz anzusehen, er sich begnügen darf. Eine Annahme, wie die von Boltzmann, darf man nicht als solches ansehen, denn sie enthält eine Willkür; daher kann man von der Seite her nie zu etwas anderem kommen, als zu einer Beschreibung der Erscheinungen. Kein Gesetz, welches nur in der Erfahrung seine Bestätigung findet, darf als Naturgesetz angesehen werden. Nun hat aber das Hertz'sche Grundgesetz neben seiner Bestätigung in der Erfahrung eine Begründung in seiner mathematischen Form. Bedenken wir noch, dass wir von der Natur nie anders, als durch die Erfahrung etwas lernen können, und fordern wir doch von unserm Standpunkte der Natur gegenüber, dass uns ein Grundgesetz erfassbar sei, so kann eben nur die Form des Gesetzes, dessen Inhalt wir in der Erfahrung finden, für uns bestimmend sein, um ihm einen Vorzug vor einem andern zu geben. Und dieser Anforderung für seine Form (das kann eben immer nur seine ganz genaue mathematische Formulirung sein) eine ausserhalb der Erfahrung liegende Begründung zu haben, genügt gerade das Grundgesetz von Hertz.

Vielleicht an keiner Stelle im Reiche der gesammten Wissenschaften tritt so offenbar zu Tage, wie sehr unsere ganze Weltanschauung in letzter Instanz von unserm freien Willen abhängt.

Wollen wir den Glauben in uns erhalten, dass wir im Stande sind, den grossen, gesetzmässigen Zusammenhang in der Natur zu erkennen, so müssen wir uns vor allem klar machen, wann wir etwas erkannt oder erklärt nennen wollen. Für die Physik kann das immer nur ein Zurückführen auf ein Grundgesetz sein, mit dem wir nach unsern Fähigkeiten zufrieden sein können und müssen. Damit sind wir bei Hertz und wir dürfen wohl unserm Geist die Fähigkeit zutrauen „wirkliche dynamische Modelle der Dinge zu bilden und mit ihnen zu arbeiten". Das ist wenig, verglichen mit dem, was Schwärmerei träumen mag, aber doch alles, was menschlichen Fähigkeiten erreichbar ist. Wer das nicht nimmt, dem bleibt nur die mathematische Beschreibung, und das ist noch viel weniger. Denn bei

einem „wirklichen dynamischen Modell“ berechtigen uns die denknothwendigen Folgen zu Schlüssen, deren Eintreffen wir mit unbedingter Sicherheit in dem dargestellten Naturvorgang erwarten können. Gelingt uns dabei einmal nicht die Uebereinstimmung unserer Schlüsse mit der Erfahrung nachzuweisen, so haben wir die Natur noch nicht richtig verstanden oder gedeutet, aber unser Gesetz mit seinen Schlüssen bleibt doch richtig. Beschränkt man sich aber auf die blosse Beschreibung, so bleibt in einem Falle Nichtübereinstimmens zwischen Natur und Rechnung völlig unsicher, ob nur die Deutung oder unsere ganze Beschreibung falsch ist.

Dass aber auch das System von Hertz verständigen Ansprüchen reichlich genügen kann, wird ein Blick auf die Hauptmerkmale in seinem Aufbau zeigen. Dass zunächst Hertz mit der von Kirchhoff ausgegangenen Aufgabestellung für die Physik, die dieser nur die Möglichkeit einer Beschreibung einräumt, nicht einverstanden ist, spricht er aus im § 313:

„Wir betrachten eine Erscheinung der Körperwelt als mechanisch und damit als physikalisch erklärt, wenn wir sie erkannt haben als denknothwendige Folge des Grundgesetzes und der von der Zeit unabhängigen Eigenschaften materieller Systeme“.

und § 314:

„Die vollständige Erklärung der Erscheinungen der Körperwelt würde also erfordern:

1) ihre mechanische oder physikalische Erklärung;

2) eine Erklärung des Grundgesetzes;

3) die Erklärung der ausserzeitlichen Eigenschaften der Körperwelt. Die zweite und dritte dieser Erklärungen aber rechnen wir nicht mehr in das Gebiet der Physik“.

Die zweite dieser Erklärungen gehört in das Gebiet der Philosophie und dürfte sich auf dem Wege ergeben, wie hier gezeigt wurde. Die dritte gehört in das Gebiet der rein mathematischen Speculation, wie weiter unten gezeigt werden soll.

Es ruht nun das Hertz'sche System auf drei allerdings nur mathematischen Willkürlichkeiten, das sind:

1) die Darstellung der Bewegung eines Systems durch die Bewegung des Massenmittelpunktes,

2) Die Einführung eines festen, d. h. von der Zeit unabhängigen Zusammenhanges zwischen Theilen des Systems,

3) das Grundgesetz.

Die Einführung des Massenmittelpunktes geschieht zwar nicht offen unter diesem Namen, es ist aber nichts anderes, wenn Hertz die Bewegung darstellt durch die Einführung des quadratischen Mittelwerthes der Einzelbewegungen. Es ist dies eine That des Zusammenfassens, die wir auf irgend eine Weise vollbringen müssen, wenn wir die unendliche Vielheit

der Einzelbewegungen mit einmal übersehen wollen. Ob man hier auch anders verfahren kann, ist vorher nicht zu wissen; versucht ist es jedenfalls noch nicht, sollte es möglich sein, so wäre noch ein anderes gleichberechtigtes System neben diesem denkbar.

Die Einführung fester Zusammenhänge zwischen einzelnen Theilen der Systeme ist zunächst nicht identisch mit der Einführung starrer Verbindungen, sondern diese sind nur ein Spezialfall der zulässigen Zusammenhänge. § 209 sagt:

„Zwischen einer Anzahl von materiellen Punkten besteht ein Zusammenhang, wenn aus der Kenntniss eines Theils der Componenten der Verrückungen dieser Punkte eine Aussage in Bezug auf die übrigen Componenten möglich ist".

Ferner wird von dem Zusammenhange in einem materiellen freien System nur noch verlangt, dass er stetig ist, dass er ein innerer ist, d. h. nur die Lage der Punkte, die zu dem System selbst gehören, betrifft, und dass er unabhängig von der Zeit ist. Es wird dann gezeigt, dass jeder derartige Zusammenhang sich darstellen lässt, durch „eine Anzahl homogener, linearer Gleichungen zwischen den Differentialen der Coordinaten, deren Coeffizienten stetige Funktionen möglicher Werthe der Coordinaten sind". Diese Gleichungen heissen Bedingungsgleichungen des Systems und jede Anzahl von Gleichungen dieser Form, die kleiner als die Zahl der Coordinaten ist, kann als System von Bedingungsgleichungen angenommen werden.

Offenbar ist hier eine viel grössere Mannigfaltigkeit zulässig, als nur die starre Verbindung.

Diese Einführung eines Zusammenhanges entspricht hier offenbar der obengenannten Hypothese von Boltzmann in dessen Darstellung. Während aber die Boltzmann'sche Annahme nur veranlasst sein kann durch den Gedanken, dass eine derartige Beziehung in der Erfahrung wirklich anzutreffen zu sein scheint, bleibt den entsprechenden Ueberlegungen bei Hertz „die Erfahrung noch völlig fern." (§ 295.) Die Formulirung ist nur aus rein mathematischen Gründen getroffen. Aber diese Formulirung geschieht freilich „im Hinblick auf mögliche Erfahrungen" (§ 295), denn es ist nicht in erster Linie die Aufgabe der Mechanik, die innerste Beschaffenheit aller Naturvorgänge aufzudecken, sondern sie soll uns vielmehr in den Stand setzen, die Erscheinungen als denknothwendige Folgen des Grundgesetzes zu verstehen.

Nun steht aber ein Vorgang in der Natur nie allein da, sondern er ist stets durch innere und äussere Beziehungen mit allen andern verknüpft. Wir können unsere Betrachtungen aber zunächst immer nur auf eine Seite eines einzelnen Vorganges zur Zeit richten, wir sehen daher stets alle andern Beziehungen als Verbindungen an, die bei unserer Betrachtung konstant sind. Daher kann auch nur eine solche Mechanik den zu erwartenden

Problemen gerecht werden, bei der auch nach Einführung derartiger Verbindungen die Anwendung des Grundgesetzes noch möglich ist. Dadurch ist die Einführung derartiger Zusammenhänge gerechtfertigt, zugleich ist aber auch klar, dass diese Mechanik immer nur Einzelvorgänge behandelt und dass zur vollständigen Erklärung der Körperwelt noch eine Erklärung dieser Zusammenhänge erforderlich ist, die Hertz aber ausdrücklich nicht mehr zu den Aufgaben seiner Mechanik rechnet.

In Betreff der dritten Grundlage des Hertz'schen Systems, des Grundgesetzes, dürfte oben schon die genügende Begründung gegeben sein, es erübrigt nur noch einen Blick zu werfen, wie diese Mechanik praktisch anzuwenden ist. Die Lagrange'schen Gleichungen, oder eine der von ihnen abgeleiteten Formen, sind die analytische Darstellung des Grundgesetzes. Die Physik hat die Aufgabe, alle Vorgänge, die sie behandelt, so darzustellen, dass sie als ein besonderer Fall der Gültigkeit dieser Gleichungen erkannt werden. Seit Maxwell und Helmholtz dürfte thatsächlich das Vorgehen der Physik hierdurch sehr richtig charakterisirt sein. In den Gleichungen treten auf: eine Energiegrösse, ein Parameter und eine Grösse von der die Variation des Parameters abhängt. Aufgabe der Physik ist es, in den einzelnen Erscheinungen nachzuweisen, welcher Antheil in dem Vorgang als Energiegrösse anzusehen ist, welcher als Parameter und was als Einfluss aus dem im Uebrigen nicht mit betrachtetem Zusammenhang im System auf die Grösse des Parameters anzusehen ist. Ein physikalisches Problem ist hierbei erst dann vollständig gelöst, wenn es dargestellt ist durch ein System Lagrange'scher Gleichungen und ein System homogener linearer Gleichungen zwischen den Differentialen der in den Lagrange'schen Gleichungen auftretenden Coordinaten. Letztere stellen dann die in dem betreffenden Falle anzunehmenden inneren Zusammenhänge dar.

Ich wüsste nicht, wie eine klare, durchdachte Energetik eine bessere Stütze sich wünschen könnte, als gerade diese Mechanik. Schliesslich noch Eins, was die Einführung der „verborgenen“ Massen bei Hertz betrifft. Wir sind bekanntermassen nicht immer im Stande, um ein Problem physikalisch darzustellen, als Parameter oder Coordinaten Grössen einzuführen, durch welche nur die Lagen von sinnlich wahrnehmbaren Massen bestimmt sind, wie es diese Mechanik zunächst verlangt, sondern wir sind oft genöthigt, Grössen einzuführen, z. B. bei der Stärke des elektrischen Stromes, durch deren Aenderung eine Aenderung in der Lage sinnlich wahrnehmbarer Massen nicht eintritt. Dann sagt Hertz: § 594. „Wir sagen ein System enthalte verborgene Massen, wenn durch die der Beobachtung zugänglichen Coordinaten des Systems noch nicht die Lage aller Massen des Systems bestimmt ist, sondern nur die Lage eines Theiles derselben.“ Damit ist nichts anderes gesagt, als was die Physik schon immer gethan hat, indem sie von dem sinnlich nicht wahrnehmbaren Aether spricht. In richtiger Würdigung des unbedingt

Nöthigen hat Hertz den treffenden Namen „verborgene Massen" gewählt, ohne dabei auch nur die allergeringste Hypothese über Eigenschaften dieser Massen einzuführen, als ihre Existenz.

Diese Massen werden auch lediglich dazu gebraucht, die Einführung von Parametern zu rechtfertigen, die wir zur Anwendbarkeit der Lagrangeschen Gleichungen und der Bedingungsgleichungen des Systems erfahrungsgemäss nöthig haben. In diesem Sinne ist die Einführung derartiger Massen nöthig und berechtigt, da ihr der Natur der Sache nach durch die Erfahrung nicht widersprochen werden kann. In der Einführung der verborgenen Massen bei Hertz schon ein Erklären durch einen inneren Mechanismus finden zu wollen, widerspricht dagegen dem ganzen Werke, denn ein Zurückführen auf einen derartigen Mechanismus muss zu dem dritten der oben genannten der Erklärung bedürftigen Dinge gewiesen werden, der Erklärung der ausserzeitlichen Eigenschaften der Körperwelt. Diesen Theil rechnet Hertz aber gar nicht mehr zur Physik.

Was nun schliesslich diese Erklärung der „ausserzeitlichen Eigenschaften" anbetrifft, so kann darunter nur verstanden werden, die Erklärung dafür, dass solche mathematische Zusammenhänge zwischen den wahrnehmbaren und auch den verborgenen Massen, wie wir sie bei der Lösung physikalischer Probleme im Hertzschen Sinne thatsächlich vorfinden, zwischen den Massen in der Natur vorkommen können. Um dafür eine Erklärung zu finden, müssen wir uns alle Zusammenhänge fortdenken und überhaupt alle Verschiedenheiten im Raume. Dann bleibt nur der ganz kontinuirlich mit Massentheilchen homogen erfüllte Raum, alle Unterschiede sind nur Bewegungsverschiedenheiten. Um der Zugänglichkeit für die mathematische Behandlung willen, dürfen wir alle Uebergänge als stetig ansehen und haben dann das Problem, wie können in einem homogenen, inkompressiblen Medium durch blosse Bewegungsdifferenzen Zustände zu Stande kommen, die obigen Bedingungsgleichungen für Massensysteme Genüge leisten können. Damit sind wir bei Thomsons Wirbeltheorie. Das Problem ist offenbar ein rein mathematisches, ob es eine Lösung hat, ist völlig ungewiss, es kann auch mehrere gleichzeitig haben. Die Lösung ist ein mathematisches Ideal, aber da unser Interesse an der Natur nicht an die Erreichbarkeit dieses Ideals geknüpft ist, gehört es auch nicht mehr zur Physik. Zwischen die Lösung des mathematischen Ideals und die Thätigkeit der reinen Physik lassen sich nun allerdings mit gutem Nutzen noch eine Reihe partieller und hypothetischer Lösungen einfügen. Die Lösungen sind partiell, weil sie nicht alle Zusammenhänge erklären, und sie sind hypothetisch, weil sie gewisse Zusammenhänge zu einem bestimmten Zwecke als vorhanden annehmen. Als eine derartige partielle Lösung kann Boltzmann's Mechanik gelten. Ebenso geben uns die kinetische Gastheorie, die Elastizitätstheorie des Lichtes und viele andere solche partielle Lösungen. Derartige Theorien sind Beschreibungen

möglicher Vorgänge, deren denknothwendige Folgen mit gewissen beobachteten Erscheinungen bis zu einem gewissen Grade übereinstimmen und sind in diesem Sinne partielle Lösungen; sie sind dynamische Modelle der betrachteten Vorgänge. Als solche sind sie von grossem Nutzen zum Auffinden neuer Beziehungen und Zusammenfassen verschiedener Erscheinungen, aber sie sind immer nur Beschreibungen, keine physikalischen Erklärungen. Ihr Werth besteht in dem Grade der Uebereinstimmung mit der Erfahrung, sie können aber stets durch die Erfahrung überholt werden. Aus einer vollständigen Lösung der Aufgabe der Physik würden alle diese hypothetischen Gebilde wieder verschwinden müssen, denn diese hat die Thatsachen nur darzustellen durch das System der Differentialgleichungen des Grundgesetzes, die Hypothesen helfen uns nur den Weg finden, wie die Gleichungen in dem einzelnen Falle anwendbar sein können, d. h. welche Thatsachen der Erfahrung durch welche Elemente der Formeln wiederzugeben sind. Sobald dies erreicht ist, tritt die Hypothese wieder zurück (falls überhaupt eine solche benutzt wurde, was nicht immer nöthig zu sein scheint), und im Hintergrunde bleibt nur das rein mathematische Ideal.

Wenn nun auch meines Wissens eine derartige, weitgehende Auffassung der Prinzipien der Mechanik von Hertz in den mancherlei Besprechungen dieses Werkes noch nicht hervorgehoben ist, so glaube ich doch, dass man zu derselben sich wird hindurcharbeiten müssen, wenn man denkt an das, worauf Hertz den Hauptwerth legt, ja „einzig" Werth legt, das ist „die Anordnung und Zusammenstellung des Ganzen, also die logische oder wenn man will, die philosophische Seite des Gegenstandes". Oder wie er an anderer Stelle sagt: „ob es (das Bild) auch nur alle gegenwärtige Erfahrung umfasst, alles dies ist mir fast Nichts gegen die Frage, ob es in sich abgeschlossen, rein und widerspruchsfrei ist."

Der Zweck dieser Zeilen ist erreicht, wenn es mir gelungen ist, darauf hinzuweisen, dass in der Mechanik von Hertz mehr enthalten ist, als die bisherigen Erwähnungen derselben (bei Helm, Boltzmann, Mach) haben erkennen lassen, und dass diese Mechanik einen andern Standpunkt in Bezug auf die Aufgabe der Physik vertritt, als gegenwärtig meist angenommen wird.

Gedruckt bei Lütcke & Wulff, E. H. Senats Buchdruckern.

Gedruckt bei Lütcke & Wulff, E. H. Senats Buchdruckern.

Alexander Ziwet

Studien

zur

analytischen Mechanik.

Die allgemeinen Gesetze der Bewegung.

Von

Dr. J. Dienger,

Professor der Mathematik an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe.

Stuttgart.

Verlag der J. B. Metzler'schen Buchhandlung.

1863.

Studien

zur

analytischen Mechanik.

Alexander Ziwet

Studien

zur

analytischen Mechanik.

Die allgemeinen Gesetze der Bewegung.

Von

Dr. J. Dienger,

Professor der Mathematik an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe.

Stuttgart.

Verlag der J. B. Metzler'schen Buchhandlung.

1863.

Vorwort.

Bei der Veröffentlichung dieser kleinen Schrift habe ich einen doppelten Zweck verfolgt. Einerseits wollte ich die allgemeinen Gesetze der Bewegung nach den heutigen analytischen Methoden darstellen, und in so ferne ist dieselbe eine Art Ergänzung dessen, was ich im dritten Bande meiner Differential- und Integralrechnung (Stuttgart, Metzler'sche Buchhandlung 1862) mehrfach berührt habe. Anderseits aber wollte ich zeigen, dass man ohne die „unendlich kleinen Grössen" (Variationen, Differentiale u. s. w.) in der analytischen Mechanik nicht nur vollständig ausreicht, was vielfach bestritten wird, sondern dass die ganze Betrachtung, wenn auch nicht immer vereinfacht, doch sicher klarer und durchsichtiger wird. In dieser Beziehung war die Auswahl der einzelnen Probleme natürlich ziemlich willkürlich, und ich habe desshalb auch nicht alle behandelt, die hieher gehört hätten. Ich hatte eben nicht die Absicht, ein Lehrbuch der analytischen Mechanik zu schreiben, hoffe aber, dass mit Berücksichtigung der beabsichtigten Zwecke die Schrift einigen Nutzen stiften kann.

Karlsruhe, Juli 1863.

Inhalts-Verzeichniss.

Die allgemeinen Gesetze der Bewegung.

---

§. 1.

Grundformeln.

I. Sei p das Gewicht eines Massenpunktes m, dessen rechtwinklige Koordinaten zur Zeit t seien x, y, z; die Resultirende aller auf diesen Punkt wirkenden Kräfte habe zu Seitenkräften nach den drei Axen: X, Y, Z; g sei die bekannte Beschleunigung durch die Schwerkraft. Alsdann hat man als Gleichungen der Bewegung dieses Punktes:

$$\frac{p}{g}\frac{d^2x}{dt^2}=X,\ \frac{p}{g}\frac{d^2y}{dt^2}=Y,\ \frac{p}{g}\frac{d^2z}{dt^2}=Z, \qquad (1)$$

wo X, Y, Z Funktionen von x, y, z, t sein können, x, y, z selbst aber Funktionen der (einen) unabhängig Veränderlichen t sind. Daneben können X, Y, Z auch noch von den Koordinaten anderer Massenpunkte, die mit dem betrachteten in Verbindung stehen — mit ihm ein System bilden — abhängen.

Die (1) sind unbedingt giltig, und sie bestimmen die Bewegung des betrachteten Punktes vollständig, so dass wir weitere Gleichungen nicht mehr aufzusuchen haben, vielmehr alles Uebrige aus diesen (1) ableiten müssen.

Betrachtet man ein zusammengehöriges System von n einzelnen Massenpunkten (n kann ganz wohl unendlich gross sein), so gelten für jeden einzelnen Punkt drei Gleichungen von der Form der (1), welche Gleichungen somit der Anzahl nach 3n sein werden. Ihre Integration liefert die 3n Koordinaten als Funktionen der Zeit, also Alles, was zur genauen Bestimmung der Bewegung eines jeden einzelnen Punktes nothwendig ist.

Kräfte.

II. Die Kräfte, welche auf den Punkt m wirken, theilen wir in innere und äussere ab. Die erstern rühren von den gegenseitigen Einwirkungen der Massenpunkte des Systems auf einander her, wenn wir bei dieser bildlichen

Vorstellung stehen bleiben, ohne uns über das eigentliche Wesen dieser Kräfte genauer aussprechen zu wollen. Die letztern sind dem Systeme, dem wir m zurechnen, fremd, d. h. sie haben ihren Grund und Sitz ausserhalb des Systems. Doch legen wir dieser Eintheilung der wirksamen Kräfte kein übergrosses Gewicht bei, da bei der Aufstellung der (1) eben nur nothwendig ist, alle Kräfte, die auf den Massenpunkt wirken, gehörig zu beachten.

Dabei muss bemerkt werden, dass das was hier ein System von Massenpunkten genannt wird, in willkürlicher Weise begränzt gedacht werden kann. Wir können einen festen Körper als ein solches ansehen; wir können auch mehrere solcher einzelner festen Körper als zusammen gehörig betrachten; ja wir können einen beliebigen Theil eines derselben als ein für sich abgeschlossenes System untersuchen u. s. w.

Die von den gegenseitigen Einwirkungen zweier Punkte auf einander herrührenden Kräfte betrachten wir immer als wirkend in der Richtung der Verbindungslinie beider Punkte. Solche Kräfte wirken mit gleicher Stärke (Intensität), jedoch in entgegengesetzten Richtungen auf beide Punkte.

Ist ein Punkt gezwungen, auf einer gegebenen Fläche (oder Kurve) zu bleiben, so übt er senkrecht auf dieselbe einen Druck aus, indem der Zwang daher rührt, dass die Fläche auf ihn nach der bemerkten Richtung wirkt, und er daher wieder auf die Fläche. Die Richtung ist noch genauer dadurch bestimmt, dass dieser Zwang den Punkt gegen die Fläche andrücken muss.

Bei der Bewegung auf einer körperlichen Fläche setzt sich der fortschreitenden Bewegung ein Widerstand entgegen, der in derjenigen Richtung wirkt, die der Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist. Dieser Widerstand heisst die Reibung, und ist gleichfalls unter die wirksamen Kräfte zu zählen. Sie gehört in der Regel zu den äussern Kräften.

Sind zwei Massenpunkte gezwungen, beständig in derselben Entfernung von einander zu bleiben, und würden sie ohne Zwang nicht in diesem Verhältnisse bleiben, so äussert sich der Zwang in einer Spannung zwischen denselben. Dieselbe gehört hiernach offenbar zu den innern, durch gegenseitige Einwirkung entstandenen Kräften. Ihre Richtung ist die der Verbindungslinie.

Druck und Reibung können zu den äussern oder innern Kräften des Systems gerechnet werden, je nachdem die Fläche, die dazu Veranlassung gibt, nicht zum Systeme gehört oder mit demselben vereinigt ist.

Die gegenseitigen Einwirkungen der Punkte müssen wir hier als bekannt ansehen. Kennen wir auch thatsächlich das Gesetz dieser Wirkung nicht, so müssen wir doch als möglich voraussetzen, es werde einst gelingen dasselbe zu erforschen, und müssen es also, von dem allgemeinen Standpunkte aus, als bereits bekannt betrachten. Dessgleichen müssen wir die Reibung als eine bekannte Kraft ansehen.

Anders verhält es sich mit Druck und Spannung, welch letztere gewissermassen auch ein Druck ist. Diese Kräfte hängen von dem Zustande der Bewegung offenbar ab, und können desshalb auch nicht zum Voraus als bekannt angesehen, oder als bekannt behandelt werden. Sie treten sonach als unbekannte (d. h. noch zu bestimmende) Grössen in die Gleichungen (1) ein.

Die äussern Kräfte sehen wir als unbedingt bekannt an.

Bedingungsgleichungen.

III. Bei der Ermittlung der Bewegung eines Systems von n Punkten können hiernach ausser den 3n Koordinaten noch weitere Unbekannte zu bestimmen sein. Daraus folgt, dass man ausser den 3n Gleichungen (1) noch weitere Gleichungen werde aufstellen müssen. Diess ist auch für jede weiter eintretende Unbekannte durchaus möglich, wenn anders der Bewegungszustand ein bestimmter ist.

So wenn ein Punkt gezwungen ist auf einer bestimmten und gegebenen Fläche zu bleiben, müssen seine Koordinaten der Gleichung der Fläche genügen. Diess ist dann die fragliche weitere Gleichung, welche wegen des eintretenden unbekannten Druckes nothwendig wird.

Müssen zwei Punkte in unveränderlichem Abstande a bleiben, und besteht desshalb eine Spannung zwischen beiden, so werden die Koordinaten x, y, z; x′, y′, z′ der beiden Punkte der Gleichung

$$(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = a^2 \qquad (2)$$

zu genügen haben (zu jeder Zeit t). Diess ist die weitere Gleichung. Man kann aber diesen Fall leicht auf den vorigen zurückführen, indem man sagt, es müssten die beiden Punkte je auf einer (veränderlichen) Kugelfläche vom Halbmesser a liegen, deren Mittelpunkt sich in dem andern Punkte befindet. Die beiden Drucke (Spannung) sind dann gleich, aber entgegengesetzt gerichtet. So wird überhaupt für jede weiter einzuführende Unbekannte sich nothwendig auch eine weitere *Bedingungsgleichung* ergeben.

Analytischer Ausdruck der Kräfte.

IV. Wir bezeichnen die n Punkte des Systems durch $m_1, m_2, \ldots, m_n$; ebenso die Koordinaten des r^{ten} Punktes (zur Zeit t) durch x_r, y_r, z_r. Wirken nun die Punkte m_r, m_s auf einander ein, so wollen wir die Stärke dieser Einwirkung durch $P_{r,s}$ bezeichnen, wo also, nach dem allgemeinen Satze gleicher gegenseitiger Einwirkung,

$$P_{r,s} = P_{s,r} \qquad (3)$$

sein wird. Dabei denken wir uns $P_{r,s}$ *als positiv, wenn sich die beiden Punkte anziehen; als negativ, wenn sie sich abstossen.* Für die Seitenkräfte erhält man hiernach bei der Wirkung

$$\left.\begin{array}{l} \text{auf } m_r: -P_{r,s}\frac{x_r - x_s}{\varrho_{r,s}}, \quad -P_{r,s}\frac{y_r - y_s}{\varrho_{r,s}}, \quad -P_{r,s}\frac{z_r - z_s}{\varrho_{r,s}}; \\ \text{„ } m_s: -P_{r,s}\frac{x_s - x_r}{\varrho_{r,s}}, \quad -P_{r,s}\frac{y_s - y_r}{\varrho_{r,s}}, \quad -P_{r,s}\frac{z_s - z_r}{\varrho_{r,s}}, \end{array}\right\} \tag{4}$$

wo $\varrho_{r,s}$ die gegenseitige Entfernung ist, d. h.

$$\varrho_{r,s} = \sqrt{(x_r - x_s)^2 + (y_r - y_s)^2 + (z_r - z_s)^2}, \tag{5}$$

und die Quadratwurzel (wie immer) nur positiv genommen wird.

Aus (4) und (5) ergibt sich unmittelbar, dass die Seitenkräfte der hier betrachteten Wirkung sind

$$\left.\begin{array}{l} \text{auf } m_r: -P_{r,s}\frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial x_r}, \quad -P_{r,s}\frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial y_r}, \quad -P_{r,s}\frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial z_r}; \\ \text{„ } m_s: -P_{r,s}\frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial x_s}, \quad -P_{r,s}\frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial y_s}, \quad -P_{r,s}\frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial z_s}. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Gewöhnlich setzt man

$$P_{r,s} = \frac{p_r}{g}\frac{p_s}{g} f(\varrho_{r,s}), \tag{7}$$

wo p_r, p_s die Gewichte der beiden Punkte bedeuten.

Den Quotienten des Gewichts durch g nennt man die Masse des Punktes, und wir wollen setzen.

$$\frac{p_r}{g} = m_r, \tag{8}$$

also mit m_r die Masse des Punktes bezeichnen den wir m_r nannten, wobei wohl keine Zeichenverwirrung eintreten wird.* Wir verbreiten uns über den Begriff der Masse nicht weiter, da wir hier überhaupt diese Dinge als bereits erledigt ansehen. Alsdann ist im Allgemeinen

$$P_{r,s} = m_r m_s f(\varrho_{r,s}). \tag{7'}$$

V. Sei

$$f(x, y, z) = 0, \text{ oder kürzer } u = 0$$

die Gleichung einer Fläche, auf welcher der Punkt m_r bleiben muss (eine Gleichung in der auch t vorkommen kann, in welchem Falle die Fläche ihre Gestalt mit der Zeit ändert). Alsdann muss immer

$$f(x_r, y_r, z_r) = 0, \text{ oder kürzer } u_r = 0 \tag{9}$$

sein. In Folge dieses Zwanges wird auf den Punkt m_r eine Wirkung (Druck) ausgeübt, die wir durch D_r bezeichnen wollen, und die senkrecht zur Fläche

---

* Was Masse sei ist ein viel besprochener und bestrittener Punkt. Für uns ist Gewicht eine Kraft so beschaffen, dass sie dem Massenpunkte wenn sie unverändert auf ihn wirkt und er sich in der Richtung ihrer Wirkung bewegt, eine Beschleunigung g der Geschwindigkeit mittheilt. Masse ist dann Gewicht, durch g dividirt, hängt also dem Zahlenausdrucke nach von zwei Einheiten ab. Die Kräfte denken wir uns durch Gewichte gemessen.

gerichtet ist. Daraus folgt, dass diese Kraft mit den Richtungen der Koordinatenaxen Winkel macht, deren Cosinus sind:

$$\frac{1}{k_r}\frac{\partial u_r}{\partial x_r}, \quad \frac{1}{k_r}\frac{\partial u_r}{\partial y_r}, \quad \frac{1}{k_r}\frac{\partial u_r}{\partial z_r}; \quad \text{wo } k_r = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial u_r}{\partial x_r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_r}{\partial y_r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z_r}\right)^2}, \tag{10}$$

und das Zeichen von k_r so zu wählen ist, dass der Punkt gegen die Fläche gedrückt wird. Dabei ist D_r kurzweg als positiv behandelt.

Die Seitenkräfte sind hiernach

$$\frac{D_r}{k_r}\frac{\partial u_r}{\partial x_r}, \quad \frac{D_r}{k_r}\frac{\partial u_r}{\partial y_r}, \quad \frac{D_r}{k_r}\frac{\partial u_r}{\partial z_r}, \tag{11}$$

oder wenn

$$\frac{D_r}{k_r} = S_r:$$

$$S_r\frac{\partial u_r}{\partial x_r}, \quad S_r\frac{\partial u_r}{\partial y_r}, \quad S_r\frac{\partial u_r}{\partial z_r}. \tag{11'}$$

Hiebei haben wir vorausgesetzt, dass in (9) ausser den Koordinaten des Punktes m_r keine der Koordinaten eines andern Punktes des Systems vorkommen, also auch die Bedingungsgleichung (9) nur bei diesem Punkte in Anwendung komme.

VI. Ist der Punkt m_r überhaupt in seiner Bewegung derart beschränkt, dass seine Koordinaten beständig der Gleichung

$$u_e = 0 \tag{9'}$$

genügen müssen, wo in u_e ausser x_r, y_r, z_r auch noch die Koordinaten anderer Punkte des Systems vorkommen können (nebst etwa der Zeit t), so kann man die Sache immer so ansehen, dass für einen bestimmten Augenblick m_r auf derjenigen Fläche liegen müsse, welche durch (9') bestimmt ist, wenn man in dieser Gleichung nur die Koordinaten des Punktes m_r als veränderlich, die aller übrigen Punkte dagegen (für den Augenblick) als unveränderlich ansieht. Daraus folgt dann, dass die Seitenkräfte der in Folge des Zwanges auf m_r ausgeübten Wirkung sein werden

$$S\frac{\partial u_e}{\partial x_r}, \quad S\frac{\partial u_e}{\partial y_r}, \quad S\frac{\partial u_e}{\partial z_r}, \tag{12}$$

wo S allerdings von der Form der Funktion u_e sowohl, als auch den Koordinaten des Punktes m_r abhängt.

Die Formel (12) umfasst alle möglichen Fälle, also natürlich auch den der Spannungen, bezüglich den der Bedingungsgleichungen (2). Dabei müssen wir jedoch sofort darauf aufmerksam machen, dass wenn in (9') die Koordinaten der Punkte m_r und m_s vorkommen, allerdings die Seitenkräfte der auf m_s ausgeübten Wirkung auch sind

$$S\frac{\partial u_e}{\partial x_s}, \quad S\frac{\partial u_e}{\partial y_s}, \quad S\frac{\partial u_e}{\partial z_s},$$

es sich aber nicht kurzweg von selbst versteht, dass das jetzige S dem in

(12) gleich sei (vergl. VIII). Wir werden desshalb vorläufig das eine durch $S_{e,r}$, das andere durch $S_{e,s}$ bezeichnen.

VII. Sind hiernach X_r, Y_r, Z_r die Seitenkräfte der äussern auf m_r wirkenden Kräfte (zu denen Reibung gehören soll); $P_{r,s}$ die in IV näher bestimmten, S die in VI betrachteten, so stellen sich die (1) unter die Form

$$\left.\begin{aligned} m_r \frac{d^2 x_r}{dt^2} &= X_r - \Sigma P_{r,s} \frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial x_r} + \Sigma S_{e,r} \frac{\partial u_e}{\partial x_r}, \\ m_r \frac{d^2 y_r}{dt^2} &= Y_r - \Sigma P_{r,s} \frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial y_r} + \Sigma S_{e,r} \frac{\partial u_e}{\partial y_r}, \\ m_r \frac{d^2 z_r}{dt^2} &= Z_r - \Sigma P_{r,s} \frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial z_r} + \Sigma S_{e,r} \frac{\partial u_e}{\partial z_r}. \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

wo das erste Summenzeichen sich auf alle möglichen s, d. h. auf alle Punkte bezieht, die auf m_r anziehend oder abstossend wirken, das zweite dagegen auf alle möglichen e, d. h. auf alle Bedingungsgleichungen der Form (9′), in denen die Koordinaten des Punktes m_r vorkommen. Die P sind als bekannte, die S als zu bestimmende Grössen zu behandeln.

Beweis, dass $S_{e,r} = S_{e,s}$.

VIII. Wir haben in VI darauf aufmerksam gemacht, dass zwar wohl in den sich auf m_r beziehenden Gleichungen (a) die Grösse S dieselbe bleibt für dasselbe u, dass aber in den auf m_s sich beziehenden Bewegungsgleichungen die Grösse S, auch wenn dasselbe u dort vorkommt, nicht ohne Weiteres auch als dasselbe mit dem vorhergehenden darf angenommen werden. Wir haben also hier zuerst diese Frage zu erörtern und wollen beweisen, dass in den Bewegungsgleichungen aller Punkte, deren Koordinaten derselben Gleichung $u = 0$ genügen müssen, auch das in ihnen bei den partiellen Differentialquotienten von u als Faktor vorkommende S denselben Werth habe.

Um diesen Beweis führen zu können, müssen wir Betrachtungen einflechten, auf die wir in §. 12 in allgemeinerer Weise zurückkommen werden, die wir also hier dem besondern Gesichtspunkte anpassen wollen.

Gesetzt zur Zeit t werden plötzlich alle Koordinaten der einzelnen Punkte fest, d. h. es höre alle Bewegung und die Wirkung sämmtlicher innern und äussern Kräfte auf, so dass nur die Kräfte der Verbindungen, d. h. die (12) bleiben. Alsdann wird das ganze System in Ruhe bleiben, d. h. diese Kräfte allein sind nicht im Stande, irgend eine Bewegung der Punkte, auf die sie wirken, hervorzurufen. Dieser Grundsatz, auf den wir uns stützen wollen, liegt ganz offenbar in dem oben festgestellten Begriff dieser Kräfte.

Wir werden uns also, wie so eben, zur Zeit t plötzlich alle äussern und innern Kräfte, so wie alle Geschwindigkeiten aufgehoben denken und dann

nur die Kräfte der Verbindungen wirksam sein lassen. Da keine Bewegung eintreten wird, so bleiben die sämmtlichen Koordinaten, was sie waren, so dass natürlich in den Bedingungsgleichungen (9′) eine Aenderung derselben nicht einzutreten hat, mithin auch das etwa dort vorkommende t ungeändert bleibt.

Um aber die in Folge dieser Eigenschaft zwischen den Kräften der Verbindungen bestehenden Beziehungen aufzufinden, wollen wir uns einmal den Fall als möglich denken, dass doch Bewegung unter dem Einfluss der genannten Kräfte eintrete.

Wir rechnen alsdann die Zeit, die wir durch τ bezeichnen wollen, von dem Augenblicke an (Zeit t), wo wir alle Geschwindigkeiten aufhoben, und sei dann v_r die Geschwindigkeit von m_r zur Zeit τ (für $\tau = 0$ ist nothwendig $v_r = 0$). Soll aber nie Bewegung eintreten, also v_r immer Null sein, und zwar für alle Punkte m_r, so kann man diess unmittelbar an dem Werthe von v_r untersuchen, oder aber auch die Summe

$$\frac{1}{2} \Sigma m_r v_r^2 \tag{b}$$

näher betrachten, in der das Summenzeichen sich auf alle r, d. h. auf alle Punkte des Systems bezieht. Ist diese Summe Null, so ist — da sie nur aus positiven Gliedern besteht — nothwendig jedes v_r gleich Null.

Sieht man (b) als Funktion der Zeit τ an, und kann etwa beweisen, dass diese Funktion konstant ist, und weiss zudem, dass sie einmal (für $\tau = 0$) Null ist, so hat man auch bewiesen, dass sie immer Null ist. Damit (b) konstant sei, muss

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \Sigma m_r v_r^2 = 0, \quad \text{d. h. } \Sigma m_r v_r \frac{d v_r}{d\tau} = 0 \tag{c}$$

sein. Wir haben also bloss zu zeigen, dass unter dem alleinigen Wirken der Kräfte der Verbindungen die (c) nothwendig erfüllt ist.

Die Gleichungen der Bewegung (wenn dieselbe vorhanden) wären für m_r:

$$m_r \frac{d^2 x_r}{d\tau^2} = \Sigma S_{e,r} \frac{\partial u_e}{\partial x_r}, \quad m_r \frac{d^2 y_r}{d\tau^2} = \Sigma S_{e,r} \frac{\partial u_e}{\partial y_r}, \quad m_r \frac{d^2 z_r}{d\tau^2} = \Sigma S_{e,r} \frac{\partial u_e}{\partial z_r}, \tag{d}$$

wo das Summenzeichen wie in (a) genommen ist, und x_r, y_r, z_r die Koordinaten zur Zeit τ bedeuten. Dabei muss in u_e das etwa vorkommende t mit seinem, dem Anfang dieser (vermeintlichen) Bewegung entsprechenden Werthe genommen werden, d. h. wir müssen die Flächen, welche durch die Bedingungsgleichungen ausgedrückt sind, als unveränderlich (wie sie zur Zeit t waren) ansehen, wie wir denn auch nur die Kräfte betrachten, wie sie zur Zeit t beschaffen waren, was Alles um so leichter einzusehen ist, da thatsächlich diese Bewegung nicht besteht, also τ nicht einmal einen unendlich kleinen Werth haben kann.

Nun ist

$$v_r^2 = \left(\frac{dx_r}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy_r}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz_r}{d\tau}\right)^2, \quad v_r \frac{dv_r}{d\tau} = \frac{dx_r}{d\tau}\frac{d^2x_r}{d\tau^2} + \frac{dy_r}{d\tau}\frac{d^2y_r}{d\tau^2} + \frac{dz_r}{d\tau}\frac{d^2z_r}{d\tau^2},$$

und aus den (d):

$$\Sigma m_r v_r \frac{dv_r}{d\tau} = \Sigma_r \Sigma_e S_{e,r}\left(\frac{\partial u_e}{\partial x_r}\frac{dx_r}{d\tau} + \frac{\partial u_e}{\partial y_r}\frac{dy_r}{d\tau} + \frac{\partial u_e}{\partial z_r}\frac{dz_r}{d\tau}\right),$$

wo das innere Summenzeichen sich auf alle e, das äussere auf alle r bezieht.

Wegen (c) muss also

$$\Sigma_r \Sigma_e S_{e,r}\left(\frac{\partial u_e}{\partial x_r}\frac{dx_r}{d\tau} + \frac{\partial u_e}{\partial y_r}\frac{dy_r}{d\tau} + \frac{\partial u_e}{\partial z_r}\frac{dz_r}{dt}\right) = 0 \tag{e}$$

sein, wobei natürlich gemeint ist, dass die hier vorkommenden Koordinaten den Bedingungsgleichungen (in denen nur t als fest angesehen wird) genügen, d. h. die gedachten Bewegungen als zu den mit den Bedingungen des Systems verträglichen zu rechnen sind.

Die Gleichung (e) kann in so viele Einzelglieder aufgelöst werden, als e Werthe hat. Kommen so etwa in der Funktion u_1 die Koordinaten der Punkte m_α, m_β, m_γ, ... vor, so heisst das betreffende Einzelglied:

$$S_{1,\alpha}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_\alpha}\frac{dx_\alpha}{d\tau} + \frac{\partial u_1}{\partial y_\alpha}\frac{dy_\alpha}{d\tau} + \frac{\partial u_1}{\partial z_\alpha}\frac{dz_\alpha}{d\tau}\right)$$
$$+ S_{1,\beta}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_\beta}\frac{dx_\beta}{d\tau} + \frac{\partial u_1}{\partial y_\beta}\frac{dy_\beta}{d\tau} + \frac{\partial u_1}{\partial z_\beta}\frac{dz_\beta}{d\tau}\right) + \ldots\ldots \tag{f}$$

Zugleich aber besteht nothwendig die aus $u_1 = 0$ hervorgehende Gleichung:

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_\alpha}\frac{dx_\alpha}{d\tau} + \frac{\partial u_1}{\partial y_\alpha}\frac{dy_\alpha}{d\tau} + \frac{\partial u_1}{\partial z_\alpha}\frac{dz_\alpha}{d\tau}\right)$$
$$+ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_\beta}\frac{dx_\beta}{d\tau} + \frac{\partial u_1}{\partial y_\beta}\frac{dy_\beta}{d\tau} + \frac{\partial u_1}{\partial z_\beta}\frac{dz_\beta}{d\tau}\right) + \ldots = 0, \tag{f'}$$

und so für die andern Werthe von e (dem Zeiger an u).

Daraus folgt sofort, dass wenn allgemein

$$S_{e,r} = S_{e,s}, \tag{g}$$

nach (f') die (f) identisch Null, d. h. die (e) sofort erfüllt ist; dass aber wenn (g) nicht stattfindet, man bei dem thatsächlichen Bestehen der (f') der (e) nur genügen könnte, indem man gewisse Beziehungen zwischen den Koordinaten und τ feststellte. Diess hiesse aber eine Bewegung zulassen, was wir nicht dürfen. [Wir müssen und dürfen hiebei die S in (e) als unveränderlich uns denken.]

Damit ist der Beweis geführt und wir fügen nur noch einige Bemerkungen hinzu. Wir sahen oben bei der Bildung von (f') das etwa in u_e vorkommende t als unveränderlich an, und ebenso die S. Wir müssen diess. Denn unser Beweis kommt im Grunde darauf hinaus, dass unter dem alleinigen Einflusse der Kräfte der Verbindungen, wie sie zur Zeit t beschaffen sind, keine Bewegung eintreten

kann. Wenn wir also doch eine Bewegung hypothetisch annehmen, so müssen wir die S und die Flächen genau so lassen wie sie zur Zeit t sind, d. h. also in den Gleichungen der letztern das etwa darin vorkommende t nicht ändern. Dann zeigen wir, dass unter der Annahme des Bestehens der (g) die (c) erfüllt ist, also die Hypothese einer Bewegung nicht zulässig ist.

Wie schon gesagt, werden wir später (§. 12) auf diese Untersuchungen zurückkommen.

Allgemeine Form der Bewegungsgleichungen.

IX. Die Gleichungen (a), d. h. die (1) heissen also jetzt:

$$\left.\begin{aligned} m_r \frac{d^2 x_r}{dt^2} &= X_r - \Sigma_s P_{r,s} \frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial x_r} + \Sigma_e S_e \frac{\partial u_e}{\partial x_r}, \\ m_r \frac{d^2 y_r}{dt^2} &= Y_r - \Sigma_s P_{r,s} \frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial y_r} + \Sigma_e S_e \frac{\partial u_e}{\partial y_r}, \\ m_r \frac{d^2 z_r}{dt^2} &= Z_r - \Sigma_s P_{r,s} \frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial z_r} + \Sigma_e S_e \frac{\partial u_e}{\partial z_r}. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Darin sind x_r, y_r, z_r die Koordinaten des Punktes m_r zur Zeit t (rechtwinklige Koordinaten, da sonst die letzten Glieder anders gestaltet wären); $P_{r,s}$ ist die in IV betrachtete Kraft, Einwirkung der Punkte m_r und m_s auf einander; $\varrho_{r,s}$ ist durch (5) gegeben; das Summenzeichen Σ_s bezieht sich auf alle Punkte m_s, die auf m_r wirken; $u_e = 0$ ist eine der Bedingungsgleichungen, von denen in III, V, VI gesprochen wurde; das Summenzeichen Σ_e bezieht sich auf alle u, in denen die Koordinaten des Punktes m_r vorkommen; S_e ist eine noch zu bestimmende Grösse, die für dasselbe u_e in allen möglichen Gleichungen der Bewegung (der Anzahl nach 3 n) denselben Werth hat.

Aus VIII ergibt sich sofort, dass wenn die Koordinaten der Punkte m_α, m_β, ... derselben Gleichung $u_e = 0$ genügen, die Drucke, welche in Folge dessen auf die Punkte ausgeübt werden, zusammenhängen mittelst der Beziehung:

$$\frac{D\alpha}{k\alpha} = \frac{D\beta}{k\beta} = \frac{D\gamma}{k\gamma} = \ldots.,$$

wo

$$k_\alpha^2 = \left(\frac{\partial u_e}{\partial x_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_e}{\partial y_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_e}{\partial z_\alpha}\right)^2,$$

u. s. w.

Bemerkung für den Fall der Bewegung auf einer festen Kurve.

X. Ist der Punkt m gezwungen auf einer Kurve zu bleiben, deren Gleichungen

$$u = 0, \quad w = 0 \qquad \text{(h)}$$

sind, die also von seinen Koordinaten (die wir kurzweg x, y, z nennen) zu aller Zeit erfüllt sein müssen, so ist die Aufgabe dieselbe, als wenn der Punkt auf den zwei Oberflächen, deren Gleichungen die (h) sind, bleiben muss. Diess ändert an

den (13) durchaus Nichts, da jetzt eben die beiden, u und w entsprechenden Glieder eintreten.

Ist D_1 der Druck auf die Fläche $u=0$, D_2 der auf $w=0$, so hat man in (13) die zwei Glieder

$$\frac{D_1}{k_1}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{D_2}{k_2}\frac{\partial w}{\partial x},\quad \frac{D_1}{k_1}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{D_2}{k_2}\frac{\partial w}{\partial y},\quad \frac{D_1}{k_1}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{D_2}{k_2}\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Die Resultirende von D_1 und D_2 stellt den eigentlichen Druck auf die Kurve (Zwang auf den Punkt) dar. Ist dieselbe gleich D, und sind α, β, γ die Winkel ihrer Richtung mit den Koordinatenaxen, so ist

$$\left.\begin{aligned}\frac{D_1}{k_1}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{D_2}{k_2}\frac{\partial w}{\partial x}&=D\cos\alpha,\\ \frac{D_1}{k_1}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{D_2}{k_2}\frac{\partial w}{\partial y}&=D\cos\beta,\\ \frac{D_1}{k_1}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{D_2}{k_2}\frac{\partial w}{\partial z}&=D\cos\gamma.\end{aligned}\right\}\quad (i)$$

Sind $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ die Werthe der beiden Differentialquotienten von y und z, gezogen aus den (h), so folgt aus den (i) ganz unmittelbar:

$$\cos\alpha+\cos\beta\frac{dy}{dx}+\cos\gamma\frac{dz}{dx}=0,$$

so dass also D senkrecht zur Tangente an die Kurve gerichtet ist, wie sich diess offenbar aus der Natur der Sache ergibt. Man kann nun entweder die beiden Unbekannten D_1, D_2 (S_1, S_2 in den Bewegungsgleichungen) einführen, oder die vier: D, α, β, γ, zwischen denen dann noch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta\frac{dy}{dx}+\cos\gamma\frac{dz}{dx}&=0,\\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma&=1,\end{aligned}\right\}\quad (k)$$

bestehen, die mit $u=0$, $w=0$ die vier jenen weitern Unbekannten entsprechenden Gleichungen bilden. Für unsere allgemeine Darstellung ist es wohl bequemer, die erste Form beizubehalten.

Fall eines einzigen Punktes auf einer festen Kurve.

XI. Jetzt sind also die (13):

$$\left.\begin{aligned}m\frac{d^2x}{dt^2}&=X+\frac{D_1}{k_1}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{D_2}{k_2}\frac{\partial w}{\partial x},\\ m\frac{d^2y}{dt^2}&=Y+\frac{D_1}{k_1}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{D_2}{k_2}\frac{\partial w}{\partial y},\\ m\frac{d^2z}{dt^2}&=Z+\frac{D_1}{k_1}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{D_2}{k_2}\frac{\partial w}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\quad (l)$$

Zugleich ist

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}&=0,\\ \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}&=0,\end{aligned}\right\}\quad (m)$$

wenn wir voraussetzen, dass u und w die Zeit t nicht entwickelt enthalten, also die Kurve eine feste sei.

Aus (l) und (m) folgt sofort:

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt}\right)=X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}, \qquad \text{(n)}$$

welche Gleichung, in Verbindung mit

$$u=0,\ w=0 \qquad \text{(p)}$$

die Grössen x, y, z als Funktionen von t bestimmt.

Dann ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{D_1}{k_1}&=(m\frac{d^2x}{dt^2}-X)\frac{\partial w}{\partial y}-(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y)\frac{\partial w}{\partial x},\\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{D_2}{k_2}&=-(m\frac{d^2x}{dt^2}-X)\frac{\partial u}{\partial y}+(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y)\frac{\partial u}{\partial x},\end{aligned}\right\} \qquad \text{(q)}$$

woraus D_1, D_2 folgen. Die letzte (l) würde liefern

$$(m\frac{d^2z}{dt^2}-Z)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+(m\frac{d^2x}{dt^2}-X)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$
$$+(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0,$$

welche Gleichung wegen (m) und (n) identisch erfüllt ist.

Den Druck auf die Kurve kann man aus D_1 und D_2 bestimmen, oder aber auch, wie aus (l) sofort hervorgeht, beachten dass dessen Seitenkräfte

$$m\frac{d^2x}{dt^2}-X,\ m\frac{d^2y}{dt^2}-Y,\ m\frac{d^2z}{dt^2}-Z \qquad \text{(r)}$$

sind, wodurch er sich vollkommen bestimmen lässt.

Die aus X, Y, Z Resultirende ist die einzige wirksame Kraft. Wir zerlegen dieselbe in zwei, von denen die eine nach der Tangente an die Kurve gerichtet, die andere auf dieser Tangente senkrecht stehen soll. Die erstere ist

$$X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}, \qquad \text{(s)}$$

wenn s der Bogen der Kurve; diess ist aber nach (n)

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dt}\right)\frac{dt}{ds}=\tfrac{1}{2}m\frac{dv^2}{dt}\frac{dt}{ds},$$

wenn v die Geschwindigkeit. Da aber

$$v=\frac{ds}{dt},\quad v\frac{dt}{ds}=1,$$

so ist also jene Seitenkraft

$$=m\frac{dv}{dt}=m\frac{d^2s}{dt^2}. \qquad \text{(t)}$$

Dabei war in (s) die Tangente nach der Richtung des wachsenden Bogens gezogen, so dass wenn jener Ausdruck positiv ausfällt, die Seitenkraft den Punkt nach der Richtung des wachsenden Bogens treibt. Diesen Bogen nehmen wir als mit der

Zeit wachsend an, so dass v positiv ist; fällt dann (t) positiv aus, so treibt die Seitenkraft den Punkt nach der Richtung des mit der Zeit wachsenden Bogens

Was die zweite Seitenkraft betrifft, so sei sie $= R$ und die Richtung derselben durch die Winkel α, β, γ bestimmt. Alsdann ist

$$X = m\frac{dv}{dt}\frac{dx}{ds} + R\cos\alpha,\quad Y = m\frac{dv}{dt}\frac{dy}{ds} + R\cos\beta,\ Z = m\frac{dv}{dt}\frac{dz}{ds} + R\cos\gamma,$$

woraus R sich der Grösse und Richtung nach vollkommen bestimmen lässt.*

Man hat

$$R\cos\alpha = X - m\frac{dv}{dt}\frac{dx}{ds},\quad R\cos\beta = Y - m\frac{dv}{dt}\frac{dy}{ds},$$

$$R\cos\gamma = Z - m\frac{dv}{dt}\frac{dz}{ds}. \tag{u}$$

Die Seitenkräfte des Zwanges auf den Punkt sind die (r); also sind die des Druckes auf die Kurve:

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2},\quad Y - m\frac{d^2y}{dt^2},\quad Z - m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Wegen (u) ist aber

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2} = R\cos\alpha + m\frac{dv}{dt}\frac{dx}{ds} - m\frac{d^2x}{dt^2} = R\cos\alpha + m\left(\frac{d^2s}{dt^2}\frac{dx}{ds} - \frac{d^2x}{dt^2}\right)$$

$$= R\cos\alpha + m\left(\frac{d^2s}{dt^2}\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\frac{ds}{dt}\right)\frac{dt}{ds} = R\cos\alpha - m\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right)\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{dt}{ds}$$

$$= R\cos\alpha - mv^2\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{ds}\right)\frac{dt}{ds} = R\cos\alpha - mv^2\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right) = R\cos\alpha - mv^2\frac{d^2x}{ds^2},$$

und eben so

$$Y - m\frac{d^2y}{dt^2} = R\cos\beta - mv^2\frac{d^2y}{ds^2},\quad Z - m\frac{d^2z}{dt^2} = R\cos\gamma - mv^2\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Bezeichnet man die Winkel, welche der Halbmesser erster Krümmung ϱ mit den Koordinatenaxen macht, wobei die Richtung von ϱ geht vom Krümmungsmittelpunkt gegen den Kurvenpunkt, durch α', β', γ', so ist bekanntlich

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{\cos\alpha'}{\varrho},\quad \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{\cos\beta'}{\varrho},\quad \frac{d^2z}{ds^2} = -\frac{\cos\gamma'}{\varrho},$$

wo ϱ immer positiv gerechnet ist. Demnach sind die Seitenkräfte des Gesammtdrucks auf die Kurve

$$R\cos\alpha + \frac{mv^2}{\varrho}\cos\alpha',\ R\cos\beta + \frac{mv^2}{\varrho}\cos\beta',\ R\cos\gamma + \frac{mv^2}{\varrho}\cos\gamma'.$$

---

* Dass die Resultirende von X, Y, Z, die Kraft R und die Kraft $m\frac{dv}{dt}$ in derselben Ebene liegen, und dass die letzten zwei Kräfte auf einander senkrecht stehen, ergibt sich aus diesen Gleichungen unmittelbar.

Daraus folgt, dass dieser Druck die Resultirende ist aus R (der Seitenkraft der wirksamen Kraft, zerlegt senkrecht zur Kurve, wenn die andere Seitenkraft nach der Richtung der Tangente genommen ist) und einer Kraft $\frac{m v^2}{\varrho}$, gerichtet vom Krümmungsmittelpunkt gegen die Kurve (also auf der hohlen Seite gegen die Kurve drückend). Letztere ist die so genannte Zentrifugalkraft. *

§. 2.

Bewegung des Schwerpunkts des Systems.

I. Die Gleichungen (13) sind der Anzahl nach 3n ($r = 1, 2, \ldots n$); werden dieselben addirt und heisst man die Summen der zweiten Seiten λ, μ, ν, so hat man

$$\sum_1^n {}_r m_r \frac{d^2 x_r}{dt^2} = \lambda, \quad \sum_1^n {}_r m_r \frac{d^2 y_r}{dt^2} = \mu, \quad \sum_1^n {}_r m_r \frac{d^2 z_r}{dt^2} = \nu. \qquad (14)$$

Die Kräfte λ, μ, ν sind die Seitenkräfte einer Kraft, die man erhalten würde, wenn man die sämmtlichen Kräfte des Systems nach ihrer Stärke und Richtung in denselben Punkt verlegte und zusammensetzte. Demnach fallen in den (14) diejenigen Kräfte weg, die zu je zwei gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind, also alle innern Kräfte (§. 1, II).

Sind ξ, η, ζ die Koordinaten des Schwerpunkts des Systems zur Zeit t, so ist

$$\Sigma m_r x_r = \xi M, \quad \Sigma m_r y_r = \eta M, \quad \Sigma m_r z_r = \zeta M,$$

wo M die Masse des Systems, d. h. die Grösse Σm_r ist. Demnach sind die (14):

$$M \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \lambda, \quad M \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \mu, \quad M \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \nu. \qquad (14')$$

Hieraus ergibt sich, dass der Schwerpunkt des Systems sich so bewegt, als wenn die sämmtlichen Kräfte, nach Stärke und Richtung, an ihm angebracht, und ebenfalls alle Massenpunkte des Systems in ihm vereinigt wären.

Dabei kann man also von den innern Kräften ganz absehen. Drucke auf Flächen, in so ferne letztere nicht zum Systeme gehören, fallen aber nicht weg. Eben so verhält es sich mit der Reibung.

II. Kommen in dem Systeme ausser den äussern Kräften keine andern vor als solche die sich zu je zwei aufheben (innere Wirkungen, Spannungen, aber keine Drucke auf Flächen, keine Reibung u. s. w.), so kommen in (14') nur die äussern Kräfte vor.

---

* Im Zustand der Ruhe, unter dem Einfluss der wirksamen Kraft, wäre R der Druck, wo dann allerdings die (t) Null sein muss. Die Zentrifugalkraft entsteht also bei der Bewegung. Doch ist diese Art der Erklärung nicht geeignet, das Wesen der Sache klar zu machen.

Kann man dann λ, μ, ν finden, ohne die Bewegung jedes einzelnen Punktes zu kennen, so kann man auch die Bewegung des Schwerpunkts unabhängig ermitteln.

Letzteres ist selbstverständlich nicht der Fall, wenn gezwungene Bewegungen in dem Systeme vorkommen, da dann die Drucke nicht bekannt sein können. Der oben ausgesprochene Satz wird also nur bei ganz freien Systemen von Nutzen sein. Richtig ist er freilich immer.

Erhaltung der Bewegung des Schwerpunkts.

III. Sind λ, μ, ν Null, was der Fall ist wenn nur innere Kräfte wirksam sind, aber auch, wenn die äussern — in einen Punkt verlegt — sich aufheben, so folgt aus **(14')**:

$$\xi = a_1 + b_1 t, \quad \eta = a_2 + b_2 t, \quad \zeta = a_3 + b_3 t. \tag{15}$$

In diesem Falle bewegt sich also der Schwerpunkt in gerader Linie und gleichförmig; oder auch gar nicht, wenn er anfänglich in Ruhe war und keine Geschwindigkeit erhielt.

Ist also ein System in Ruhe und es werden in ihm bloss innere Kräfte rege, vermöge welcher die einzelnen Punkte sich zu bewegen anfangen, so bleibt der Schwerpunkt in Ruhe. Hat dagegen das System eine Bewegung und es hören plötzlich alle äussern Kräfte auf, auf dasselbe zu wirken, so dass bloss noch innere Kräfte thätig sind, so wird von da an der Schwerpunkt sich in gerader Linie bewegen und zwar nach der Tangente an die Kurve, die er vorher beschrieben und mit der Geschwindigkeit, die er im fraglichen Augenblicke besass.

Sind bei einem freien Systeme alle äussern Kräfte verschwunden, d. h. λ, μ, ν Null, so werden die Konstanten in (15) aus den Anfangswerthen von

$$\xi, \eta, \zeta, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$$

sich ermitteln lassen. Nun sind die Anfangswerthe von

$$\xi, \eta, \zeta \text{ gleich denen von } \frac{1}{M}\Sigma m_r x_r, \frac{1}{M}\Sigma m_r y_r, \frac{1}{M}\Sigma m_r z_r,$$

$$\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt} \text{ gleich denen von } \frac{1}{M}\Sigma m_r \frac{dx_r}{dt}, \frac{1}{M}\Sigma m_r \frac{dy_r}{dt}, \frac{1}{M}\Sigma m_r \frac{dz_r}{dt}.$$

Demnach hat man, wenn wir diese Anfangswerthe durch Anhängen des Zeigers 0 bezeichnen:

$$\xi = \xi_0 + t\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0, \quad \eta = \eta_0 + t\left(\frac{d\eta}{dt}\right)_0, \quad \zeta = \zeta_0 + t\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0. \tag{15'}$$

Hieraus ergibt sich, dass auch bei der alleinigen Wirkung innerer Kräfte der Schwerpunkt nur dann in Ruhe bleibt, wenn die Anfangsgeschwindigkeiten den Gleichungen

$$\Sigma m_r \frac{dx_r}{dt} = 0, \quad \Sigma m_r \frac{dy_r}{dt} = 0, \quad \Sigma m_r \frac{dz_r}{dt} = 0 \tag{a}$$

entsprechen. Diess Alles gilt aber nur von einem ganz freien Systeme, da sonst die λ, μ, ν nicht Null sind.

Wenn wir also oben sagten, es bleibe der Schwerpunkt in Ruhe, so ist diess so zu verstehen, dass den einzelnen Punkten entweder keine Anfangsgeschwindigkeiten beigelegt werden, oder doch nur solche, die den (a) genügen. Bei einem freien System, das innere Schwingungen macht, ohne sich fortzubewegen, muss hiernach dieser Fall eintreten, sonst wird es sich nothwendig bewegen. — Diess Alles liegt aber auch in dem oben allgemein ausgesprochenen Satze von der Weiterbewegung des Schwerpunkts, wenn die äussern Kräfte unthätig werden.

IV. Die Geschwindigkeit des Schwerpunkts zur Zeit t ist gegeben durch die Gleichungen

$$M\frac{d\xi}{dt} = \Sigma m_r \frac{dx_r}{dt}, \quad M\frac{d\eta}{dt} = \Sigma m_r \frac{dy_r}{dt}, \quad M\frac{d\zeta}{dt} = \Sigma m_r \frac{dz_r}{dt}. \qquad \text{(b)}$$

Ist v_r die Geschwindigkeit von m_r, so nennt man zuweilen $m_r v_r$ die Bewegungsgrösse von m_r. Würde man diese wie eine Kraft behandeln können, so wären die zweiten Seiten in (b) die Seitenkräfte derselben. Daraus folgt, dass die Geschwindigkeit des Schwerpunkts gleich ist der Resultirenden aller Bewegungsgrössen des Systems, dieselben in ihn verlegt, dividirt durch die Masse. — Doch legen wir diesem Satze keine besondere Bedeutung bei.

Besondere Fälle.

V. Besteht ein System, auf das nur innere Kräfte wirken, aus zwei Theilen, von denen der eine eine fortschreitende Bewegung nach einer Seite hin annimmt, in Folge der Wirkung der innern Kräfte (ohne Anfangsgeschwindigkeiten nach der Bemerkung zu III), so muss der andere Theil sich nach der entgegengesetzten Seite hin bewegen, damit der Schwerpunkt in Ruhe bleibe.

So beim Abfeuern eines Geschützes bewegt sich das Geschütz in einer Richtung, welche der Richtung der bewegten Kugel entgegengesetzt ist. Diess gilt natürlich nur so lange, als Geschütz und Kugel ein System bilden. Hat die Kugel das Geschütz verlassen, so wirken auf beide besondere Kräfte ein, und es bewegen dieselben sich nach besondern Gesetzen; ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt, wenn man von demselben sprechen will, bleibt also nicht in Ruhe. Immerhin freilich würde der allgemeine Satz in I von ihm gelten; doch ist es sicher von keinem Werthe, dessen Bewegung zu untersuchen.

Wird ein Schiff im Wasser durch Ruder bewegt und man betrachtet Schiff und Wasser als ein System, so bleibt, da hier nur innere Kräfte in Thätigkeit sind, der gemeinschaftliche Schwerpunkt in Ruhe; wird aber das Schiff als ein für sich bestehendes System behandelt, so ist der Druck des Wassers gegen das Ruder eine äussere Kraft, und der Schwerpunkt des Schiffes bewegt sich nach dem in I angeführten Satze.

§. 3.

Prinzip der Flächen.

I. Aus den Gleichungen (1) zieht man wie in §. 2:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma m_r\left(x_r\frac{d^2y_r}{dt^2}-y_r\frac{d^2x_r}{dt^2}\right)&=\Sigma(x_rY_r-y_rX_r),\\
\Sigma m_r\left(z_r\frac{d^2x_r}{dt^2}-x_r\frac{d^2z_r}{dt^2}\right)&=\Sigma(z_rX_r-x_rZ_r),\\
\Sigma m_r\left(y_r\frac{d^2z_r}{dt^2}-z_r\frac{d^2y_r}{dt^2}\right)&=\Sigma(y_rZ_r-z_rY_r),
\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

worin natürlich X_r, Y_r, Z_r die Seitenkräfte der Resultirenden aller auf m_r wirkenden Kräfte bedeuten, und die Summirung sich auf alle Punkte des Systems erstreckt.

In den zweiten Seiten der (16) fallen nun alle Kräfte weg, die zu je zwei gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind. Denn greifen in den Punkten m_r, m_s die zwei Kräfte P an, so ist der davon in der Summe

$$\Sigma(x_rY_r-y_rX_r)$$

herrührende Theil, wenn ϱ die Entfernung:

$$x_rP\frac{y_s-y_r}{\varrho}-y_rP\frac{x_s-x_r}{\varrho}+x_sP\frac{y_r-y_s}{\varrho}-y_sP\frac{x_r-x_s}{\varrho}=0.$$

Aber es fallen auch diejenigen Kräfte für sich aus, für die

$$x_rY_r=y_rX_r,\quad z_rX_r=x_rZ_r,\quad y_rZ_r=z_rY_r,$$

d. h.

$$X_r:Y_r:Z_r=x_r:y_r:z_r.$$

Diess fordert, dass die Kraft deren Seitenkräfte X_r, Y_r, Z_r sind, nach dem Anfangspunkt der Koordinaten gerichtet ist.

Demnach sind in (16) nicht zu beachten: alle innern Kräfte (zu je zwei gleich und entgegengesetzt gerichtet), so wie diejenigen, deren Richtung durch den Koordinatenanfang geht.

Geht die Richtung der vorhin benannten Kraft bloss durch die x Axe, so ist auch bloss

$$y_rZ_r=z_rY_r$$

u. s. w.

II. Die (16) lassen sich auch in folgender Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Sigma m_r\left(x_r\frac{dy_r}{dt}-y_r\frac{dx_r}{dt}\right)&=\Sigma(x_rY_r-y_rX_r),\\
\frac{d}{dt}\Sigma m_r\left(z_r\frac{dx_r}{dt}-x_r\frac{dz_r}{dt}\right)&=\Sigma(z_rX_r-x_rZ_r),\\
\frac{d}{dt}\Sigma m_r\left(y_r\frac{dz_r}{dt}-z_r\frac{dy_r}{dt}\right)&=\Sigma(y_rZ_r-z_rY_r).
\end{aligned}\right\}\quad(16')$$

Hieraus folgt sofort:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma m_r\left(x_r\frac{dy_r}{dt}-y_r\frac{dx_r}{dt}\right)&=\int\Sigma(x_rY_r-y_rX_r)\,dt+C_1\,,\\
\Sigma m_r\left(z_r\frac{dx_r}{dt}-x_r\frac{dz_r}{dt}\right)&=\int\Sigma(z_rX_r-x_rZ_r)\,dt+C_2\,,\\
\Sigma m_r\left(y_r\frac{dz_r}{dt}-z_r\frac{dy_r}{dt}\right)&=\int\Sigma(y_rZ_r-z_rY_r)\,dt+C_3\,,
\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

wenn C_1, C_2, C_3 Konstanten sind. Dabei ist natürlich vorausgesetzt, dass die zweiten Seiten in (16′) stetige Funktionen von t seien und als solche auch ausgedrückt werden, wenn man die Integration ausführen will.

Wir wollen nun vom Anfangspunkt der Koordinaten auf den Punkt m_r (dessen Koordinaten zur Zeit t sind x_r, y_r, z_r) einen Fahrstrahl gezogen denken. Denselben wollen wir auf die Ebene der xy projiziren und R_r dessen immer positive Projektion nennen; ω_r sei der Winkel, den diese Projektion mit der x Axe macht, wobei derselbe von der (positiven) x Axe gegen die (positive) y Axe gezählt ist. Alsdann hat man

$$x_r=R_r\cos\omega_r\,,\quad y_r=R_r\sin\omega_r\,,\ x_r\frac{dy_r}{dt}-y_r\frac{dx_r}{dt}=R_r^2\frac{d\omega_r}{dt}\,,$$

und es fällt hiernach diese Grösse positiv aus, wenn ω_r wächst mit t, negativ wenn ω_r abnimmt mit wachsendem t. Demnach ist die erste (17)

$$\Sigma m_r R_r^2\frac{d\omega_r}{dt}=\int\Sigma(x_rY_r-y_rX_r)\,dt+C_1\,,$$

$$\Sigma m_r\int R_r^2\frac{d\omega_r}{dt}\,dt=\iint\Sigma(x_rY_r-y_rX_r)\,dt^2+C_1t+E_1\,.$$

Die Projektion R_r bewegt sich auf der Ebene der xy und beschreibt dort eine Fläche, deren Differentialquotient $\frac{1}{2}R_r^2\frac{d\omega_r}{dt}$ ist. Diess ist übrigens, wenn wir die Fläche immer als positiv betrachten, nur richtig wenn $\frac{d\omega_r}{dt}>0$; sehen wir aber die beschriebene Fläche als positiv oder negativ an, je nachdem R_r rechtläufig (im Sinne wachsender ω_r) oder rückläufig (im Sinne y gegen x) ist, so stellt

$$\int_\alpha^\beta\tfrac{1}{2}R_r^2\frac{d\omega_r}{dt}\,dt$$

den von der Zeit α bis zur Zeit β ($>\alpha$) von der Projektion R_r beschriebenen Flächenraum vor, und derselbe ist die algebraische Summe aller beschriebenen Flächenelemente. (Dabei ist durchaus nicht nöthig, dass wenn etwa ω_r mehrere Male denselben Werth erhalten sollte, auch R_r jeweils denselben Werth annehme; R_r und ω_r sind als Funktionen von t gedacht).

Beginnt man mit der Zeit τ (die ganz wohl 0 sein kann), so heisst die erste (17)

$$\Sigma m_r\left(x_r\frac{dy_r}{dt}-y_r\frac{dx_r}{dt}\right)=\int_\tau^{t}\Sigma(x_rY_r-y_rX_r)\,dt+C_1\,,$$

wo C_1 der Werth der ersten Seite für $t = \tau$ ist. Daraus dann

$$\Sigma m_r \int_\tau R_r^2 \frac{d\omega_r}{dt} dt = \int_\tau^t dt \int_\tau^t \Sigma (x_r Y_r - y_r X_r) dt + C_1 (t - \tau).$$

Aus dieser Gleichung und den übrigen (17) schliesst man nun den folgenden Satz:

Während der Zeit von τ bis t haben die Projektionen der Fahrstrahlen der n einzelnen Massenpunkte auf die drei Koordinatenebenen gewisse Flächen durchlaufen, deren Elemente positiv sein sollen

auf der Ebene der x y, wenn die Bewegung von x gegen y geht,
" " " " z x, " " " " z " x ",
" " " " y z, " " " " y " z ",

negativ im umgekehrten Falle. Nennt man die von den Projektionen des nach m_r gerichteten Fahrstrahls beschriebenen Flächen F_r (Ebene der x y), G_r (Ebene der z x), H_r (Ebene der y z), so ist

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m_r F_r &= \tfrac{1}{2} \int_\tau^t dt \int_\tau^t \Sigma (x_r Y_r - y_r X_r) dt + C_1 (t - \tau), \\ \Sigma m_r G_r &= \tfrac{1}{2} \int_\tau^t dt \int_\tau^t \Sigma (z_r X_r - x_r Z_r) dt + C_2 (t - \tau), \\ \Sigma m_r H_r &= \tfrac{1}{2} \int_\tau^t dt \int_\tau^t \Sigma (y_r Z_r - z_r Y_r) dt + C_3 (t - \tau). \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Dabei können F_r u. s. w. auch negativ ausfallen.

III. Es ist selbstverständlich, dass die in (18) ausgesprochenen Sätze für jede durch den Koordinatenanfang gehende Ebene gelten, da man jede ja z. B. zur Ebene der x y machen kann.

Doch lassen sich leicht die hieher gehörigen Formeln aufstellen. Seien durch den Anfang die drei Axen der x, y, z wie oben gelegt, durch denselben die neuen Axen der x', y', z' (wo die x' y' Ebene die fragliche weitere Ebene sein soll). Alsdann ist bekanntlich, wenn man mit X', Y', Z' die Seitenkräfte nach den neuen Axen bezeichnet (vergl. §. 8, I):

$$\begin{aligned} x' &= a_1 x + a_2 y + a_3 z, & X' &= a_1 X + a_2 Y + a_3 Z, \\ y' &= b_1 x + b_2 y + b_3 z, & Y' &= b_1 X + b_2 Y + b_3 Z, \\ z' &= c_1 x + c_2 y + c_3 z, & Z' &= c_1 X + c_2 Y + c_3 Z. \end{aligned}$$

Daraus

$$\begin{aligned} x_r' Y_r' - y_r' X_r' &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)(x Y - y X) + (a_3 b_1 - a_1 b_3)(z X - x Z) \\ &\quad + (a_2 b_3 - a_3 b_2)(y Z - z Y) \\ &= c_3 (x Y - y X) + c_2 (z X - x Z) + c_1 (y Z - z Y), \end{aligned}$$

und eben so

$$\begin{aligned} x_r' \frac{d y_r'}{dt} - y_r' \frac{d x_r'}{dt} &= c_3 \left(x_r \frac{d y_r}{dt} - y_r \frac{d x_r}{dt} \right) + c_2 \left(z_r \frac{d x_r}{dt} - x_r \frac{d z_r}{dt} \right) \\ &\quad + c_1 \left(y_r \frac{d z_r}{dt} - z_r \frac{d y_r}{dt} \right). \end{aligned}$$

Ist F_r' die F_r entsprechende Grösse für die neue Ebene der $x' y'$, so folgt aus letzterer Gleichung

$$F_r' = c_3 F_r + c_2 G_r + c_1 H_r.$$

Hiebei sind c_3, c_2, c_1 die Cosinus der Winkel, welche die (positive) Axe der z' mit den (positiven) Axen der z, y, x einschliesst, und es sind die Flächelemente in F_r' positiv, wenn die Drehung x' gegen y' geht. Ueberdiess müssen wir die neuen Axen so gelagert denken, dass wenn man sich in die (positive) z' Axe stellt, die Drehung x' gegen y' in demselben Sinne vor sich geht, wie für den in z Axe gestellten Zuschauer die Drehung x gegen y.

Demnach

$$\Sigma m_r F_r' = c_3 \Sigma m_r F_r + c_2 \Sigma m_r G_r + c_1 \Sigma m_r H_r,$$

$$\Sigma \int_\tau^t d t \int_\tau^t (x_r' Y_r' - y_r X_r') \, d t = c_3 \Sigma \int_\tau^t d t \int_\tau^t (x_r Y_r - y_r X_r) \, d t + \ldots .$$

Da aber allgemein sein muss

$$\Sigma m_r F_r' = \tfrac{1}{2} \int_\tau^t d t \int_\tau^t \Sigma (x_r' Y_r' - y_r' X_r') \, d t + E_1 (t - \tau),$$

so ist hieraus

$$E_1 = c_3 C_1 + c_2 C_2 + c_1 C_3,$$

oder wenn man mit α, β, γ die Winkel bezeichnet, welche die Senkrechte auf die neue Ebene mit den Axen der x, y, z macht; durch F_r' die Fläche, welche die Projektion des nach m_r gerichteten Fahrstrahls auf diese Ebene in der Zeit $t - \tau$ beschrieben hat, so ist

$$\begin{aligned} \Sigma m_r F_r' = {} & \tfrac{1}{2} \cos\gamma \int_\tau^t d t \int_\tau^t \Sigma (x_r Y_r - y_r X_r) \, d t + \tfrac{1}{2} \cos\beta \int_\tau^t d t \int_\tau^t \Sigma (z_r X_r - x_r Z_r) \, d t \\ & + \tfrac{1}{2} \cos\alpha \int_\tau^t d t \int_\tau^t \Sigma (y_r Z_r - z_r Y_r) \, d t + (C_1 \cos\gamma + C_2 \cos\beta + C_3 \cos\alpha)(t - \tau). \end{aligned} \quad (19)$$

Dabei sind die beschriebenen Flächenelemente positiv, wenn der projizirte Fahrstrahl, gesehen von Jemanden der sich in die Senkrechte gestellt hat, sich in demselben Sinne bewegt, wie er für den in die Axe der z Gestellten als rechtläufig erklärt wurde.

Unveränderliche Ebene.

IV. Sind die zweiten Seiten der (16') Null, so heisst (19):

$$\Sigma m_r F_r' = (C_1 \cos\gamma + C_2 \cos\beta + C_3 \cos\alpha)(t - \tau), \quad (20)$$

und es ist also die Summe erster Seite der Zeit proportional.

Bestimmen wir nun α, β, γ so dass die Grösse

$$C_1 \cos\gamma + C_2 \cos\beta + C_3 \cos\alpha$$

ein Maximum ist, so hat man, da noch

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1:$$

$$C_1 + k\cos\gamma = 0\,,\quad C_2 + k\cos\beta = 0\,.\quad C_3 + k\cos\alpha = 0\,,$$

also

$$\frac{\cos\alpha}{C_3} = \frac{\cos\beta}{C_2} = \frac{\cos\gamma}{C_1} = \frac{\pm 1}{\sqrt{C_1^{\,2}+C_2^{\,2}+C_3^{\,2}}}\,,$$

wo jedes der zwei Zeichen gelten kann, jedes aber dieselbe Ebene feststellt. Wählen wir also die durch die Gleichungen

$$\cos\alpha = \frac{C_3}{\sqrt{C_1^{\,2}+C_2^{\,2}+C_3^{\,2}}}\,,\ \cos\beta = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^{\,2}+C_2^{\,2}+C_3^{\,2}}}\,,\ \cos\gamma = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^{\,2}+C_2^{\,2}+C_3^{\,2}}} \tag{21}$$

festgestellte Ebene (Senkrechte auf die Ebene), so ist für sie

$$\Sigma m_r F_r' = (t-\tau)\sqrt{C_1^{\,2}+C_2^{\,2}+C_3^{\,2}}\,,$$

und für diese Ebene ist diese Summe zu jeder Zeit ein Maximum.

Kennt man für drei auf einander senkrechte, durch den Koordinatenanfang gehende Ebenen die Grössen $\Sigma m_r F_r'$, so kennt man, wenn man diese Ebenen zu Koordinatenebenen nimmt, die C_1, C_2, C_3, also dann auch die in (21) nöthigen Grössen.

Die durch (21) bestimmte Ebene ist zu aller Zeit unveränderlich und unbeweglich.

Sind α', β', γ' die Richtungswinkel für eine auf der unveränderlichen Ebene senkrechte Ebene, so ist wegen (21)

$$C_3\cos\alpha' + C_2\cos\beta' + C_1\cos\gamma' = 0.$$

Allein für diese Ebene ist nach (20)

$$\Sigma m_r F_r' = (C_3\cos\alpha' + C_2\cos\beta' + C_1\cos\gamma')(t-\tau),$$

d. h. also es ist für jede solche Ebene

$$\Sigma m_r F_r' = 0.$$

Wählt man also die so eben bestimmte unveränderliche Ebene zur Ebene der xy, so ist in (17)

$$\Sigma m_r\left(x_r\frac{dy_r}{dt} - y_r\frac{dx_r}{dt}\right) = C,\ \Sigma m_r\left(z_r\frac{dx_r}{dt} - x_r\frac{dz_r}{dt}\right) = 0,$$

$$\Sigma m_r\left(y_r\frac{dz_r}{dt} - z_r\frac{dy_r}{dt}\right) = 0, \tag{22}$$

Alles natürlich nur unter der Voraussetzung, dass die zweiten Seiten in (16') Null seien.

Doch liessen sich diese Sätze leicht verallgemeinern.

Freies System mit einem Punkte, der sich geradlinig und gleichförmig bewegt.

V. Gesetzt es gebe in dem System einen Punkt P, der sich gleichförmig und geradlinig bewegt, so dass also dessen Koordinaten ξ, η, ζ immer den Gleichungen

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=0,\ \frac{d^2\eta}{dt^2}=0,\ \frac{d^2\zeta}{dt^2}=0 \tag{a}$$

genügen, gleich viel nun, ob in dem Punkt Masse vorhanden ist oder nicht, so wollen wir setzen

$$x_r = \xi + x_r',\ y_r = \eta + y_r',\ z_r = \zeta + z_r', \tag{b}$$

wo also x_r', y_r', z_r' die Koordinaten von m_r zur Zeit t für ein mit dem ursprünglichen paralleles Koordinatensystem sind, dessen (beweglicher) Anfang **durch P geht. Dann ist nach (a):**

$$x_r\frac{d^2y_r}{dt^2}-y_r\frac{d^2x_r}{dt^2}=(\xi+x_r')\frac{d^2y_r'}{dt^2}-(\eta+y_r')\frac{d^2x_r'}{dt^2}=\xi\frac{d^2y_r'}{dt^2}-\eta\frac{d^2x_r'}{dt^2}+x_r'\frac{d^2y_r'}{dt^2}-y_r'\frac{d^2x_r'}{dt^2}$$

$$=\xi\frac{d^2y_r}{dt^2}-\eta\frac{d^2x_r}{dt^2}+x_r'\frac{d^2y_r'}{dt^2}-y_r'\frac{d^2x_r'}{dt^2},$$

$$\Sigma m_r\left(x_r\frac{d^2y_r}{dt^2}-y_r\frac{d^2x_r}{dt^2}\right)=\xi\Sigma m_r\frac{d^2y_r}{dt^2}-\eta\Sigma m_r\frac{d^2x_r}{dt^2}+\Sigma m_r\left(x_r'\frac{d^2y_r'}{dt^2}-y_r'\frac{d^2x_r'}{dt^2}\right).$$

Ist nun das System völlig frei, also bloss seinen innern Wirkungen unterworfen, so ist nach §. 2, III

$$\Sigma m_r\frac{d^2y_r}{dt^2}=0,\ \Sigma m_r\frac{d^2x_r}{dt^2}=0,$$

also

$$\Sigma m_r\left(x_r\frac{d^2y_r}{dt^2}-y_r\frac{d^2x_r}{dt^2}\right)=\Sigma m_r\left(x_r'\frac{d^2y_r'}{dt^2}-y_r'\frac{d^2x_r'}{dt^2}\right). \tag{23}$$

Ein Punkt, wie er hier verlangt wird, ist aber nach §. 2, III der Schwerpunkt des Systems, so dass also wenn man ihn als (beweglichen) Anfang wählt, die in IV aufgestellten Sätze noch gelten. Die „unveränderliche" Ebene geht jetzt beständig durch den Schwerpunkt und bleibt mit sich selbst parallel.

§. 4.

Feste Punkte eines beweglichen Systems.

Wir haben seither gewissermassen stillschweigend den Fall ausgeschlossen, da Punkte des (sonst beweglichen) Systems gewaltsam gezwungen **werden, zu aller Zeit ruhig d. h. fest zu bleiben.**

Für solche Punkte wäre in (13) die erste Seite Null und man hätte zu den „äussern" Kräften die äussere Gewalt — den Druck auf den betreffenden Punkt — zu rechnen.

Seien solche gezwungen ruhig bleibende Punkte durch den Zeiger ε bezeichnet, d. h. heisst einer derselben m_ε (wo m_ε seine Masse), so hat man **für ihn statt der (13):**

$$\left.\begin{aligned}
0 &= X_\varepsilon - \Sigma_s P_{\varepsilon,s} \frac{\partial \varrho_{\varepsilon,s}}{\partial x_\varepsilon} + \Sigma_\sigma S_\sigma \frac{\partial u_\sigma}{\partial x_\varepsilon} - \Xi_\varepsilon, \\
0 &= Y_\varepsilon - \Sigma_s P_{\varepsilon,s} \frac{\partial \varrho_{\varepsilon,s}}{\partial y_\varepsilon} + \Sigma_\sigma S_\sigma \frac{\partial u_\sigma}{\partial y_\varepsilon} - H_\varepsilon, \\
0 &= Z_\varepsilon - \Sigma_s P_{\varepsilon,s} \frac{\partial \varrho_{\varepsilon,s}}{\partial z_\varepsilon} + \Sigma_\sigma S_\sigma \frac{\partial u_\sigma}{\partial z_\varepsilon} - Z_\varepsilon,
\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

wo Ξ_ε, H_ε, Z_ε die Seitenkräfte des auf den Punkt ausgeübten Drucks sind. Dabei betrachten wir diese Seitenkräfte als positiv, wenn sie nach der Richtung der negativen Koordinatenaxen wirken.

Diese Gleichungen (24) sind mit den (13) zu verbinden, oder besser gesagt, sie sind in den (13) bereits enthalten, da wenn für alle Punkte die Bewegungsgleichungen in §. 1, IX aufgestellt wurden, die (24) schon von selbst erschienen. Doch mag es nicht unpassend sein, hier noch ganz besonders auf sie aufmerksam gemacht zu haben. Die neu eingeführten (unbekannten) Grössen Ξ, H, Z entsprechen den drei Bedingungen, dass x_ε, y_ε, z_ε unveränderlich seien, wie diess nach §. 1, III nothwendig ist. *

Durch Additionen, wie in §. 2 und §. 3 wird man die Grössen $\Sigma \Xi_\varepsilon$, ... finden, wo dann die innern Kräfte des Systems wegfallen; doch behalten wir uns das Nähere für späterhin vor. (Vergl. §. 7, III; §. 8, VIII).

Uebrigens würde man Gleichungen wie (24) auch erhalten, wenn ein Punkt gezwungen würde, sich beständig gleichförmig zu bewegen, da dann für ihn $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ konstant, also die ersten Seiten in (13) Null wären.

§. 5.

Umformung der allgemeinen Gleichungen.

I. In den allgemeinen Gleichungen (13) wollen wir für jetzt unter X_r, Y_r, Z_r die äussern und die durch gegenseitige Einwirkung entstandenen Kräfte verstehen, so dass dieselben bloss heissen:

$$\left.\begin{aligned}
m_r \frac{d^2 x_r}{dt^2} = X_r + \Sigma_\sigma S_\sigma \frac{\partial u_\sigma}{\partial x_r}, \quad m_r \frac{d^2 y_r}{dt^2} = Y_r + \Sigma_\sigma S_\sigma \frac{\partial u_\sigma}{\partial y_r}, \\
m_r \frac{d^2 z_r}{dt^2} = Z_r + \Sigma_\sigma S_\sigma \frac{\partial u_\sigma}{\partial z_r},
\end{aligned}\right\} \quad (25)$$

wo das Summirungszeichen Σ_σ sich ganz wohl auf alle Bedingungsgleichungen

$$u_1 = 0, \; u_2 = 0, \; \ldots\ldots, \; u_p = 0 \qquad (26)$$

beziehen kann, da wenn z. B. x_r in einer derselben nicht vorkommt, die Grösse

* Die Ξ, H, Z sind in Wahrheit drei Unbekannte, denn man kennt weder die Stärke, noch die Richtung des auf m_ε ausgeübten Druckes, was drei Unbekannten entspricht. Bei den D in §. 1, V verhält sich die Sache anders, da man dort die Richtung kennt.

$\frac{\partial u}{\partial x_r}$ von selbst Null ist. Die Anzahl dieser Bedingungsgleichungen sei p, wo natürlich $p < 3n$ sein muss. Daraus folgt sofort, dass nur $3n - p = k$ wirklich zu bestimmende Koordinaten übrig bleiben, dass also überhaupt k Grössen zu bestimmen sind.

Man kann sonach mittelst der (26) p der Koordinaten durch die k übrigen (und das etwa auch vorkommende t) ausdrücken, in die (25) einsetzen und wird dann die nöthigen Gleichungen zur Bestimmung der k Koordinaten und der p Werthe S erhalten. Oder man kann überhaupt k neue Grössen einführen, durch welche die 3n Koordinaten sich derart ausdrücken lassen, dass die (26) sämmtlich identisch erfüllt sind. Die Bestimmung dieser k Grössen geschieht dann, wie so eben gezeigt.

Hat man überhaupt bei der Untersuchung der Bewegung eines Systems erkannt, dass thatsächlich nur k Grössen ermittelt werden müssen, damit die Koordinaten aller Punkte (zur Zeit t) bekannt seien, und dass eine kleinere Zahl nicht hinreichen würde; weiss man überdiess, wie die Koordinaten durch diese k Grössen sich ausdrücken lassen, so ist ganz selbstverständlich, dass die Bedingungsgleichungen (26) erfüllt sind, da ja eben der Ausdruck der 3n Koordinaten durch die k Grössen nur dann richtig ist, wenn jene in der Natur der Aufgabe begründeten Bedingungsgleichungen erfüllt sind.

Allgemeine Auflösung.

II. Es kann nun aber sein, dass man es für die Rechnung nicht bequem findet, gerade nur die nöthigen k Grössen einzuführen, vielmehr deren h erhalten wollte, wo h natürlich grösser als k sein muss. Diesen Fall, als den allgemeinern, wollen wir durchführen. Der besondere oben betrachtete ergibt sich daraus, wenn man $h = k$ setzt.

Statt der 3n Koordinaten x_r, y_r, z_r führe man also die h neuen Veränderlichen

$$\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_h, \; h \overline{\overline{>}} 3n - p,$$

ein, mittelst der alle 3n so ausgedrückt werden, dass einige der Bedingungsgleichungen (26) identisch erfüllt sind (der Zahl nach $3n - h$).

Die so identisch erfüllten, also nicht weiter zu beachtenden Bedingungsgleichungen seien

$$u_1 = 0, \; u_2 = 0, \ldots\ldots u_\varrho = 0, \; (\varrho = 3n - h), \tag{26'}$$

während die nicht erfüllten, also zwischen den ξ noch bestehenden, seien

$$u_{\varrho+1} = 0, \; u_{\varrho+2} = 0, \; \ldots\ldots, \; u_p = 0, \tag{26''}$$

wo mithin, wenn $h = k$, $\varrho = p$ ist, also die (26″) gar nicht mehr vorhanden sind. Dadurch erscheinen in den (25) natürlich auch die S als Funktionen der ξ.

Denkt man sich die sämmtlichen Koordinaten durch die ξ ausgedrückt und ihre Werthe in (26') eingesetzt, so sind also — der Annahme nach — diese Gleichungen rein identisch. Daraus folgt, dass man dieselben nach irgend einer der darin noch vorkommenden Grössen ξ differenziren darf. Man hat also wenn e die Werthe 1 bis ϱ hat:

$$\sum_{r=1}^{r=n}\left(\frac{\partial u_e}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s}+\frac{\partial u_e}{\partial y_r}\frac{\partial y_r}{\partial \xi_s}+\frac{\partial u_e}{\partial z_r}\frac{\partial z_r}{\partial \xi_s}\right)=0, \qquad \text{(a)}$$

wo s irgend eine der Zahlen 1 bis h sein kann, so dass die (a) eine Anzahl von ϱ h Gleichungen vorstellt. *

Man multiplizire nun die erste (25) mit $\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s}$, die zweite mit $\frac{\partial y_r}{\partial \xi_s}$, die dritte mit $\frac{\partial z_r}{\partial \xi_s}$; setze nach einander $r = 1, 2, \ldots, n$ und addire alle so erhaltenen Gleichungen. Dadurch ergibt sich, wenn das Summenzeichen Σ_r auf $r = 1, 2, \ldots n$, das Σ_e auf $e = 1, 2, \ldots, p$ erstreckt wird:

$$\Sigma_r m_r\left(\frac{d^2 x_r}{dt^2}\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s}+\frac{d^2 y_r}{dt^2}\frac{\partial y_r}{\partial \xi_s}+\frac{d^2 z_r}{dt^2}\frac{\partial z_r}{\partial \xi_s}\right)=\Sigma_r\left(X_r\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s}+Y_r\frac{\partial y_r}{\partial \xi_s}+Z_r\frac{\partial z_r}{\partial \xi_s}\right)$$
$$+\Sigma_r\Sigma_e S_e\left(\frac{\partial u_e}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s}+\frac{\partial u_e}{\partial y_r}\frac{\partial y_r}{\partial \xi_s}+\frac{\partial u_e}{\partial z_r}\frac{\partial z_r}{\partial \xi_s}\right).$$

Da nun letztere Summe auch gleich

$$\Sigma_e S_e \Sigma_r\left(\frac{\partial u_e}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s}+\frac{\partial u_e}{\partial y_r}\frac{\partial y_r}{\partial \xi_s}+\frac{\partial u_e}{\partial z_r}\frac{\partial z_r}{\partial \xi_s}\right);$$

ferner wegen (a) von $e = 1$ bis $e = \varrho$ die Glieder derselben Null sind; weiter allgemein

$$\frac{\partial u_e}{\partial \xi_s}=\Sigma_r\left(\frac{\partial u_e}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s}+\frac{\partial u_e}{\partial y_r}\frac{\partial y_r}{\partial \xi_s}+\frac{\partial u_e}{\partial z_r}\frac{\partial z_r}{\partial \xi_s}\right),$$

so ist dieselbe

$$\sum_{e=\varrho+1}^{e=p} S_e\frac{\partial u_e}{\partial \xi_s}.$$

Setzt man also noch

$$\sum_{r=1}^{r=n}\left(X_r\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s}+Y_r\frac{\partial y_r}{\partial \xi_s}+Z_r\frac{\partial z_r}{\partial \xi_s}\right)=Q_s, \qquad (27)$$

so hat man endlich

$$\sum_{r=1}^{r=n} m_r\left(\frac{d^2 x_r}{dt^2}\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s}+\frac{d^2 y_r}{dt^2}\frac{\partial y_r}{\partial \xi_s}+\frac{d^2 z_r}{dt^2}\frac{\partial z_r}{\partial \xi_s}\right)=Q_s+\sum_{e=\varrho+1}^{e=p} S_e\frac{\partial u_e}{\partial \xi_s}, \qquad (28)$$

wo $s = 1, 2, \ldots, h$, und noch die (26'') bestehen.

---

* Kommt in den (26) die Zeit entwickelt vor, so werden die Ausdrücke der Koordinaten durch die ξ dieselbe im Allgemeinen ebenfalls enthalten. Dann wäre eine Differenzirung (partiell) nach t ebenfalls gestattet. Doch bedürfen wir derselben hier nicht.

III. Die erste Seite in (28) lässt sich anders ausdrücken. Setzt man z. A.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varphi',$$

so ist

$$\frac{d^2 x_r}{dt^2}\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s} + \frac{d^2 y_r}{dt^2}\frac{\partial y_r}{\partial \xi_s} + \frac{d^2 z_r}{dt^2}\frac{\partial z_r}{\partial \xi_s} = \frac{d x_r'}{dt}\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s} + \frac{d y_r'}{dt}\frac{\partial y_r}{\partial \xi_s} + \frac{d z_r'}{dt}\frac{\partial z_r}{\partial \xi_s}. \tag{b}$$

Aber da x_r, y_r, z_r durch die ξ (nebst etwa noch t) ausgedrückt sind, hat man, wenn man eine der drei Grössen durch u bezeichnet:

$$u' = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \xi_1}\xi_1' + \ldots + \frac{\partial u}{\partial \xi_h}\xi_h',$$

woraus sofort folgt:

$$\frac{\partial u'}{\partial \xi_s'} = \frac{\partial u}{\partial \xi_s}, \tag{c}$$

indem u (d. h. x_r, y_r, z_r) kein ξ' enthalten wird. Ferner ist nun

$$\frac{\partial u'}{\partial \xi_s} = \frac{\partial}{\partial \xi_s}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial \xi_h}\xi_h'\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial \xi_s} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1\, \partial \xi_s}\xi_1' + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_h\, \partial \xi_s}\xi_h',$$

was ganz offenbar auf

$$\frac{\partial u'}{\partial \xi_s} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_s}\right) \tag{d}$$

hinausläuft. Daraus folgt in (b):

$$\frac{d^2 x_r}{dt^2}\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s} + \ldots = \frac{d x_r'}{dt}\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s} + \ldots = \frac{d}{dt}\left(x_r'\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s} + \ldots\right) - \left[x_r'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s}\right) + \ldots\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\left(x_r'\frac{\partial x_r'}{\partial \xi_s'} + \ldots\right) - \left[x_r'\frac{\partial x_r'}{\partial \xi_s} + \ldots\right]$$

d. h. gleich

$$\frac{d}{dt}\left(x_r'\frac{\partial x_r'}{\partial \xi_s'} + y_r'\frac{\partial y_r'}{\partial \xi_s'} + z_r'\frac{\partial z_r'}{\partial \xi_s'}\right) - \left[x_r'\frac{\partial x_r'}{\partial \xi_s} + y_r'\frac{\partial y_r'}{\partial \xi_s} + z_r'\frac{\partial z_r'}{\partial \xi_s}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \xi_s'}(x_r'^2 + y_r'^2 + z_r'^2) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \xi_s}(x_r'^2 + y_r'^2 + z_r'^2).$$

Setzt man also

$$\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{r=n} m_r\left[\left(\frac{dx_r}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_r}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_r}{dt}\right)^2\right] = T, \tag{29}$$

so heisst die (28)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_s} = Q_s + \Sigma_e S_e \frac{\partial u_e}{\partial \xi_s}, \tag{30}$$

wo das Summenzeichen Σ_e sich auf die (26'') erstreckt und $s = 1, 2, \ldots, h$ ist.

Die Grösse T ist die lebendige Kraft des Systems zur Zeit t (vergl. §. I, VIII), und ist durch ξ, ξ' (nebst etwa noch t) ausgedrückt. Diese Grösse kann selbstverständlich immer zum Voraus berechnet werden, sobald man die Ausdrücke der Koordinaten durch die ξ kennt.

Besonderer Fall da h = k.

IV. Ist h = k (I), d. h. also hat man nur die durchaus nothwendige Zahl der Grössen ξ eingeführt, und sind mithin alle Bedingungsgleichungen (26) identisch erfüllt, so hat man zur Bestimmung der Grössen

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$$

die Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_1} = Q_1, \ldots \ldots \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_k'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_k} = Q_k, \qquad (31)$$

wo T durch (29), die Q durch (27) gegeben sind.

Diese Gleichungen habe ich in meiner „Integration der partiellen Differentialgleichungen" (Stuttgart, Metzler, 1862) und zwar in §. 10, IV abgeleitet. Die ursprüngliche (wenn auch ganz anders geführte) Ableitung gehört Lagrange zu. (Mécanique analytique, IIIeme Edition, Tome I, pag. 290.)

Wir werden im Folgenden auf diese Formen fortwährend zurückkommen. Sie enthalten nur das durchaus Nothwendige.

Fall der Kräftefunktion (Potential).

V. Gesetzt es gebe eine Funktion V von t und den 3 n Koordinaten, die aber ausser diesen Grössen keine weitern Veränderlichen enthalte (also namentlich nicht die Geschwindigkeiten), so dass

$$X_r = \frac{\partial V}{\partial x_r}, \quad Y_r = \frac{\partial V}{\partial y_r}, \quad Z_r = \frac{\partial V}{\partial z_r}, \qquad (32)$$

so ist

$$Q_s = \Sigma_r \left(\frac{\partial V}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s} + \frac{\partial V}{\partial y_r}\frac{\partial y_r}{\partial \xi_s} + \frac{\partial V}{\partial z_r}\frac{\partial z_r}{\partial \xi_s}\right) = \frac{\partial V}{\partial \xi_s}, *$$

und es sind also die (31):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_1'}\right) - \frac{\partial (T+V)}{\partial \xi_1} = 0, \ldots \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_k'}\right) - \frac{\partial (T+V)}{\partial \xi_k} = 0. \qquad (33)$$

Da man — der Annahme nach — x_r, y_r, z_r in ξ (nebst t) kennt, so gibt (29) sofort

$$T \text{ in } \xi, \xi' \left(\text{wo } \xi' = \frac{d\xi}{dt}\right),$$

und es wird T die Grösse t entwickelt enthalten, wenn in den (26) auch t

---

* Enthielte V auch noch

$$\frac{dx_r}{dt}, \quad \frac{dy_r}{dt}, \quad \frac{dz_r}{dt},$$

so würden diese Grössen auch noch mit von ξ_s abhängen und es wäre

$$\frac{\partial V}{\partial \xi_s} = \Sigma\left(\frac{\partial V}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial \xi_s} + \frac{\partial V}{\partial y_r}\frac{\partial y_r}{\partial \xi_s} + \frac{\partial V}{\partial z_r}\frac{\partial z_r}{\partial \xi_s} + \frac{\partial V}{\partial x_r'}\frac{\partial x_r'}{\partial \xi_s} + \frac{\partial V}{\partial y_r'}\frac{\partial y_r'}{\partial \xi_s} + \frac{\partial V}{\partial z_r'}\frac{\partial z_r'}{\partial \xi_s}\right).$$

entwickelt vorkommt. Enthalten aber die (26) die Zeit nicht entwickelt, so kommt sie auch in T nicht in dieser Form vor. V darf nur von t und den 3n Koordinaten abhängig sein, und wird — wenn diese Koordinaten ersetzt sind — durch t und ξ ausgedrückt erscheinen (ohne ξ').

Die (33) habe ich in der oben erwähnten Schrift näher betrachtet, und führe die dortigen Ergebnisse, welche sich auf die Integration beziehen, hier einfach an, indem ich je auf die betreffenden Stellen jenes Buches hinweise. Für die hier verfolgten Zwecke kann man das Nachstehende füglich übergehen.

Andere Form der (33).

VI. Aus den k Gleichungen

$$\frac{\partial T}{\partial \xi_1'} = \zeta_1, \ldots\ldots, \frac{\partial T}{\partial \xi_k'} = \zeta_k \qquad (34)$$

bestimme man $\xi_1', \ldots, \xi_k'$ durch $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ (nebst $\xi_1, \ldots, \xi_k, t$) und führe diese Werthe in

$$T - \left(\xi_1' \frac{\partial T}{\partial \xi_1'} + \ldots + \xi_k' \frac{\partial T}{\partial \xi_k'}\right) \qquad (35)$$

ein, wodurch diese Grösse sich in U verwandle (abhängig von ζ, ξ, t). Man setze nun

$$\varphi = -(U + V), \qquad (36)$$

wo also φ nur $\zeta_1, \ldots, \zeta_k, \xi_1, \ldots, \xi_k, t$ enthält, so wird das System (33) ersetzt durch

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_1}, \quad \frac{d\xi_2}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_2}, \ldots\ldots, \frac{d\xi_k}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_k}; \\ \frac{d\zeta_1}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}, \quad \frac{d\zeta_2}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2}, \ldots, \frac{d\zeta_k}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_k}. \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

Diese Umformung findet sich in §. 10, III der „Integration der partiellen Differentialgleichungen".

Die (37) haben die **kanonische Form**, wie sie Jacobi und Hamilton in die analytische Mechanik eingeführt.

Uebrigens kann man die (31) ebenfalls unter eine Form bringen, welche der (37) entspricht.

Benützt man wieder die (34) und hat U denselben Werth wie oben, so ist nach §. 10, III des angeführten Buches

$$\frac{\partial T}{\partial \xi_s} = \frac{\partial U}{\partial \xi_s}, \quad \frac{d\xi_s}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \zeta_s}.$$

Demnach sind die (31), wenn man (34) beachtet:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \zeta_1}, \quad \frac{d\xi_2}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \zeta_2}, \ldots\ldots \frac{d\xi_k}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \zeta_k}, \\ \frac{d\zeta_1}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \xi_1} + Q_1, \quad \frac{d\zeta_2}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \xi_2} + Q_2, \ldots\ldots \frac{d\zeta_k}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \xi_k} + Q_k. \end{aligned}\right\} \qquad (37')$$

wo natürlich in U und Q die Grössen ξ' durch ζ (und ξ, t) ersetzt sind.

Ist $Q_s = \frac{\partial V}{\partial \xi_s}$ und man setzt $U = -\varphi - V$, so erhält man unmittelbar die (37). (Für den später betrachteten Fall, da T kein t enthält, ist $U = -T$).

Wir bemerken hiebei gelegentlich, dass wenn die Aufgabe, die ξ als Fnnktionen der Zeit t zu finden, vollständig erledigt ist, wo natürlich also auch die x, y, z als solche Funktionen bekannt sind, die (13) die Werthe der S_0 liefern werden, also die Drucke, Spannungen u. s. w. (§. 1, VI). Doch wäre dabei der Ausdruck der P als bekannt vorausgesetzt.

Integration der (37).

VII. Es enthalte φ in (37) die Zeit t entwickelt. Alsdann setze man an die Stelle von $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \zeta_1}, \ldots, \frac{\partial \zeta}{\partial \zeta_k}$$

und sei Φ die so aus φ entstehende Grösse. Hierauf bilde man die partielle Differentialgleichung

$$\Phi + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0, \tag{38}$$

und sei

$$\zeta = f \tag{38'}$$

eine Auflösung derselben, wo f eine Funktion von $\xi_1, \ldots, \xi_k$, t mit den k willkürlichen Konstanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ ist, von denen jedoch keine bloss addirt wird, welche Funktion also — an die Stelle von ζ gesetzt — der (38) identisch Genüge leisten muss. Alsdann sind die Integralgleichungen von (37):

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial \xi_1} = \zeta_1, \ \frac{\partial f}{\partial \xi_2} = \zeta_2, \ldots, \ \frac{\partial f}{\partial \xi_k} = \zeta_k; \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \ \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \ldots, \ \frac{\partial f}{\partial \alpha_k} = \beta_k, \end{array}\right\} \tag{39}$$

wo $\beta_1, \ldots, \beta_k$ weitere k willkürliche Konstanten. Der Beweis dieser Behauptung ist in §. 9, V des angeführten Buches enthalten.

Mit Berücksichtigung der (34) sind hiernach die Integralgleichungen der (33):

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial \xi_1} = \frac{\partial T}{\partial \xi_1'}, \ \frac{\partial f}{\partial \xi_2} = \frac{\partial T}{\partial \xi_2'}, \ldots, \ \frac{\partial f}{\partial \xi_k} = \frac{\partial T}{\partial \xi_k'}; \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \ \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \ldots, \ \frac{\partial f}{\partial \alpha_k} = \beta_k, \end{array}\right\} \tag{39'}$$

von denen die letzten k für sich die Aufgabe lösen, die andern dann zur Kontrole und etwaigen Ermittlung der willkürlichen Konstanten dienen.

VIII. Enthält φ die Zeit t nicht entwickelt, so bilde man die partielle Differentialgleichung

$$\Phi + a = 0, \tag{40}$$

wo a eine willkürliche Konstante, und sei wieder

$$\zeta = f \tag{38'}$$

eine Auflösung derselben, wo f eine Funktion von $\xi_1, \ldots, \xi_k$ mit den k—1 willkürlichen Konstanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ (keine bloss addirt) ist. Alsdann sind die Integralgleichungen von (37):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial \xi_1} = \zeta_1, \ldots\ldots, \frac{\partial f}{\partial \xi_{k-1}} = \zeta_{k-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi_k} = \zeta_k; \\ &\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \ldots\ldots, \frac{\partial f}{\partial \alpha_{k-1}} = \beta_{k-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial a} + t = \beta_k. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

wo $\beta_1, \ldots, \beta_k$ abermals k willkürliche Konstanten. Der Beweis ist in §. 9, VI. des angeführten Buches enthalten.

Die Integralgleichungen von (33) sind also

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial \xi_1} = \frac{\partial T}{\partial \xi_1'}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi_{k-1}} = \frac{\partial T}{\partial \xi'_{k-1}}, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi_k} = \frac{\partial T}{\partial \xi_k'}; \\ &\frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \ldots\ldots, \frac{\partial f}{\partial \alpha_{k-1}} = \beta_{k-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial a} + t = \beta_k. \end{aligned}\right\} \tag{41'}$$

Fall, da T die Zeit nicht entwickelt enthält.

IX. In diesem Falle ist T nothwendig eine homogene Funktion der ξ', da

$$\frac{d x_r}{d t} = \frac{\partial x_r}{\partial \xi_1} \xi_1' + \ldots + \frac{\partial x_r}{\partial \xi_k} \xi_k'.$$

u. s. w.

Demnach ist (da T homogen des zweiten Grades)

$$\frac{\partial T}{\partial \xi_1'} \xi_1' + \ldots + \frac{\partial T}{\partial \xi_k'} \xi_k' = 2T,$$

und also U der Werth von — T, wenn man darin die ξ' nach (34) ersetzt. Desshalb ist auch $\varphi = T - V$, wenn man hierin eben so verfährt.

Schlussbemerkung.

X. In den X, Y, Z, wie sie in (27) auftreten, sind die innern Kräfte ebenfalls enthalten, wie diess bereits zu den (25) bemerkt wurde. Wählen wir für $P_{r,s}$ den Ausdruck (7′) des §. 1, so ist das auf den Punkt m_r bezügliche Glied von V, das die innern Kräfte liefert, offenbar

$$- m_r \Sigma_s m_s \int f(\varrho_{r,s}) \, \partial \varrho_{r,s},$$

da dieses nach x_r differenzirt die Grösse

$$- m_r \Sigma m_s f(\varrho_{r,s}) \frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial x_r}$$

liefert. Dabei ist das Summenzeichen Σ_s auf alle Punkte des Systems zu erstrecken. Doch ist der Theil von V, der alle innern Kräfte liefert, nicht

$$-\Sigma m_r \Sigma m_s \int f(\varrho_{r,s})\, \partial \varrho_{r,s},$$

sondern nur

$$-\frac{1}{2} \Sigma m_r \Sigma m_s \int f(\varrho_{r,s})\, \partial \varrho_{r,s},$$

da sonst jedes einzelne Glied zwei mal vorkäme.

§. 6.

Trägheitsmomente bei starren Körpern.

I. Wir nennen ein System materieller Punkte einen **starren Körper**, wenn die sämmtlichen Punkte desselben in unveränderlichen Abständen von einander bleiben müssen. Ein solcher Körper wird also nur Bewegungen haben können, die allen Punkten gemeinschaftlich sind.

Durch einen Punkt, den wir als mit dem starren Körper fest verbunden denken (wenn er auch nicht gerade ein Massenpunkt des Körpers sein muss), legen wir drei rechtwinklige Koordinatenaxen, die ebenfalls mit dem Körper unveränderlich verbunden sind. Die Koordinaten des Punktes m_r sind x_r, y_r, z_r, welche Grössen natürlich von der Zeit nicht abhängen. Die drei Grössen

$$\Sigma m_r (y_r^2 + z_r^2), \quad \Sigma m_r (x_r^2 + z_r^2), \quad \Sigma m_r (x_r^2 + y_r^2), \tag{42}$$

wo das Summirungszeichen sich auf alle Massenpunkte des Körpers erstreckt, bezeichnen wir durch

$$A, B, C, \tag{42'}$$

und heissen sie die **Trägheitsmomente** des starren Körpers in Bezug auf die Axen der x, y, z. Dabei ist $y_r^2 + z_r^2$ das Quadrat des Abstandes des Punktes m_r von der x Axe u. s. w.

Ziehen wir überhaupt durch den Koordinatenanfang eine beliebige Gerade, und ist R_r der Abstand des Punktes m_r von ihr (gemessen durch die von m_r auf die Gerade gefällte Senkrechte), so stellt

$$\Sigma m_r R_r^2 \tag{a}$$

das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf diese Gerade vor.

Macht diese Gerade mit den Axen die Winkel α, β γ (dieselben für die eine ihrer zwei entgegengesetzten Richtungen gewählt), so ist

$$\pm (x_r \cos\alpha + y_r \cos\beta + z_r \cos\gamma)$$

die Länge der Projektion des nach m_r gerichteten Fahrstrahls auf die Gerade, und folglich

$$R_r^2 = x_r^2 + y_r^2 + z_r^2 - (x \cos\alpha + y_r \cos\beta + z_3 \cos\gamma)^2,$$

so dass

$$\Sigma m_r R_r^2 = \sin^2\alpha\, \Sigma m_r x_r^2 + \sin^2\beta\, \Sigma m_r^4 y_r + \sin^2\gamma\, \Sigma m_r z_r^2 - 2\cos\alpha\cos\beta\, \Sigma m_r x_r y_r$$
$$- 2\cos\alpha\cos\gamma\, \Sigma m_r x_r z_r - 2\cos\beta\cos\gamma\, \Sigma m_r y_r z_r.$$

Da aber wegen

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1:$$

$$\sin^2\alpha = \cos^2\beta + \cos^2\gamma,\ \sin^2\beta = \cos^2\alpha + \cos^2\gamma,\ \sin^2\gamma = \cos^2\alpha + \cos^2\beta,$$

so ist wenn

$$\Sigma m_r x_r y_r = D,\ \Sigma m_r x_r z_r = E,\ \Sigma m_r y_r z_r = F: \tag{b}$$

$$\Sigma m_r R_r^2 = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma - 2D\cos\alpha\cos\beta - 2E\cos\alpha\cos\gamma$$
$$- 2F\cos\beta\cos\gamma. \tag{c}$$

Zentralellipsoid. Hauptaxen.

II. Wir wollen auf der Geraden, die wir so eben zogen, vom Anfangspunkte aus eine Länge auftragen

$$= \frac{1}{\sqrt{\Sigma m_r R_r^2}} = \varrho$$

(und zwar nach der Richtung hin, nach der α, β, γ gerechnet sind). Alsdann sind die Koordinaten des Endpunkts dieser Länge

$$\varrho\cos\alpha,\ \varrho\cos\beta,\ \varrho\cos\gamma$$

und wenn dieselben ξ, η, ζ heissen, so ist

$$\cos\alpha = \frac{\xi}{\varrho},\quad \cos\beta = \frac{\eta}{\varrho},\quad \cos\gamma = \frac{\zeta}{\varrho};\ \varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

Dadurch wird aus (c):

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{A\xi^2}{\varrho^2} + \frac{B\eta^2}{\varrho^2} + \frac{C\zeta^2}{\varrho^2} - \frac{2D\xi\eta}{\varrho^2} - \frac{2E\xi\zeta}{\varrho^2} - \frac{2F\eta\zeta}{\varrho^2},$$

d. h.

$$1 = A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - 2D\xi\eta - 2E\xi\zeta - 2F\eta\zeta. \tag{43}$$

Dieser Gleichung genügen mithin die Koordinaten des Endpunkts. Da diess nun richtig bleibt für alle möglichen Geraden, wenn man nur für jede dieselbe Konstruktion macht (d. h. die Länge

$$\frac{1}{\sqrt{\Sigma m_r R_r^2}},$$

die ihr entspricht, auf ihr aufträgt), so liegen also die Endpunkte aller solcher Längen in der durch (43) ausgedrückten Fläche zweiten Grades. Da dieselbe eine Fläche mit Mittelpunkt (der Koordinatenanfang) ist, der Fahrstrahl ϱ aber immer endlich bleibt, so ist sie ein Ellipsoid.

Zieht man in dem Ellipsoide (43) vom Mittelpunkte aus irgend einen Fahrstrahl an die Oberfläche und ist ϱ dessen Länge, so ist hiernach $\frac{1}{\varrho^2}$

das Trägheitsmoment des Körpers für die mit diesem Fahrstrahl zusammenfallende Gerade.* — Das Ellipsoid (43) heisst das Zentralellipsoid.

Das Ellipsoid hat drei auf einander senkrechte Hauptaxen. Wählt man dieselben zu Koordinatenaxen, so fallen in (43) die drei letzten Glieder weg, und die Gleichung des Ellipsoids heisst bloss

$$\mathfrak{A} x^2 + \mathfrak{B} y^2 + \mathfrak{C} z^2 = 1. \tag{44}$$

Die jetzigen Koordinatenaxen heissen die Hauptaxen für den betreffenden Punkt; die drei Trägheitsmomente $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, die diesen Hauptaxen zugehören, werden eben so die Hauptträgheitsmomente genannt.

Wählt man also die drei durch den Koordinatenanfang gehenden Hauptaxen (die immer bestehen) zu Koordinatenaxen, so hat man

$$\Sigma m_r (y_r^2 + z_r^2) = \mathfrak{A}, \quad \Sigma m_r (x_r^2 + z_r^2) = \mathfrak{B}, \quad \Sigma m_r (x_r^2 + y_r^2) = \mathfrak{C},$$
$$\Sigma m_r x_r y_r = 0, \quad \Sigma m_r x_r z_r = 0, \quad \Sigma m_r y_r z_r = 0. \tag{45}$$

Die grösste der drei Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ stellt überhaupt das grösste Trägheitsmoment, die kleinste auch das kleinste des Körpers dar für alle durch den fraglichen Punkt gehenden Geraden.**

Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, so ist das Zentralellipsoid ein Umdrehungsellipsoid mit der Axe der z als Rotationsaxe. Alsdann ist jede Gerade, die durch den Koordinatenanfang geht und auf der z Axe senkrecht steht, eine Hauptaxe (d. h. eine zweite auf ihr und der z Axe senkrechte Gerade liefert mit den beiden andern ein System von drei Hauptaxen).

Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, so ist (44) eine Kugel, und jeder Durchmesser ist eine Hauptaxe.

---

* Natürlich ist es gleichgiltig, nach welcher der zwei möglichen Richtungen eine Gerade gezogen ist, wenn es sich nur um das Trägheitsmoment handelt. Wirklich sind auch die zwei entgegengesetzt gerichteten Fahrstrahlen gleich.

** Die Längen der drei Hauptaxen des Ellipsoids sind

$$\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{A}}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{B}}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{C}}}.$$

Die grösste dieser Hauptaxen ist überhaupt der längste Fahrstrahl, die kleinste der kürzeste, wie aus der Theorie des Ellipsoids bekannt ist. Ist also

$$\mathfrak{A} > \mathfrak{B} > \mathfrak{C},$$

so ist $\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{A}}}$ der kleinste Fahrstrahl; ist ϱ irgend ein anderer, so hat man

$$\frac{1}{\mathfrak{A}} < \varrho^2, \quad \mathfrak{A} > \frac{1}{\varrho^2}.$$

Da $\frac{1}{\varrho^2}$ das dem Fahrstrahl ϱ entsprechende Trägheitsmoment, so ist also hiernach $\mathfrak{A}$ das grösste aller Trägheitsmomente. Ganz eben so ist $\mathfrak{C}$ das kleinste.

Dabei ist zu beachten, dass dem grössten Trägheitsmoment die kleinste Hauptaxe, dem kleinsten Trägheitsmoment die grösste Hauptaxe des Zentralellipsoids zugehört.

III. Sind die anfänglichen Axen so gewählt, dass

$$\Sigma m_r x_r z_r = 0, \quad \Sigma m_r x_r y_r = 0, \tag{d}$$

so ist die x Axe eine der Hauptaxen. Denn dann ist die (43)

$$1 = A x^2 + B y^2 + C z^2 - 2 F y z,$$

woraus sofort folgt, dass die x Axe bereits eine der Hauptaxen des Ellipsoids ist. Natürlich würde für

$$\Sigma m_r x_r y_r = 0, \quad \Sigma m_r y_r z_r = 0 \tag{e}$$

bereits die y Axe, und für

$$\Sigma m_r x_r z_r = 0, \quad \Sigma m_r y_r z_r = 0 \tag{f}$$

bereits die z Axe Hauptaxe sein.

Besondere Gattung symmetrischer Körper.

IV. Angenommen es seien die Massenpunkte eines starren Körpers so gelagert, dass wenn man durch die z Axe irgend eine Ebene senkrecht legt, zu jedem Massenpunkt dieser Ebene, dem die Koordinaten x_r, y_r zugehören, sich drei andere in derselben Ebene angeben lassen, denen die Koordinaten

$$x_r, -y_r; \; -x_r, y_r; \; -x_r, -y_r$$

zugehören und welche dieselbe Masse mit dem ersten haben. Alsdann sind die Grössen

$$\Sigma m_r x_r z_r, \quad \Sigma m_r y_r z_r, \quad \Sigma m_r x_r y_r$$

offenbar alle Null. Denn für die zwei esten sind die Glieder, welche jedem einzelnen z_r entsprechen, da zu jedem x_r auch ein $-x_r$ gehört, und eben so zu jedem y_r ein $-y_r$ mit demselben m_r, schon für sich Null; in der dritten ist die Summe der $m_r x_r y_r$ für jede durch die z Axe gelegte Ebene Null, weil man immer zu einem x_r, y_r ein x_r, $-y_r$ erhalten kann mit gleichem m_r.

Demnach sind die Koordinatenaxen Hauptaxen.

Einer Anordnung, wie die hier betrachtete, entspricht die äussere Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds, überhaupt eines Körpers, dessen Querschnitte Rechtecke sind, deren Mittelpunkt auf der z Axe sich befindet und deren Seiten parallel laufen. Die vier Punkte, von denen die Rede war, bilden ein Rechteck. **Ist dasselbe ein Quadrat, so ist noch**

$$\Sigma m_r (x_r^2 + z_r^2) = \Sigma m_r (y_r^2 + z_r^2),$$

also (44) ein Rotationsellipsoid.

Dasselbe ist der Fall, wenn in derselben Ebene (senkrecht zur z Axe) sich vier andere Punkte finden, deren Massen denen der frühern gleich sind, und die ebenfalls ein Rechteck derselben Art bilden, dessen Seiten aber — gegenüber dem frühern — vertauscht sind. (Der Mittelpunkt des Rechtecks auf der z Axe, die Seiten parallel den x und y Axen, jedoch so dass die der x Axe parallele Seite gleich ist der des frühern Rechtecks, dessen Seite parallel der y Axe war u. s. w.) Einer solchen Anordnung kann der durch Rotation einer Kurve um die z Axe entstandene Körper entsprechen und wird hieher gehören, wenn er gleichartig (homogen) ist.

Ueberhaupt gehören hieher Körper, die aus gleichartigen Ringen bestehen, deren Mittelpunkt sich auf der z Axe befindet und deren Ebene senkrecht auf dieser Axe steht. In allen den betrachteten Fällen liegt der Schwerpunkt des Körpers auf der z Axe und es ist gleichgiltig, wo auf ihr der Koordinatenanfang genommen wird.

Besteht der Körper aus gleichartigen Kugelschalen, die alle den Koordinatenanfang zum Mittelpunkt haben, so ist offenbar

$$\Sigma m_r x_r y_r = 0, \quad \Sigma m_r x_r z_r = 0, \quad \Sigma m_r y_r z_r = 0,$$

wie diess schon aus dem Obigen hervorgeht. Zu dem ist noch

$$\Sigma m_r (x_r^2 + y_r^2) = \Sigma m_r (x_r^2 + z_r^2) = \Sigma m_r (y_r^2 + z_r^2),$$

also die drei Hauptträgheitselemente gleich. Der Schwerpunkt fällt in den Koordinatenanfang.

Es ist in diesen Fällen die z Axe für alle Punkte, die in ihr liegen, eine Hauptaxe. Man kann sich nun die Frage stellen ob überhaupt eine Gerade, die für einen Punkt, der in ihr liegt, eine Hauptaxe ist, es auch noch für die übrigen Punkte, durch die sie geht, sein werde, oder wenn diess nicht allgemein der Fall ist, unter welcher Bedingung?

Sei die Gerade z Axe und für einen bestimmten Punkt in ihr Hauptaxe. Wählen wir denselben zum Koordinatenanfang, so ist nach III (f) jedenfalls

$$\Sigma m x z = 0, \quad \Sigma m y z = 0.$$

Verlegen wir nun die x und y Axen parallel mit sich selbst in einen Punkt der z Axe, und sind x', y', z' die neuen Koordinaten, so ist

$$z = z' + c, \quad x = x', \quad y = y'.$$

Sollte nun die z Axe immer noch Hauptaxe sein, so müsste auch

$$\Sigma m x' z' = 0, \quad \Sigma m y' z' = 0$$

sein, d. h.

$$\Sigma m x (z - c) = 0, \quad \Sigma m y (z - c) = 0,$$

oder wegen obiger Gleichungen:

$$\Sigma m x = 0, \quad \Sigma m y = 0.$$

Diese Gleichungen sagen aber aus, dass die z Axe durch den Schwerpunkt gehen muss. Nur dann ist sie also überall Hauptaxe. (Vergl. VI.)

Reduktion der Trägheitsmomente. Hauptaxen durch den Schwerpunkt.

V. Wir wollen künftig die Hauptträgheitsmomente eines starren Körpers für die durch seinen Schwerpunkt gehenden Hauptaxen durch

$$\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H} \tag{46}$$

bezeichnen. Aus diesen wollen wir das Trägheitsmoment für irgend eine Gerade, die durch einen bestimmten Punkt geht, berechnen.

Seien α, β, γ die Winkel, welche diese Gerade mit den Axen der drei Momente (46) macht; ferner sei ϱ der Abstand der Geraden vom Schwerpunkte.

Man wähle in der Geraden einen Punkt P, dessen Koordinaten in Bezug auf die Hauptaxen durch den Schwerpunkt seien ξ, η, ζ (die x Axe gehört zum Trägheitsmoment $\mathfrak{F}$ u. s. w.). Durch P lege man Axen, die mit den eben genannten parallel sind. Sind nun x', y', z' die Koordinaten eines beliebigen Punktes des Körpers für die neuen; x, y, z für die alten Axen, so ist

$$x' = x - \xi, \quad y' = y - \eta, \quad z' = z - \zeta.$$

Sind ferner A, B, C die Trägheitsmomente des Körpers für die neuen Axen, so ist

$$A = \Sigma m (y'^2 + z'^2) = \Sigma m [(y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2] = \Sigma m (y^2 + z^2) - 2\eta \Sigma m y - 2\zeta \Sigma m z$$
$$+ (\eta^2 + \zeta^2) \Sigma m.$$

oder da

$$\Sigma m (y^2 + z^2) = \mathfrak{F}; \quad \Sigma m y = 0, \quad \Sigma m z = 0,$$

weil der frühere Koordinatenanfang Schwerpunkt ist;

$$\Sigma m = M,$$

wenn M die Masse des Körpers: so ist

$$A = \mathfrak{F} + (\eta^2 + \zeta^2) M, \quad B = \mathfrak{G} + (\xi^2 + \zeta^2) M, \quad C = \mathfrak{H} + (\xi^2 + \eta^2)$$

Ferner ist

$$\Sigma m x' y' = \Sigma m (x - \xi)(y - \eta) = \Sigma m x y - \xi \Sigma m y - \eta \Sigma m x + \xi \eta \Sigma m,$$

d. h. da

$$\Sigma m x y = 0,$$

weil die frühern Axen Hauptaxen sind, so ist

$$\Sigma m x' y' = \xi \eta M, \quad \Sigma m x' z' = \xi \zeta M, \quad \Sigma m y' z' = \eta \zeta M.$$

Das Zentralellipsoid für den Punkt P ist hiernach [aus (43)]:

$$1 = [\mathfrak{F} + (\zeta^2 + \eta^2) M] x'^2 + [\mathfrak{G} + (\xi^2 + \zeta^2) M] y'^2 + [\mathfrak{H} + (\xi^2 + \eta^2) M] z'^2$$
$$- 2\xi\eta M x' y' - 2\xi\zeta M x' z' - 2\eta\zeta M y' z', \qquad (g)$$

wenn seine Koordinatenaxen die durch P gelegten Axen sind.

Die Gerade, die wir in Betracht genommen, macht mit diesen Axen die Winkel α, β, γ; zieht man sie in dem Ellipsoid (g), so ist die Länge des entsprechenden Fahrstrahls k gegeben durch

$$\frac{1}{k^2} = [\mathfrak{F} + (\zeta^2 + \eta^2) M] \cos^2 \alpha + [\mathfrak{G} + (\xi^2 + \zeta^2) M] \cos^2 \beta + [\mathfrak{H} + (\xi^2 + \eta^2) M] \cos^2 \gamma$$
$$- 2\xi\eta M \cos\alpha \cos\beta - 2\xi\zeta M \cos\alpha \cos\gamma - 2\eta\zeta \cos\beta \cos\gamma$$
$$= \mathfrak{F} \cos^2\alpha + \mathfrak{G} \cos^2\beta + \mathfrak{H} \cos^2\gamma + M [\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - (\xi \cos\alpha + \eta \cos\beta + \zeta \cos\eta)^2].$$

Die Grösse

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - (\xi \cos\alpha + \eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma)^2$$

ist aber das Quadrat des Abstands des Punktes P von einer durch den Schwerpunkt mit unserer Geraden parallel gezogenen, also auch umgekehrt der Abstand des Schwerpunkts von der Geraden, d. h. ϱ^2; ferner ist (II) $\frac{1}{k^2}$ das gesuchte Trägheitsmoment, so dass wir folgenden Satz erhalten:

Sind $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ die Trägheitsmomente für die durch den Schwerpunkt eines starren Körpers gehenden Hauptaxen, so ist das Trägheitsmoment für irgend eine Gerade, deren Richtung mit diesen Axen die Winkel α, β, γ macht, und deren Abstand vom Schwerpunkte ϱ ist, gleich

$$\mathfrak{F} \cos^2\alpha + \mathfrak{G} \cos^2\beta + \mathfrak{H} \cos^2\gamma + M\varrho^2,$$

wo M die Masse des Körpers.

Fälle, da die Hauptaxen für einen Punkt parallel sind mit den durch den Schwerpunkt gehenden.

VI. Es ergibt sich aus der Formel (g) ganz unmittelbar, dass die durch den Punkt P gehenden Hauptaxen im Allgemeinen nicht parallel sind mit den durch den Schwerpunkt gehenden. Denn sonst müsste die (g) nur die Quadrate von x', y', z' enthalten, was aber so lange nicht der Fall, als die Grössen ξ, η. ζ von Null verschieden sind.

Eben hieraus leiten sich aber auch die Fälle ab, in denen die Hauptaxen durch P parallel sind mit denen durch den Schwerpunkt, die wir hier vollständig aufzählen wollen.

1) Ist $\xi = 0$, liegt also der Punkt P in der Ebene der yz (der Axen, denen die Trägheitsmomente $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ zugehören), so bleibt in (g) nur das Glied mit y' z' stehen. Also ist jetzt die neue x Axe eine Hauptaxe, d. h. die durch P gehende und auf der yz Ebene senkrecht stehende Gerade ist für diesen Punkt eine der Hauptaxen.

2) Ist $\eta = 0$, d. h. liegt der Punkt P in der Ebene der xz ($\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{H}$), so ist die neue y Axe eine Hauptaxe für P, d. h. die durch ihn gehende auf der xz Ebene senkrechte Gerade.

3) Ist $\zeta = 0$, so ist eben so die durch P gehende, auf der xy Ebene senkreckt stehende Gerade eine Hauptaxe für P, welcher Punkt in der xy Ebene liegt.

4) Sind $\xi = 0$, $\eta = 0$, d. h. liegt P in der z Axe, so fallen in (g) alle Produkte weg, und es sind also die Hauptaxen für P mit denen für den Schwerpunkt parallel.

5) Sind $\xi = 0$, $\zeta = 0$, d. h. liegt P in der y Axe, so gilt dasselbe wie in 4.

6) Sind $\eta = 0$, $\zeta = 0$, d. h. liegt P in der x Axe, so hat man ebenfalls dasselbe Ergebniss. (Vergl. Schluss von IV.)

Gleiche Trägheitsmomente.

VII. Wir wollen uns schliesslich die Frage stellen, wann das Ellipsoid (g) eine Kugel werden kann, in welchem Falle dann die sämmtlichen Trägheitsmomente für P gleich werden (II). Alsdann muss

$$\mathfrak{F} + (\zeta^2 + \eta^2)M = \mathfrak{G} + (\xi^2 + \zeta^2)M = \mathfrak{H} + (\eta^2 + \xi^2)M, \quad \xi\eta = 0, \quad \xi\zeta = 0, \quad \eta\zeta = 0$$

sein. Die letzten drei verlangen

$$\xi = 0, \ \eta = 0, \ \text{oder} \ \xi = 0, \ \zeta = 0, \ \text{oder} \ \eta = 0, \ \zeta = 0,$$

also dass jedenfalls der Punkt auf einer der drei durch den Schwerpunkt gehenden Hauptaxen liege — die Fälle 4—6 in VI.

Für den Fall 4 wäre dann $\mathfrak{F} - \zeta^2 M = \mathfrak{G} + \zeta^2 M = \mathfrak{H}$, $(\mathfrak{F} = \mathfrak{G})$;

„ „ „ 5 „ „ $\mathfrak{F} + \eta^2 M = \mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \eta^2 M$, $(\mathfrak{F} = \mathfrak{H})$;

„ „ „ 6 „ „ $\mathfrak{F} = \mathfrak{G} + \xi^2 M = \mathfrak{H} + \xi^2 M$, $(\mathfrak{G} = \mathfrak{H})$.

Daraus folgt, dass nothwendig zwei der drei Grössen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ einander gleich sein müssen, dass aber auch diese gleichen nothwendig kleiner sein müssen als die dritte. Alsdann liegt der Punkt auf der Axe dieses dritten (ungleichen und grössern Trägheitsmomentes) und zwar in einer Entfernung vom Schwerpunkte gleich der Quadratwurzel aus dem durch die Masse dividirten Unterschiede des ungleichen und grössern Hauptträgheitsmomentes für den Schwerpunkt und des einen der zwei gleichen. Solcher Punkte gibt es folglich nur zwei.

Ist $\mathfrak{F} = \mathfrak{G} = \mathfrak{H}$, so sind die Trägheitsmomente für den Schwerpunkt gleich; dann ist aber $\xi = \eta = \zeta = 0$, d. h. es gibt ausser dem Schwerpunkte keinen andern Punkt des Körpers mehr, der in dieser Lage ist.

§. 7.

Rotation eines starren Körpers um eine feste Axe.

I. Die feste Axe sei die der z. Denken wir uns mit dem starren Körper unveränderlich verbunden zwei Axen der x′, y′, senkrecht auf der z Axe, mit demselben Koordinatenanfang wie die Axen der x, y, z. Sind alsdann x′, y′, z die Koordinaten eines Punktes des Körpers für die mit dem Körper fest verbundenen Axen der x′, y′, z; x, y, z die desselben Punktes für die Axen, welche im Raume feststehen; ist ferner ω der Winkel, den die (bewegliche) x′ Axe mit der (unveränderlichen) x Axe macht, dieser Winkel in dem Drehungssinne x gegen y gezählt: * so hat man immer

$$x = x' \cos\omega - y' \sin\omega, \quad y = y' \cos\omega + x' \sin\omega, \qquad \text{(a)}$$

---

* D. h. so dass man sich von der (positiven) x Axe gegen die (positive) y Axe durch den Winkel von 90° bewegt. Dabei verstehen wir immer nur die positiven Richtungen, wenn wir kurzweg von der x Axe u. s. w. sprechen.

und da z ohnehin fest ist, so kennt man somit die Lage jedes Punktes, wenn ω bekannt ist. In §. 5, IV ist also $k = 1$, $\xi = \omega$. Dann

$$T = \tfrac{1}{2} \Sigma m \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = \tfrac{1}{2} \Sigma m [(-x' \sin\omega - y' \cos\omega)^2$$

$$+ (-y' \sin\omega + x' \cos\omega)^2] \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 = \tfrac{1}{2} C \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2, \; C = \Sigma m (x'^2 + y'^2), \; (\text{§. 6, I}); \; T = \tfrac{1}{2} C \omega'^2.$$

$$Q\,(\text{§. 5, II}) = \Sigma \left(X \frac{\partial x}{\partial \omega} + Y \frac{\partial y}{\partial \omega}\right) = \Sigma (Y x - X y).$$

Also die (31)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \omega} = Q,$$

d. h.

$$C \frac{d^2 \omega}{dt^2} = \Sigma (x Y - y X). \tag{47}$$

In dieser Gleichung fallen ohnehin alle innern Kräfte weg; dann aber auch alle, die nach der festen Axe gerichtet sind. (§. 3, I).

Sind X, Y als Funktionen der Koordinaten x, y gegeben, so benützt man (a), um aus (47) ω zu erhalten, also die Aufgabe zu lösen.

Dabei ist dann $\frac{d\omega}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit zur Zeit t, d. h. wenn die Bewegung während der Zeiteinheit genau dieselbe bleiben würde, wie sie zur Zeit t war, so würde ω um $\frac{d\omega}{dt}$ zunehmen.

Kräftefunktion.

II. Ist (§. 5, V)

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y},$$

wo V nur x, y, t enthält, so ist

$$C \frac{d^2 \omega}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial \omega} \tag{47'}$$

die Gleichung der Bewegung.

Nach den Vorschriften in §. 5, VI ist also

$$C \omega' = \zeta_1, \quad \omega' = \frac{\zeta_1}{C};$$

$$T - \omega' \frac{\partial T}{\partial \omega'} = \tfrac{1}{2} C \omega'^2 - C \omega'^2 = -\tfrac{1}{2} C \omega'^2 = -\tfrac{1}{2} \frac{\zeta_1^2}{C}; \quad \varphi = -V + \tfrac{1}{2} \frac{\zeta_1^2}{C}.$$

Also die (37):

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_1}, \quad \frac{d\zeta_1}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \omega}. * \tag{b}$$

---

* D. h. $\frac{d\omega}{dt} = \frac{\zeta_1}{C}$, $\frac{d\zeta_1}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \omega}$, was unmittelbar wieder zu (47') führt.

Enthält nun V die Zeit t entwickelt (§. 5, VII), so hat man eine Auflösung von

$$-V + \frac{1}{2C}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \omega}\right)^2 + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \tag{c}$$

zu suchen, um (wenn man dieselbe mit ζ bezeichnet, wobei eine willkürliche Konstante α eingetreten sein muss) aus

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \omega} = C\omega', \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} = \beta \tag{d}$$

das allgemeine Integral von (47′) zu erhalten.

Ist V frei von t, so hat man (§. 5, VIII)

$$-V + \frac{1}{2C}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \omega}\right)^2 + a = 0 \tag{e}$$

ohne willkürliche Konstante aufzulösen, und es sind

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \omega} = C\omega', \quad \frac{\partial \zeta}{\partial a} + t = \beta \tag{f}$$

die Integralgleichungen von (47′). Aus (e) folgt aber

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \omega} = \pm\sqrt{2C(V-a)}, \quad \zeta = \pm\int\sqrt{2C(V-a)}\,\partial\omega\,. \tag{e'}$$

also sind die (f) d. h.

$$C\omega' = \pm\sqrt{2C(V-a)}, \quad t \mp C\int\frac{\partial\omega}{\sqrt{2C(V-a)}} = \beta \tag{f'}$$

die Integralgleichungen von (47′), die sich übrigens aus dieser Gleichung unmittelbar ableiten lassen. (Pendelbewegung.)

Druck auf die feste Axe.

III. Nach §. 4 sind in den Punkten, deren Koordinaten $x = 0$, $y = 0$ sind, Kräfte angebracht zu denken, deren Seitenkräfte Ξ, H, Z sind, und es sind die dortigen (24) für jeden dieser Punkte maassgebend.

Durch die Addition der sämmtlichen (13) und der (24) ergibt sich

$$\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X - \Sigma\Xi, \quad \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y - \Sigma H, \quad \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z - \Sigma Z, \tag{g}$$

da hier jedenfalls alle innern Kräfte wegfallen und die u nicht vorhanden sind (§. 2, I). Das Summenzeichen der ersten Seite und des ersten Gliedes der zweiten bezieht sich auf alle Punkte des Körpers; das des zweiten Gliedes der zweiten Seite auf alle Punkte der Axe.

Da die Kräfte Ξ parallel sind, so ist $\Sigma\Xi$ ihre Resultirende; Aehnliches gilt für ΣH, ΣZ.

Weiter ist aus (a)

$$\frac{dx}{dt} = -y\frac{d\omega}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = x\frac{d\omega}{dt}; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -x\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 - y\frac{d^2\omega}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -y\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + x\frac{d^2\omega}{dt^2};$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0;$$

also

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\Xi &= \Sigma X + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 \Sigma m x + \frac{d^2\omega}{dt^2}\Sigma m y; \\ \Sigma H &= \Sigma Y + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 \Sigma m y - \frac{d^2\omega}{dt^2}\Sigma m x; \\ \Sigma Z &= \Sigma Z. \end{aligned}\right\} \quad (h)$$

Dabei ist Z die Seitenkraft der auf einen Punkt m wirkenden Kraft nach der z Axe (der festen Rotationsaxe). Die Grösse $\Sigma \mathbf{Z}$ drückt also die Kraft aus, mit der die Axe in ihrer eigenen Richtung verschoben werden will.

Aus den (24) und (13) zieht man wie in §. 3, I:

$$\Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \Sigma(Xz - Zx) - \Sigma(\Xi z - \mathbf{Z}x),$$

$$\Sigma m\left(z\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \Sigma(Yz - Zy) - \Sigma(Hz - \mathbf{Z}y),$$

wo die Summenzeichen wie in (g) zu nehmen sind. Da aber

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0;$$

ferner im letzten Summenzeichen nur Punkte vorkommen, für die

$$x = y = 0,$$

so ist:

$$\Sigma\Xi z = \Sigma(Xz - Zx) - \Sigma m z\frac{d^2x}{dt^2},$$

$$\Sigma H z = \Sigma(Yz - Zy) - \Sigma m z\frac{d^2y}{dt^2};$$

d. h.

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\Xi z &= \Sigma(Xz - Zx) + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 \Sigma m x z + \frac{d^2\omega}{dt^2}\Sigma m y z, \\ \Sigma H z &= \Sigma(Yz - Zy) + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 \Sigma m y z - \frac{d^2\omega}{dt^2}\Sigma m x z. \end{aligned}\right\} \quad (i)$$

Greift die Resultirende $\Sigma\Xi$ in dem Punkte an, dessen z gleich z_1; die ΣH im Punkte $z = z_2$, so ist

$$z_1 \Sigma\Xi = \Sigma\Xi z, \quad z_2 \Sigma H = \Sigma H z, \qquad (k)$$

so dass die (h) und die (i) die vollständige Auflösung der Aufgabe enthalten.

Ist die Rotationsaxe eine der Hauptaxen,

so ist für sie

$$\Sigma m x' z = 0; \quad \Sigma m y' z = 0,$$

woraus wegen (a) unmittelbar folgt:

$$\Sigma m x z = 0, \quad \Sigma m y z = 0.$$

Alsdann fällt in (i) ω ganz weg.

Liegt dazu noch der Schwerpunkt in der Rotationsaxe,

so ist

$$\Sigma m x' = 0, \quad \Sigma m y' = 0, \quad \text{d. h.} \quad \Sigma m x = 0, \quad \Sigma m y = 0$$

und es ist jetzt der Druck auf die Axe ganz unabhängig von der Bewegung.

§. 8.

Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt.

I. Den festen Punkt wählen wir zum Koordinatenanfang und legen durch ihn ein rechtwinkliges Koordinatensystem, das völlig unbeweglich sei. Durch denselben Punkt legen wir ein zweites rechtwinkliges Koordinatensystem, das mit dem Körper unveränderlich verbunden sei, sich also mit demselben bewege. Dabei wollen wir sofort voraussetzen, dass dieses (bewegliche) Koordinatensystem das der drei durch den betreffenden Punkt gehenden Hauptaxen sei (§. 6, II). Wäre mehr als ein System von Hauptaxen möglich, so wollen wir eben ein bestimmtes davon annehmen (§. 6, II, IV).

Die Koordinaten eines Körperpunktes m für die ersten Axen seien x, y z (veränderlich mit der Zeit); die desselben Punktes für die zweiten x', y', z' (unveränderlich). Ist nun die Lage des beweglichen Koordinatensystems in Bezug auf das feststehende zur Zeit t bekannt, so kennt man auch die Lage jedes einzelnen Körperpunkts. Die Grössen ξ in §. 5, IV sind also diejenigen Grössen, die diese Lage feststellen. Dazu gehören bekanntlich drei Winkel φ, ψ, δ, mittelst der das zweite System folgendermassen aus dem ersten erhalten wird:

Von der (positiven) x Axe bewege man sich in dem Drehungssinne x gegen y um den Winkel ψ; die denselben schliessende Gerade (Strahl vom Anfangspunkt O aus, also nur halbe Gerade) sei OA, und also die x Axe zweite Seite dieses Winkels. In demselben Drehungssinne liege OB um 90° weiter. Die Ebene AOB (Ebenenausschnitt) drehe man um OA so, das OB sich der festen z Axe nähert, und es betrage diese Drehung den Winkel δ (man wolle beachten, dass der Sinn dieser Drehung derselbe ist, als wenn man den Ausschnitt xOy um die x Axe drehen würde im Sinne y gegen z). Die neue Lage von OB sei OB′ und OC die Lage der Senkrechten auf AOB′, die anfänglich mit der z Axe zusammenfiel. Nun drehe man AOB′ um OC im Sinne OA gegen OB′ um den Winkel φ. — Die neue Lage von OA ist die x' Axe, die von OB′ ist die y' Axe, und OC ist die z' Axe.

Dabei können die Winkel beliebige Werthe haben. Zugleich wolle man

bemerken, dass das neue und das alte Koordinatensystem zur Deckung gebracht werden können, also dass wenn z. B. Jemand in der y Axe steht und lässt die Ebene der z x im Sinne z gegen x sich drehen, diese Drehung ganz in derselben Richtung vor sich geht, als wenn Jemand von der y' Axe aus die Drehung z' gegen x' sieht. Die nachfolgenden Sätze setzen grösstentheils dieses Verhältniss wesentlich voraus, namentlich (48) und (52).

Diess angenommen hat man nun

$$\left.\begin{aligned} x &= x'(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\delta) + y'(-\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\delta) \\ &\quad + z'\sin\psi\sin\delta, \\ y &= x'(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\delta) + y'(-\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\delta) \\ &\quad + z'(-\cos\psi\sin\delta), \\ z &= x'\sin\varphi\sin\delta + y'\cos\varphi\sin\delta + z'\cos\delta, ^* \end{aligned}\right\} \quad (48)$$

was wir häufig kürzer durch

$$x = a_1 x' + b_1 y' + c_1 z', \; y = a_2 x' + b_2 y' + c_2 z', \; z = a_3 x' + b_3 y' + c_3 z' \quad (49)$$

bezeichnen wollen, wo die Werthe von $a_1, \ldots, c_3$ aus (48) sofort entnommen werden können.

Zwischen diesen Grössen gelten nun die nachfolgenden Beziehungen, die entweder unmittelbar, oder mittelst der (48) leicht nachgewiesen werden können.

$$\left.\begin{aligned} &a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1, \; a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1, \; a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1, \\ &a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0, \; a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 = 0, \; a_2 a_3 + b_3 b_3 + c_2 c_3 = 0; \end{aligned}\right\} (50)$$

---

* Die Ableitung dieser wichtigen Beziehungen mag hier angedeutet werden. Wir stützen uns dabei auf folgenden Satz. Hat man ein zweiaxiges System der $\xi\,\eta$ (in einer Ebene) und durch denselben Anfangspunkt eines der $\xi'\,\eta'$; ist α der Winkel, den die ξ' Axe mit der ξ Axe macht, im Drehungssinne ξ gegen η (überall rechtwinklige Koordinaten), so ist ganz allgemein

$$\xi = \xi'\cos\alpha - \eta'\sin\alpha, \quad \eta = \xi'\sin\alpha + \eta'\cos\alpha, \qquad (\alpha)$$

vorausgesetzt, dass die Drehungsrichtungen $\xi\,\eta$, $\xi'\,\eta'$ dieselben sind.

Man nehme nun zuerst OA und OB zu neuen Axen der x_1, y_1, und behalte die z Axe als z_1 Axe. Alsdann ist in (α) $\xi = x$, $\eta = y$, $\xi' = x_1$, $\eta' = y$, $\alpha = \psi$, also

$$x = x_1\cos\psi - y_1\sin\psi, \quad y = x_1\sin\psi + y_1\cos\psi_1\; z = z_1. \qquad (\beta)$$

Nun rechne man OB' und OC als neue Axen der y_2, z_2 und behalte OA als x_2 Axe. In (α) ist $\xi = y_1$, $\eta = z_1$, $\xi' = y_2$, $\eta' = z_2$, $\alpha = \delta$, also

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2\cos\delta - z_2\sin\delta, \quad z_1 = y_2\sin\delta + z_2\cos\delta. \qquad (\gamma)$$

Endlich nehme man die letzte Lage von OA zur x' Axe, die von OB' zur y' Axe und behalte OC als z' Axe. In (α) ist $\xi = x_2$, $\eta = y_2$, $\xi' = x'$, $\eta' = y'$, $\alpha = \varphi$, also

$$x_2 = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \quad y_2 = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi, \quad z_2 = z'. \qquad (\delta)$$

Aus der Verbindung von (β), (γ), (δ) ergeben sich die (48).

Dabei müssen wir nochmals darauf hinweisen, dass diese Formeln nur unter der Voraussetzung gelten, nach der beide Koordinatensysteme vollständig zur Deckung gebracht werden können.

$$\left.\begin{array}{l} a_1^2+a_2^2+a_3^2=1,\ b_1^2+b_2^2+b_3^2=1,\ c_1^2+c_2^2+c_3^2=1, \\ a_1 b_1+a_2 b_2+a_3 b_3=0,\ a_1 c_1+a_2 c_2+a_3 c_3=0,\ b_1 c_1+b_2 c_2+b_3 c_3=0. \end{array}\right\} \quad (51)$$

$$\left.\begin{array}{lll} a_1=b_2 c_3-b_3 c_2, & b_1=c_2 a_3-c_3 a_2, & c_1=a_2 b_3-a_3 b_2, \\ a_2=b_3 c_1-b_1 c_3, & b_2=c_3 a_1-c_1 a_3, & c_2=a_3 b_1-a_1 b_3, \\ a_3=b_1 c_2-b_2 c_1; & b_3=c_1 a_2-c_2 a_1; & c_3=a_1 b_2-a_2 b_1. \end{array}\right\} \quad (52)$$

Die Grössen φ, ψ, δ sind die ξ des §. 5, IV. Da wir diese Grössen sehr häufig brauchen werden, so fügen wir hier sofort einige Ergebnisse der Rechnung bei.

$$\frac{\partial a_1}{\partial \varphi}=b_1,\ \frac{\partial a_1}{\partial \psi}=-a_2,\ \frac{\partial a_1}{\partial \delta}=c_1 \sin\varphi=a_3 \sin\psi;$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial \varphi}=-a_1,\ \frac{\partial b_1}{\partial \psi}=-b_2,\ \frac{\partial b_1}{\partial \delta}=c_1 \cos\varphi=b_3 \sin\psi;$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial \varphi}=0,\ \frac{\partial c_1}{\partial \psi}=-c_2,\ \frac{\partial c_1}{\partial \delta}=c_3 \sin\psi;$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial \varphi}=b_2,\ \frac{\partial a_2}{\partial \psi}=a_1,\ \frac{\partial a_2}{\partial \delta}=c_2 \sin\varphi=-a_3 \cos\psi;$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial \varphi}=-a_2,\ \frac{\partial b_2}{\partial \psi}=b_1,\ \frac{\partial b_2}{\partial \delta}=c_2 \cos\varphi=-b_3 \cos\psi;$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial \varphi}=0,\ \frac{\partial c_2}{\partial \psi}=c_1,\ \frac{\partial c_2}{\partial \delta}=-c_3 \cos\psi;$$

$$\frac{\partial a_3}{\partial \varphi}=b_3,\ \frac{\partial a_3}{\partial \psi}=0,\ \frac{\partial a_3}{\partial \delta}=c_3 \sin\varphi;$$

$$\frac{\partial b_3}{\partial \varphi}=-a_3,\ \frac{\partial b_3}{\partial \psi}=0,\ \frac{\partial b_3}{\partial \delta}=c_3 \cos\varphi;$$

$$\frac{\partial c_3}{\partial \varphi}=0,\ \frac{\partial c_3}{\partial \psi}=0,\ \frac{\partial c_3}{\partial \delta}=-\sin\delta.$$

Daraus ergeben sich dann die Differentialquotienten nach t, wie sie sich weiter unten finden [unter (b)].

Wollte man hier die Bedingungsgleichungen (§. 1, III) aufstellen, so hätte man auszudrücken, dass alle Punkte denselben Abstand von einander behalten. Diess würde am Bequemsten dadurch geschehen können, dass man ausser dem festen Punkte (Koordinatenanfang) noch zwei andere Punkte wählen würde, und die Entfernungen eines jeden Punktes des starren Körpers von diesen drei als unveränderlich angegeben würde. Zugleich hätte man die Entfernung der beiden gewählten Punkte vom Koordinatenanfang und unter sich als unveränderlich anzusehen. Bei n Punkten wäre hiernach die Zahl aller Bedingungsgleichungen:

1) wegen der unveränderlichen Entfernungen der $n-3$ Punkte von den dreien: $3(n-3)=3n-9$;
2) wegen der unveränderlichen Entfernungen der drei Punkte unter sich: 3;
3) wegen der Unveränderlichkeit der Koordinaten des festen Punktes ebenfalls 3 (die drei Koordinaten desselben $=0$).

Die Gesammtzahl aller Bedingungsgleichungen ist somit

$$3n-9+3+3=3n-3,$$

und da 3n die Zahl aller zu bestimmenden Koordinaten ist, so bleiben endgiltig noch 3 zu ermitteln. Desshalb (§. 5, I) gibt es drei Grössen ξ. (Aehnlich wird man in §. 9 verfahren.)

Die „Spannungen" würden sich aus (13), wenn die Aufgabe gelöst ist, d. h. die Koordinaten aller Punkte als Funktionen der Zeit bekannt sind, schon ermitteln lassen, wenn man die innern Kräfte kennen würde. Da diess nicht der Fall ist, so lassen wir diesen Theil der Aufgabe unerledigt. Er gehört ohnehin einem andern Gebiete an.

Berechnung der lebendigen Kraft und der Q.

II. Es ist (§. 5, III)

$$T = \frac{1}{2}\Sigma m \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right].$$

Aber

$$\frac{dx}{dt} = x'\frac{da_1}{dt} + y'\frac{db_1}{dt} + z'\frac{dc_1}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = x'\frac{da_2}{dt} + y'\frac{db_2}{dt} + z'\frac{dc_2}{dt},$$

$$\frac{dz}{dt} = x'\frac{da_3}{dt} + y'\frac{db_3}{dt} + z'\frac{dc_3}{dt}.$$

Beachtet man dass (§. 6, II)

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma m(y'^2 + z'^2) = \mathfrak{A}, \ \Sigma m(x'^2 + z'^2) = \mathfrak{B}, \ \Sigma m(x'^2 + y'^2) = \mathfrak{C}, \\ &\Sigma m x'y' = 0, \ \Sigma m x'z' = 0, \ \Sigma m y'z' = 0, \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

so ist

$$\left.\begin{aligned} 2T = &\left[\left(\frac{da_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_3}{dt}\right)^2\right]\Sigma m x'^2 + \left[\left(\frac{db_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db_2}{dt}\right)^2\right. \\ &\left. + \left(\frac{db_3}{dt}\right)^2\right]\Sigma m y'^2 + \left[\left(\frac{dc_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dc_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dc_3}{dt}\right)^2\right]\Sigma m z'^2, \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

wo

$$\Sigma m x'^2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{B} + \mathfrak{C} - \mathfrak{A}), \ \Sigma m y'^2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{A} + \mathfrak{C} - \mathfrak{B}), \ \Sigma m z'^2 = \frac{1}{2}(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} - \mathfrak{C}).$$

Weiter ergibt sich aus den unter I aufgeführten Werthen $\frac{\partial a_1}{\partial \varphi}$ u. s. w.:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{da_1}{dt} = b_1\frac{d\varphi}{dt} - a_3\frac{d\psi}{dt} + c_1 \sin\varphi\frac{d\delta}{dt}, \quad \frac{da_2}{dt} = b_2\frac{d\varphi}{dt} + a_1\frac{d\psi}{dt} + c_2 \sin\varphi\frac{d\delta}{dt}, \\
&\qquad\qquad \frac{da_3}{dt} = b_3\frac{d\varphi}{dt} + c_3 \sin\varphi\frac{d\delta}{dt}; \\
&\frac{db_1}{dt} = -a_1\frac{d\varphi}{dt} - b_2\frac{d\psi}{dt} + c_1 \cos\varphi\frac{d\delta}{dt}, \quad \frac{db_2}{dt} = -a_2\frac{d\varphi}{dt} + b_1\frac{d\psi}{dt} + c_2 \cos\varphi\frac{d\delta}{dt}, \\
&\qquad\qquad \frac{db_3}{dt} = -a_3\frac{d\varphi}{dt} + c_3 \cos\varphi\frac{d\delta}{dt}; \\
&\frac{dc_1}{dt} = -c_2\frac{d\psi}{dt} + \sin\psi\cos\delta\frac{d\delta}{dt}, \quad \frac{dc_2}{dt} = c_1\frac{d\psi}{dt} - \cos\psi\cos\delta\frac{d\delta}{dt}; \\
&\qquad\qquad \frac{dc_3}{dt} = -\sin\delta\frac{d\delta}{dt}.
\end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Hieraus folgt, wenn man die (50) — (52) beachtet (und

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varphi'$$

u. s. w. setzt):

$$\left(\frac{da_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_3}{dt}\right)^2 = \varphi'^2 + (1 - a_3^2)\psi'^2 + \sin^2\varphi\,\delta'^2 + 2c_3\varphi'\psi' - 2b_3\sin\varphi\,\psi'\delta',$$

$$\left(\frac{db_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db_3}{dt}\right)^2 = \varphi'^2 + (1 - b_3^2)\psi'^2 + \cos^2\varphi\,\delta'^2 + 2c_3\varphi'\psi' + 2a_3\cos\varphi\,\psi'\delta'$$

$$\left(\frac{dc_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dc_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dc_3}{dt}\right)^2 = \sin^2\delta\,\psi'^2 + \delta'^2.$$

Hieraus dann

$$\begin{aligned}
2T &= \varphi'^2\mathfrak{C} + \psi'^2(\mathfrak{C} - \mathfrak{C}\sin^2\delta + \mathfrak{A}\sin^2\varphi\sin^2\delta + \mathfrak{B}\sin^2\delta\cos^2\varphi) + \delta'^2(\mathfrak{B}\sin^2\varphi + \mathfrak{A}\cos^2\varphi)\\
&\quad + 2\varphi'\psi'\mathfrak{C}\cos\delta + 2\psi'\delta'\sin\varphi\cos\varphi\sin\delta(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\\
&= \mathfrak{A}(\sin^2\varphi\sin^2\delta\,\psi'^2 + 2\psi'\delta'\sin\varphi\cos\varphi\sin\delta + \cos^2\varphi\,\delta'^2)\\
&\quad + \mathfrak{B}(\cos\varphi\sin^2\delta\,\psi'^2 - 2\psi'\delta'\sin\varphi\cos\varphi\sin\delta + \sin^2\varphi\,\delta'^2)\\
&\quad + \mathfrak{C}(\varphi'^2 + 2\varphi'\psi'\cos\delta + \cos^2\delta\,\psi'^2)\\
&= \mathfrak{A}(\sin\varphi\sin\delta\,\psi' + \cos\varphi\,\delta')^2 + \mathfrak{B}(\cos\varphi\sin\delta\,\psi' - \sin\varphi\,\delta')^2 + \mathfrak{C}(\varphi' + \cos\delta\,\psi')^2.
\end{aligned}$$

Setzt man also

$$\left.\begin{aligned}
\sin\varphi\sin\delta\frac{d\psi}{dt} + \cos\varphi\frac{d\delta}{dt} = p,\quad \cos\varphi\sin\delta\frac{d\psi}{dt} - \sin\varphi\frac{d\delta}{dt} = q,\\
\frac{d\varphi}{dt} + \cos\delta\frac{d\psi}{dt} = r,
\end{aligned}\right\}\qquad(54)$$

so ist

$$T = \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}p^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}q^2 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}r^2. \qquad \text{(c)}$$

Weiter ist (§. 5, II):

$$Q_1 = \Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial\varphi} + Y\frac{\partial y}{\partial\varphi} + Z\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right),\quad Q_2 = \Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial\psi} + Y\frac{\partial y}{\partial\psi} + Z\frac{\partial z}{\partial\psi}\right),$$

$$Q_3 = \Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial\delta} + Y\frac{\partial y}{\partial\delta} + Z\frac{\partial z}{\partial\delta}\right).$$

Zerlegt man die wirksame Kraft nach den beweglichen Axen, so ist

$$X = a_1X' + b_1Y' + c_1Z',\quad Y = a_2X' + b_2Y' + c_2Z',\quad Z = a_3X' + b_3Y' + c_3Z',$$

wenn X', Y', Z' die Seitenkräfte nach den neuen Axen sind (§. 3, III).

Daraus

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \Sigma[(a_1X' + b_1Y' + c_1Z')(b_1x' - a_1y') + (a_2X' + b_2Y' + c_2Z')(b_2x' - a_2y')\\
&\quad + (a_3X' + b_3Y' + c_3Z')(b_3x' - a_3y')] = \Sigma(x'Y' - y'X'),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_2 &= \Sigma[(a_1X' + b_1Y' + c_1Z')(-a_2x' - b_2y' - c_2z') + (a_2X' + b_2Y' + c_2Z')(a_1x' + b_1y + c_1z')]\\
&= a_3\Sigma(y'Z' - z'Y') + b_3\Sigma(z'X' - x'Z') + c_3\Sigma(x'Y' - y'X'),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_3 &= \Sigma[(a_1X' + b_1Y' + c_1Z')(a_3x' + b_3y' + c_3z')\sin\psi\\
&\quad + (a_2X' + b_2Y' + c_2Z')(-a_3x' - b_3y' - c_3z')\cos\psi\\
&\quad + (a_3X + b_3Y' + c_3Z')(x'c_3\sin\varphi + y'c_3\cos\varphi - z'\sin\delta)]\\
&= -\sin\varphi\,\Sigma(z'X' - x'Z') + \cos\varphi\,\Sigma(y'Z' - z'Y').
\end{aligned}$$

Aufstellung der Bewegungsgleichungen.

III. Die (31) sind

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_1, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \psi'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = Q_2, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \delta'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \delta} = Q_3.$$

Aber nach (c)

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \mathfrak{C}\, r \frac{\partial r}{\partial \varphi'} = \mathfrak{C}\, r,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi'} = \mathfrak{A}\, p \frac{\partial p}{\partial \psi'} + \mathfrak{B}\, q \frac{\partial q}{\partial \psi'} + \mathfrak{C}\, r \frac{\partial r}{\partial \psi'} = \mathfrak{A}\, p \sin\varphi \sin\delta + \mathfrak{B}\, q \cos\varphi \sin\delta + \mathfrak{C}\, r \cos\delta;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \delta'} = \mathfrak{A}\, p \frac{\partial p}{\partial \delta'} + \mathfrak{B}\, q \frac{\partial q}{\partial \delta'} + \mathfrak{C}\, r \frac{\partial r}{\partial \delta'} = \mathfrak{A}\, p \cos\varphi - \mathfrak{B}\, q \sin\varphi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = \mathfrak{A}\, p (\cos\varphi \sin\delta\, \psi' - \sin\varphi\, \delta') + \mathfrak{B}\, q (-\sin\varphi \sin\delta\, \psi' - \cos\varphi\, \delta')$$
$$= \mathfrak{A}\, p q - \mathfrak{B}\, q p = (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\, p q,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \delta} = \mathfrak{A}\, p \sin\varphi \cos\delta \frac{d\psi}{dt} + \mathfrak{B}\, q \cos\varphi \cos\delta \frac{d\psi}{dt} - \mathfrak{C}\, r \sin\delta \frac{d\psi}{dt}.$$

Demnach hat man:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{C} \frac{dr}{dt} - (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\, p q = \Sigma (x\, Y' - y' X'), \\
&\mathfrak{A} \frac{d}{dt} (p \sin\varphi \sin\delta) + \mathfrak{B} \frac{d}{dt} (q \cos\varphi \sin\delta) + \mathfrak{C} \frac{d}{dt} (r \cos\delta) \\
&\quad = \sin\varphi \sin\delta\, \Sigma (y' Z' - z' Y') + \cos\varphi \sin\delta\, \Sigma (z' X' - x' Z') \\
&\quad + \cos\delta\, \Sigma (x' Y - y' X'), \\
&\mathfrak{A} \frac{d}{dt} (p \cos\varphi) - \mathfrak{B} \frac{d}{dt} (q \sin\varphi) - \mathfrak{A}\, p \sin\varphi \cos\delta \frac{d\psi}{dt} - \mathfrak{B}\, q \cos\varphi \cos\delta \frac{d\psi}{dt} \\
&\quad + \mathfrak{C}\, r \sin\delta \frac{d\psi}{dt} = - \sin\varphi\, \Sigma (z' X' - x' Z') + \cos\varphi\, \Sigma (y' Z' - z' Y').
\end{aligned}\right\} \quad (55)$$

Diess sind zunächst die (31). Wir wollen sie jedoch in anderer Form darstellen:

Zu dem Ende multipliziren wir die erste mit

$$- \sin\varphi \cos\delta,$$

die zweite mit

$$\sin\varphi,$$

die dritte mit

$$\cos\varphi \sin\delta$$

und addiren dann alle. Dadurch ergibt sich

$$\mathfrak{A} \frac{dp}{dt} + (\mathfrak{C} - \mathfrak{B})\, r q = \Sigma (y' Z' - z' Y').$$

Eben so multipliziren wir mit

$$- \cos\varphi \cos\delta, \quad \cos\varphi, \quad - \sin\varphi \sin\delta,$$

addiren, und erhalten

$$\mathfrak{B}\frac{dq}{dt} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{C})\,p\,r = \Sigma(z'X' - x'Z').$$

Demnach

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{A}\frac{dp}{dt} + (\mathfrak{C} - \mathfrak{B})\,q\,r &= \Sigma(y'Z' - z'Y'),\\
\mathfrak{B}\frac{dq}{dt} + (\mathfrak{A} - \mathfrak{C})\,p\,r &= \Sigma(z'X' - x'Z'),\\
\mathfrak{C}\frac{dr}{dt} + (\mathfrak{B} - \mathfrak{A})\,p\,q &= \Sigma(x'Y' - y'X').
\end{aligned}\right\}\quad (56)$$

Diess ist die Form der Bewegungsgleichungen, die Euler aufgestellt. In Verbindung mit (54) bestimmen sie die Bewegung des Körpers.

In den zweiten Seiten fallen alle innern und die nach dem Anfangspunkt gerichteten Kräfte weg (§. 3, I), die also überhaupt in unsern Bewegungsgleichungen nicht vorkommen.

Ist eine Kräftefunktion vorhanden, so sind die zweiten Seiten der (55) nach §. 5, V

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi},\quad \frac{\partial V}{\partial \psi},\quad \frac{\partial V}{\partial \delta},$$

und unter dieser Form stellt Lagrange (Mécanique analytique, II, pag. 206) die Gleichungen der Bewegung auf. Für die (56) wäre

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma(x'Y' - y'X') &= \frac{\partial V}{\partial \varphi},\\
\Sigma(z'X' - x'Z') &= -\cos\varphi\, cotg\,\delta\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\delta}\frac{\partial V}{\partial \psi} - \sin\varphi\frac{\partial V}{\partial \delta},\\
\Sigma(y'Z' - z'Y') &= -\sin\varphi\, cotg\,\delta\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{\sin\varphi}{\sin\delta}\frac{\partial V}{\partial \psi} + \cos\varphi\frac{\partial V}{\partial \delta},
\end{aligned}\right\}\quad (57)$$

wornach diese Gleichungen umgeschrieben werden könnten.

Kanonische Form.

IV. Nach §. 5, VI ist zu setzen

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \zeta_1,\quad \frac{\partial T}{\partial \psi'} = \zeta_2,\quad \frac{\partial T}{\partial \delta'} = \zeta_3,$$

d. h.

$$\mathfrak{C}\,r = \zeta_1,\quad \mathfrak{A}\,p \sin\varphi \sin\delta + \mathfrak{B}\,q \cos\varphi \sin\delta + \mathfrak{C}\,r\cos\delta = \zeta_2,$$
$$\mathfrak{A}\,p\cos\varphi - \mathfrak{B}\,q\sin\varphi = \zeta_3,$$

woraus

$$r = \frac{\zeta_1}{\mathfrak{C}},\quad p = \frac{(\zeta_2 - \zeta_1\cos\delta)\sin\varphi + \zeta_3\cos\varphi\sin\delta}{\mathfrak{A}\sin\delta},$$

$$q = \frac{(\zeta_2 - \zeta_1\cos\delta)\cos\varphi - \zeta_3\sin\varphi\sin\delta}{\mathfrak{B}\sin\delta}.$$

$$2T = \frac{[(\zeta_2 - \zeta_1 \cos\delta)\sin\varphi + \zeta_3 \cos\varphi \sin\delta]^2}{\mathfrak{A}\sin^2\delta}$$
$$+ \frac{[(\zeta_2 - \zeta_1\cos\delta)\cos\varphi - \zeta_3\sin\varphi\sin\delta]^2}{\mathfrak{B}\sin^2\delta} + \frac{\zeta_1^2}{\mathfrak{C}}. \qquad \text{(d)}$$

Setzt man nun (§. 5, IX)

$\Phi = T - V$, wo T aus (d) gezogen,

so hat man (§. 5, VI)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta_1}, & \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta_2}, & \frac{d\delta}{dt} &= \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta_3}, \\ \frac{d\zeta_1}{dt} &= -\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}, & \frac{d\zeta_2}{dt} &= -\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}, & \frac{d\zeta_3}{dt} &= -\frac{\partial\Phi}{\partial\delta}, \end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

wo V nur von φ, ψ, δ abhängen darf, t aber auch entwickelt enthalten kann. Die Integration dieses Systems ist in §. 5, VII, VIII vorgeschrieben.

Geschwindigkeit.

V. Die Seitengeschwindigkeiten des Punktes m, zerlegt nach den festen Axen, sind

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt},$$

d. h. die drei Grössen

$$x'\frac{da_1}{dt} + y'\frac{db_1}{dt} + z'\frac{dc_1}{dt}; \quad x'\frac{da_2}{dt} + y'\frac{db_2}{dt} + z'\frac{dc_2}{dt}; \quad x'\frac{da_3}{dt} + y'\frac{db_3}{dt} + z'\frac{dc_3}{dt}.$$

Zerlegt man dieselben nach den drei beweglichen Axen, so sind die Seitengeschwindigkeiten

$$a_1\frac{dx}{dt} + a_2\frac{dy}{dt} + a_3\frac{dz}{dt}, \quad b_1\frac{dx}{dt} + b_2\frac{dy}{dt} + b_3\frac{dz}{dt}, \quad c_1\frac{dx}{dt} + c_2\frac{dy}{dt} + c_3\frac{dz}{dt}.$$

Unter Beachtung von (b) ergibt sich hieraus als Seitengeschwindigkeiten nach den drei beweglichen (Haupt-) Axen:

$$x'[(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)\varphi' - (a_1 a_2 - a_1 a_2)\psi' + (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3)\sin\varphi\,\delta']$$
$$+ y'[-(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\varphi' - (a_1 b_2 - a_2 b_1)\psi' + (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3)\cos\varphi\,\delta']$$
$$+ z'[-(a_1 c_2 - a_2 c_1)\psi' + (a_1 c_3 \sin\psi - a_2 c_3 \cos\psi - a_3 \sin\delta)\delta'],$$
$$x'[(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)\varphi' - (a_2 b_1 - a_1 b_2)\psi' + (b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3)\sin\varphi\,\delta']$$
$$+ y'[-(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)\varphi' - (b_1 b_2 - b_1 b_2)\psi' + (b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3)\cos\varphi\,\delta']$$
$$+ z'[-(b_1 c_2 - b_2 c_1)\psi' + (b_1 c_3 \sin\psi - b_2 c_3 \cos\psi - b_3 \sin\delta)\delta'],$$
$$x'[(b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3)\varphi' - (a_2 c_1 - a_1 c_2)\psi' + (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)\sin\varphi\,\delta']$$
$$+ y'[-(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3)\varphi' - (b_2 c_1 - b_1 c_2)\psi' + (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)\cos\varphi\,\delta']$$
$$+ z'[-(c_1 c_2 - c_1 c_2)\psi' + (c_1 c_3 \sin\psi - c_2 c_3 \cos\psi - c_3 \sin\delta)\delta'].$$

Beachtet man (50), (52) und (54), so sind diese Grössen

$$qz' - ry', \quad rx' - pz', \quad py' - qx'. \qquad (59)$$

Uebrigens ist hiebei auf die Eigenschaft, dass die beweglichen Axen Hauptaxen sind, keinerlei Rücksicht genommen, was allerdings bei der Berechnung von T der Fall war. Die (59) hätten also allgemeinere Geltung, nur müssten dann die Formeln in II und III anders lauten.

Die eigenthümliche Form der Grössen (59) weist auf eine besondere Beziehung der Grössen p, q, r zur Bewegung, die wir hier betrachten, hin. Um dieselbe aber klar hervortreten zu lassen, wollen wir hier einen Abschnitt der elementaren Mechanik einschieben, der die Zusammensetzung und Zerlegung von Drehungen betrifft.

Zusammensetzung von Drehungen.

VI. Wir wollen — abschweifend von unserm Gegenstande — einmal annehmen, ein starrer Körper solle zu gleicher Zeit sich um drei auf einander senkrecht stehende (sich in einem Punkte schneidende) Axen drehen. Wir nehmen diese Geraden zu Koordinatenaxen der x, y, z (die natürlich mit den oben betrachteten Nichts gemein haben).

Dreht ein Punkt sich um irgend eine Axe, von der er in einem Abstand r ist, so ist αr seine Geschwindigkeit, wo α von r unabhängig und die Winkelgeschwindigkeit heisst. Die Axe selbst bildet die Drehaxe, und was den Sinn der Drehung betrifft, so wollen wir uns darüber in folgender Weise verständigen: Stellt man sich in die Drehaxe, die wir als Strahl, d. h. als nur nach einer Seite (vom Koordinatenanfang aus) gezogen denken, so wollen wir die Drehung als positiv bezeichnen, wenn sie von rechts gegen links vor sich geht, dagegen als negativ im entgegengesetzten Falle.

Da eine Gerade nach zwei Seiten hin verlängert werden kann, und eine Drehung, die auf der einen Seite von rechts nach links vor sich geht, von der andern Seite aus gesehen nothwendig von links nach rechts geschieht, so kann man offenbar, wenn man eine positive und negative Richtung der Drehaxe zulässt, auch sagen, es sei eine Drehung als positiv zu bezeichnen, wenn man sich in die positive Richtung der Drehaxe stellen muss, um sie von rechts nach links gehend zu sehen; als negativ dagegen müsse man sie bezeichnen, wenn man sich zu demselben Ende in die negative Richtung der Drehaxe zu stellen hat.

Sind die Koordinatenaxen die Drehaxen, so ist die positive und negative Seite derselben sofort gegeben. Dabei wählen wir die drei Koordinatenaxen so, dass die positive Drehung

um die x Axe von der positiven y Axe zur positiven z Axe,
" " y " " " " z " " " x ",
" " z " " " " x " " " y "

geht. Ist der Körper ein starrer, so geht natürlich überall die Drehung in demselben Sinne vor sich; ist aber ein System betrachtet, was wir hier auch dürfen, so werden wir diess annehmen.

Wenn wir die Winkelgeschwindigkeit der Rotation (die für alle Punkte des Systems dieselbe ist) durch α bezeichnen, so wird α als positiv angesehen werden, wenn die Drehung eine positive, als negativ wenn sie eine negative ist.

Diess vorausgesetzt wollen wir annehmen, es habe der Punkt dessen Koordinaten x, y, z sind, zu gleicher Zeit drei Bewegungen, die Drehungen seien

um die x Axe mit der Winkelgeschwindigkeit ξ,
" " y " " " " η,
" " z " " " " ζ,

wo also ξ, η, ζ von x, y, z ganz unabhängig, d. h. für alle Punkte des Systems dieselben seien (positiv oder negativ).

Beachtet man, dass vermöge der Drehung um die x Axe der Punkt einen Kreis beschreiben soll, dessen Halbmesser

$$\sqrt{y^2+z^2},$$

so dass also seine wirkliche Geschwindigkeit

$$\xi\sqrt{y^2+z^2}$$

ist; dass diese Geschwindigkeit senkrecht zur x Axe gerichtet, also parallel zur yz Ebene ist, mithin ihrer Projektion auf diese Ebene gleich; in dieser Ebene senkrecht zu einer Geraden gerichtet ist, die als Projektion des Fahrstrahls nach dem bewegten Punkte erscheint, und endlich von der y Axe zur z Axe gerichtet ist, wenn ξ positiv, umgekehrt wenn ξ negativ: so wird man ganz unmittelbar finden, dass der Punkt die folgenden Geschwindigkeiten mit den beigesetzten Cosinus der Richtungswinkel habe

$$\text{Geschw.} = \xi\sqrt{y^2+z^2}; \quad 0, \quad \frac{-z}{\sqrt{y^2+z^2}}, \quad \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}.$$

$$\text{"} \quad = \eta\sqrt{x^2+z^2}; \quad \frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}, \quad 0, \quad \frac{-x}{\sqrt{x^2+z^2}}.$$

$$\text{"} \quad = \zeta\sqrt{x^2+y^2}; \quad \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad 0.$$

Demnach sind die Seitengeschwindigkeiten der wirklichen Geschwindigkeit, zerlegt nach den drei Axen:

$$\eta z - \zeta y, \quad \zeta x - \xi z, \quad \xi y - \eta x, \qquad (\alpha)$$

welche Formeln, wenn man alle obigen Feststellungen beachtet, ganz allgemein gelten und den herkömmlichen Sinn haben, d. h. wenn z. B. $\eta z - \zeta y$ positiv ausfällt, so ist damit ausgesprochen, dass die Seitengeschwindigkeit nach der x Axe im Sinne der positiven x Axe gerichtet ist.

Umgekehrt ist aber auch klar, dass wenn in einem Systeme die drei Seitengeschwindigkeiten eines bewegten Punktes, dessen Koordinaten x, y, z sind, durch die Formeln (α) dargestellt sind, wo ξ, η, ζ von x, y, z unabhängig, man sofort auszusprechen das Recht hat, es sei die Bewegung des Systems dieselbe, als wenn alle Punkte des Systems sich um die drei Koordinatenaxen mit den Winkelgeschwindigkeiten ξ, η, ζ zu drehen haben.

Die drei Grössen (α) sind Null, wenn zu gleicher Zeit

$$\eta z = \zeta y, \quad \zeta x = \xi z, \quad \xi y = \eta x.$$

Alle Punkte, deren Koordinaten diesen Gleichungen genügen, bleiben folglich in Ruhe. Diese Punkte liegen aber auf einer Geraden, deren Gleichungen

$$\xi\mathfrak{Y} = \eta\mathfrak{X}, \quad \xi\mathfrak{Z} = \zeta\mathfrak{X} \qquad (\beta)$$

sind, wo $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die laufenden Koordinaten bezeichnen. Diese Gerade geht durch den Koordinatenanfang und ihre (positive) Richtung wollen wir durch die drei Cosinus ihrer Richtungswinkel:

$$\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}, \quad \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}, \quad \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}} \qquad (\beta')$$

feststellen, wo ξ, η, ζ natürlich mit ihren gehörigen Vorzeichen genommen sind. Unter diesen Annahmen lässt sich die Gerade (β) leicht konstruiren.

Vom Koordinatenanfang aus trage man auf die Koordinatenaxen die Längen ξ, η, ζ (nach der positiven oder negativen Richtung der Axen, je nachdem ξ, η, ζ positiv oder negativ sind), konstruire sodann über diesen drei Geraden ein Parallelepiped, so ist die Diagonale vom Anfang aus die Gerade (β), und ihre durch (β') festgestellte Richtung geht vom Anfang in das Innere des Parallelepipeds.

Da alle Punkte dieser Geraden in Ruhe sind, so scheint die eigentliche Bewegung des Systems in einer Drehung um dieselbe zu bestehen. Um diese Vermuthung zur Gewissheit zu erheben, haben wir zu zeigen, dass die Geschwindigkeit eines Punktes (x, y, z) sich darstellen lasse durch R p, wo R der Abstand des Punktes von der Geraden (β) und p für alle Punkte dasselbe ist; dass diese Geschwindigkeit senkrecht zur Geraden gerichtet sei, die jenen Abstand gibt und in einer auf der (β) senkrechten Ebene liege, und endlich, dass für alle Punkte die Drehungsrichtung dieselbe sei.

Wir werden diess am Bequemsten erweisen können, wenn wir durch den Anfangspunkt ein zweites Koordinatensystem der x′, y′, z′ legen, so dass die Beziehungen (49) für beide gelten. Sollen auch die (52) gelten, so müssen die positiven Drehungsrichtungen für beide Koordinatensysteme dieselben sein, was wir voraussetzen wollen. In diesem Systeme soll die (β) die z′ Axe sein, so dass c_1, c_2, c_3 die drei Werthe (β') haben.

Wir zerlegen nun die wirklichen Geschwindigkeiten nach den neuen Axen und finden aus (α) als Seitengeschwindigkeiten:

$$\begin{aligned}
&a_1(\eta z - \zeta y) + a_2(\zeta x - \xi z) + a_3(\xi y - \eta x),\\
&b_1(\eta z - \zeta y) + b_2(\zeta x - \xi z) + b_3(\xi y - \eta x),\\
&c_1(\eta z - \zeta y) + c_2(\zeta x - \xi z) + c_3(\xi y - \eta x),
\end{aligned}$$

d. h. wegen der (β'):

$$\begin{aligned}
&[a_1(c_2 z - c_3 y) + a_2(c_3 x - c_1 z) + a_3(c_1 y - c_2 x)]\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\\
&[b_1(c_2 z - c_3 y) + b_2(c_3 x - c_1 z) + b_3(c_1 y - c_2 x)]\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\\
&[c_1(c_2 z - c_3 y) + c_2(c_3 x - c_1 z) + c_3(c_1 y - c_2 x)]\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},
\end{aligned}$$

oder wegen der (52) und (49):

$$\begin{aligned}
&[-b_3 z - b_2 y - b_1 x]\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} = -y'\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\\
&[a_3 z + a_2 y + a_1 x]\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} = x'\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\\
&\qquad 0,
\end{aligned}$$

von welchen Werthen der letzte bereits aussagt, dass die wirkliche Geschwindigkeit in einer auf (β) senkrechten Ebene (der Ebene der $x'\,y'$ parallel) liege.

Aus den beiden ersten Ausdrücken folgt, dass die wirkliche Geschwindigkeit v durch die Formel

$$v^2 = (y'^2 + x'^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = R^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$$

gegeben sei, wo R den Abstand des bewegten Punktes von (β) bezeichnet und

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

wirklich von der Lage desselben unabhängig ist. Diese Geschwindigkeit macht mit den Axen der x', y' Winkel, deren Cosinus sind

$$\frac{-y'}{R}, \quad \frac{x'}{R};$$

sie steht folglich senkrecht auf der Geraden R (deren Cosinus der Richtungswinkel

$$\frac{x'}{R} \text{ und } \frac{y'}{R}$$

sind), und geht von der positiven x' Axe zur positiven y' Axe.

Daraus also folgt endgiltig der Satz:

Soll sich ein System von Massenpunkten gleichzeitig um die drei Koordinatenaxen mit den Winkelgeschwindigkeiten ξ, η, ζ (positiv oder negativ) drehen, so dreht sich dasselbe in Wirklichkeit mit einer Winkelgeschwindigkeit

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

in positivem Sinne (rechts nach links) um die Gerade (β), deren Konstruktion oben angegeben wurde. Diese Gerade bildet also die wirkliche Drehaxe.

Umgekehrt kann man natürlich jede Drehung um eine Axe in Drehungen um drei auf einander senkrechte Axen zerlegen. Man trägt auf der positiven Richtung der Drehaxe eine Länge gleich der Winkelgeschwindigkeit der Drehung auf, bildet über dieser Linie ein rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Diagonale sie sei, und dessen Kanten nach den drei Richtungen gehen. Diese drei Kanten, von dem Anfangspunkte aus bilden die positiven Richtungen der drei Drehaxen und die Längen derselben sind die Winkelgeschwindigkeiten der Drehungen um dieselben.

Sobald also die drei Seitengeschwindigkeiten eines bewegten Punktes die Form (α) haben, gelten sofort alle unsere Sätze.*

---

* Wir machen keinerlei Anwendung unserer allgemeinen Sätze auf besondere Fälle; bei dem so eben Dargestellten mag aber eine Ausnahme gestattet sein.

So wie wir oben eine Drehung in drei andere zerlegt haben, lässt sie sich auch in zwei zerlegen, wenn die neuen Axen mit der anfänglichen in einer Ebene liegen Die dabei zu befolgende Regel ist die des Parallelogramms der Kräfte oder Geschwindigkeiten. Sind die neuen Axen auf einander senkrecht, so gibt jede der zwei Drehungen den vollen Betrag der Drehung des Körpers um die betreffende Axe, da dann die Bewegung für die Punkte in der Nähe dieser Axe dieselbe ist in Bezug auf die andere Axe.

Die Erde dreht sich mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste Axe. Will man diese Drehung zerlegen in die um eine Vertikale (Normale an das Erdellipsoid) und eine in der Ebene dieser Vertikalen und der Erdaxe liegende, auf der erstern senkrechte

Augenblickliche Rotationsaxe. Bedeutung von p, q, r.

VII. Kehren wir nach dieser Abschweifung wieder zu unserm eigentlichen Gegenstand zurück, so sagen die Ausdrücke (59), verglichen mit (α), sofort aus, dass die Bewegung des Körpers zur Zeit t genau so beschaffen sei, als wolle er sich um die (beweglichen) Axen der x', y', z' drehen mit Winkelgeschwindigkeiten p, q, r und zwar genau in der in VI betrachteten Weise, wenn wir die Axen der x', y', z' so gelagert denken, wie dort verlangt. Daraus folgt, dass der Körper sich thatsächlich in diesem Augenblicke um eine Gerade dreht, deren Gleichungen sind

$$p\,\mathfrak{Y} = q\,\mathfrak{X}, \quad p\,\mathfrak{Z} = r\,\mathfrak{X}, \tag{60}$$

und zwar mit einer Winkelgeschwindigkeit

$$\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Die Richtung dieser Drehung wird durch den in VI gefundenen allgemeinen Satz bestimmt.

Die Gerade (60) heisst die augenblickliche Rotationsaxe. Da p, q, r im Allgemeinen mit der Zeit ihre Werthe ändern, so ändert auch die augenblickliche Rotationsaxe fortwährend ihre Lage.

Druck auf den festen Punkt.

VIII. Sind (§. 4) Ξ, H, Z die Seitenkräfte desselben, so gibt die Verbindung der (24) und (13):

$$\Xi = \Sigma X - \Sigma m \frac{d^2 x}{d t^2}, \quad H = \Sigma Y - \Sigma m \frac{d^2 y}{d t^2}, \quad Z = \Sigma Z - \Sigma m \frac{d^2 z}{d t^2}.$$

Gerade (was möglich ist, da Vertikale und Erdaxe sich schneiden), so ist die erste Seitendrehung der vollständige Betrag der Erdrotation um die betreffende Vertikale. Stellt man sich in die nach Norden gerichtete Erdaxe, so geht die Drehung im positiven Sinne vor sich (rechts nach links); die Seitendrehung um die Vertikale hat zur Winkelgeschwindigkeit

$$\omega \cos(90^0 - \beta),$$

wenn β die geographische Breite der Vertikalen, d. h. $\omega \sin\beta$. Dieselbe ist positiv, wenn $\beta > 0$, negativ wenn $\beta < 0$. Für Orte auf der nördlichen Erdhälfte ist also diese Drehung derart, dass wenn man sich in die nach Aussen (gegen den Himmel) gewendete Normale stellt, dieselbe von rechts nach links vor sich geht, während für Orte auf der südlichen Erdhälfte das Umgekehrte stattfindet. Schwingt ein Pendel aus dieser Vertikalen als seiner Ruhelage in einer Ebene, so nimmt dieselbe an der Rotation keinen Antheil, und wird folglich für die Orte auf der nördlichen Erdhälfte von links nach rechts, für Orte auf der südlichen von rechts nach links sich zu drehen scheinen, in allen Fällen also so wie die Sonne am Himmel sich zu bewegen scheint.

Da die Geschwindigkeit dieser Drehung $\omega \sin\beta$ ist, so dauert eine volle Umdrehung $\frac{24}{\sin\beta}$ Stunden. Diess ist die Erklärung des Foucault'schen Pendelversuchs.

wo das Summenzeichen sich auf alle Punkte erstreckt, und in X, Y, Z alle Kräfte vorkommen, die sich nicht zu je zwei aufheben.

Zerlegt man alle Kräfte parallel den neuen Axen, so ist

$$a_1 \Xi' + b_1 H' + c_1 Z' = a_1 \Sigma X' + b_1 \Sigma Y' + c_1 \Sigma Z' - \Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} \text{ u. s. w.},$$

woraus

$$\Xi' = \Sigma X' - \Sigma m \left(a_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_3 \frac{d^2 z}{dt^2} \right),$$

$$H' = \Sigma Y' - \Sigma m \left(b_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + b_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + b_3 \frac{d^2 z}{dt^2} \right),$$

$$Z' = \Sigma Z' - \Sigma m \left(c_1 \frac{d^2 x}{dt^2} + c_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + c_3 \frac{d^2 z}{dt^2} \right).$$

Aber aus V:

$$\left.\begin{aligned} a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 \frac{dy}{dt} + a_3 \frac{dz}{dt} &= q z' - r y', \\ b_1 \frac{dx}{dt} + b_2 \frac{dy}{dt} + b_3 \frac{dz}{dt} &= r x' - p z', \\ c_1 \frac{dx}{dt} + c_2 \frac{dy}{dt} + c_3 \frac{dz}{dt} &= p y' - q x', \end{aligned}\right\} \quad (e)$$

woraus auch

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1 (q z' - r y') + b_1 (r x' - p z') + c_1 (p y' - q x'), \\ \frac{dy}{dt} &= a_2 (q z' - r y') + b_2 (r x' - p z') + c_2 (p y' - q x'), \\ \frac{dz}{dt} &= a_3 (q z' - r y') + b_3 (r x' - p z') + c_3 (p y' - q x'). \end{aligned}\right\} \quad (f)$$

Aus den (f) folgt

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}\frac{da_1}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{da_2}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{da_3}{dt} = (q z' - r y') & \left(a_1 \frac{da_1}{dt} + a_2 \frac{da_2}{dt} + a_3 \frac{da_3}{dt} \right) \\ + (r x' - p z') & \left(b_1 \frac{da_1}{dt} + b_2 \frac{da_2}{dt} + b_3 \frac{da_3}{dt} \right) \\ + (p y' - q x') & \left(c_1 \frac{da_1}{dt} + c_2 \frac{da_2}{dt} + c_3 \frac{da_3}{dt} \right). \end{aligned}$$

Aber aus (51) folgt sofort

$$a_1 \frac{da_1}{dt} + a_2 \frac{da_2}{dt} + a_3 \frac{da_3}{dt} = 0;$$

ferner wie in V:

$$b_1 \frac{da_1}{dt} + b_2 \frac{da_2}{dt} + b_3 \frac{da_3}{dt} = r, \quad c_1 \frac{da_1}{dt} + c_2 \frac{da_2}{dt} + c_3 \frac{da_3}{dt} = -q,$$

so dass

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt}\frac{da_1}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{da_2}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{da_3}{dt}=r(rx'-pz')-q(py'-qx'),\\
&\frac{dx}{dt}\frac{db_1}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{db_2}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{db_3}{dt}=-r(qz'-ry')+p(py'-qx'),\\
&\frac{dx}{dt}\frac{dc_1}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{dc_2}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{dc_3}{dt}=q(qz'-ry')-p(rx'-pz'),
\end{aligned}\right\}\quad (g)$$

von welchen Gleichungen die zwei letzten eben so gefunden werden wie die erste. (Vergl. §. 11, V.)

Aus (e) folgt

$$a_1\frac{d^2x}{dt^2}+a_2\frac{d^2y}{dt^2}+a_3\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{da_1}{dt}\frac{dx}{dt}+\frac{da_2}{dt}\frac{dy}{dt}+\frac{da_3}{dt}\frac{dz}{dt}=z'\frac{dq}{dt}-y'\frac{dr}{dt},$$

so dass wegen (g):

$$a_1\frac{d^2x}{dt^2}+a_2\frac{d^2y}{dt^2}+a_3\frac{d^2z}{dt^2}=z'\frac{dq}{dt}-y'\frac{dr}{dt}-r(rx'-pz')+q(py'-qx').$$

Demnach endlich, wenn man mit den übrigen Gleichungen eben so verfährt:

$$\left.\begin{aligned}
\Xi' &= \Sigma X'-\frac{dq}{dt}\Sigma mz'+\frac{dr}{dt}\Sigma my'+(q^2+r^2)\Sigma mx'-pq\Sigma my'-pr\Sigma mz',\\
H' &= \Sigma Y'-\frac{dr}{dt}\Sigma mx'+\frac{dp}{dt}\Sigma mz'-pq\Sigma mx'+(p^2+r^2)\Sigma my'-qr\Sigma mz',\\
Z' &= \Sigma Z'-\frac{dp}{dt}\Sigma my'+\frac{dq}{dt}\Sigma mx'-pr\Sigma mx'-qr\Sigma my'+(p^2+q^2)\Sigma mz'.
\end{aligned}\right\}\quad (61)$$

Aus den (61) folgt sofort, dass wenn der feste Punkt der Schwerpunkt ist, bloss

$$\Xi'=\Sigma X',\ H'=\Sigma Y',\ Z'=\Sigma Z',$$

d. h. also dass der Bewegungszustand (p, q, r) keinen Einfluss auf den Druck, den der feste Punkt erleidet, ausübt.

Besonderer Fall, da keine äussern Kräfte vorhanden sind. Stabilität der Rotation.

IX. Jetzt heissen die (56) (vergl. übrigens §. 3, I):

$$\mathfrak{A}\frac{dp}{dt}+(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})qr=0,\quad \mathfrak{B}\frac{dq}{dt}+(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})pr=0,\quad \mathfrak{C}\frac{dr}{dt}+(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})pq=0. \qquad (62)$$

Daraus folgt:

$$\mathfrak{A}p\frac{dp}{dt}+\mathfrak{B}q\frac{dq}{dt}+\mathfrak{C}r\frac{dr}{dt}=0,\quad \mathfrak{A}^2p\frac{dp}{dt}+\mathfrak{B}^2q\frac{dq}{dt}+\mathfrak{C}^2r\frac{dr}{dt}=0,$$

d. h.

$$\mathfrak{A}p^2+\mathfrak{B}q^2+\mathfrak{C}r^2=\alpha^2,\quad \mathfrak{A}^2p^2+\mathfrak{B}^2q^2+\mathfrak{C}^2r^2=\beta^2, \qquad (63)$$

wo α^2 und β^2 zwei (positive) Konstanten. Aus (63) folgt:

$$p^2 = \frac{\alpha^2\mathfrak{B} - \beta^2 + \mathfrak{C}(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})r^2}{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})}, \quad q^2 = \frac{\beta^2 - \mathfrak{A}\alpha^2 + \mathfrak{C}(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})r^2}{\mathfrak{B}(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})},$$

wobei freilich $\mathfrak{B}$ nicht $= \mathfrak{A}$ sein darf.

Sei nun im Anfange der Bewegung $p = 0$, $q = 0$, $r = r_0$, so ist

$$\alpha^2 = \mathfrak{C} r_0^2, \; \beta^2 = \mathfrak{C}^2 r_0^2,$$

also

$$p^2 = \frac{\mathfrak{C}(\mathfrak{B}-\mathfrak{C})}{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})}(r_0^2 - r^2), \quad q^2 = \frac{\mathfrak{C}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})}{\mathfrak{A}(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})}(r_0^2 - r^2).$$

Gesetzt nun es sei $\mathfrak{C}$ das grösste der drei Trägheitsmomente, so wäre

$$p^2 q^2 = \frac{\mathfrak{C}(\mathfrak{B}-\mathfrak{C})(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})}{\mathfrak{A}^2(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})^2}(r_0^2 - r^2)^2$$

offenbar negativ, was unzulässig ist. Demnach muss p^2 (oder q^2) Null sein, d. h. $r^2 = r_0^2$ und folglich immer $p = q = 0$.

Ist $\mathfrak{C}$ das kleinste der drei (Haupt-) Trägheitsmomente, so gilt dasselbe; ist aber $\mathfrak{C}$ das mittlere, so kann man denselben Schluss nicht mehr machen. **Beginnt also der Körper** (wenn keine äussern Kräfte wirken) **seine Drehung um die Axe des grössten oder kleinsten der drei Hauptträgheitsmomente, so dreht er sich immer mit gleichförmiger Geschwindigkeit um dieselbe Axe.**

X. Die obigen Entwicklungen schliessen den Fall $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ (oder $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$) aus.

Für $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ ist aus (62) sofort

$$p = \alpha, \; q = \beta, \; r = \gamma,$$

wo α, β, γ Konstanten, und die Sache ist erledigt.

Für $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ ist

$$\frac{dr}{dt} = 0, \; r = r_0;$$

$$\mathfrak{A}\frac{dp}{dt} + (\mathfrak{C}-\mathfrak{B}) q r_0 = 0, \; \mathfrak{B}\frac{dq}{dt} + (\mathfrak{B}-\mathfrak{C}) p r_0 = 0 \; (\mathfrak{A} = \mathfrak{B}).$$

$$\mathfrak{A} p \frac{dp}{dt} + \mathfrak{B} q \frac{dq}{dt} = 0, \; p^2 + q^2 = \alpha^2,$$

und wenn anfänglich $p = 0$, $q = 0$, so ist $\alpha^2 = 0$, also immer $p = 0$, $q = 0$.

In diesen Fällen gilt der Satz ebenfalls, wobei $\mathfrak{C}$ jedenfalls als das kleinste oder grösste der Hauptträgheitsmomente angesehen werden kann.

Für den Fall $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ wollen wir anfänglich $p = r = 0$, $q = q_0$ annehmen. Dann wäre allgemein $r = 0$ und also

$$\frac{dp}{dt} = 0, \; \frac{dq}{dt} = 0; \; p = 0, \; q = q_0.$$

also würde auch jetzt eine Stabilität der Rotation um eine der gleichen Axen stattfinden. (Die Ergebnisse in IX und X gelten auch, wenn die Kräfte nach dem festen Punkt gerichtet sind, wie aus §. 3, I sofort erhellt.)

§. 9.

Allgemeinste Bewegung eines starren freien Körpers.

I. Ist ein starrer Körper vollkommen frei beweglich, so wird die Lage aller seiner einzelnen Punkte genau bekannt sein, wenn man zur Zeit t kennt:

die Lage eines bestimmten Punktes dieses Körpers,

die Lage dreier durch diesen Punkt gehender, mit dem Körper fest verbundener rechtwinkliger Axen.

Dazu reichen sechs Bestimmungsstücke aus, nämlich die Koordinaten des fraglichen Punktes, bezogen auf ein im Raume unveränderliches Koordinatensystem und die drei Richtungswinkel φ, ψ, δ des §. 8, I.

Als den bestimmten Punkt wählen wir den Schwerpunkt und als fest mit ihm verbundene Axen die durch diesen Schwerpunkt gehenden Hauptaxen (§. 6, V), wobei wir wohl nicht besonders anzumerken brauchen, dass diese Wahl eine willkürliche ist, und sich vorerst nur dadurch empfiehlt, dass die betreffenden Stücke sich immer auffinden lassen. Allerdings wird sich auch herausstellen, dass dadurch die Behandlung vereinfacht wird.

Seien zur Zeit t

ξ, η, ζ die Koordinaten des Schwerpunkts,

φ, ψ, δ die drei Winkel des §. 8, I,

Alles bezogen auf ein festes Koordinatensystem der x, y, z, wobei die Konstruktion des beweglichen Koordinatensystems dadurch vollzogen wird, dass man zuerst durch den Schwerpunkt ein mit dem festen paralleles legt und von diesem aus nach der Vorschrift in §. 8, I das bewegliche der x', y', z' mittelst der Winkel φ, ψ, δ konstruirt.

Beziehen sich, für den Punkt m, die Werthe x', y', z' auf die beweglichen Axen, so hat man

$$x = \xi + a_1 x' + b_1 y' + c_1 z', \quad y = \eta + a_2 x' + b_2 y' + c_2 z',$$
$$z = \zeta + a_3 x' + b_3 y' + c_3 z', \qquad \text{(a)}$$

wo

$$a_1, \ldots, c_3$$

dieselben Werthe haben wie in §. 8, also natürlich auch alle dort gefundenen Beziehungen gelten.

Berechnung der lebendigen Kraft und der Q.

II. Es ist

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d\xi}{dt}+x'\frac{da_1}{dt}+y'\frac{db_1}{dt}+z'\frac{dc_1}{dt},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{d\eta}{dt}+x'\frac{da_2}{dt}+y'\frac{db_2}{dt}+z'\frac{dc_2}{dt},$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{d\zeta}{dt}+x'\frac{da_3}{dt}+y'\frac{db_3}{dt}+z'\frac{dc_3}{dt}.$$

Zugleich ist, weil der gewählte Punkt Schwerpunkt ist:

$$\Sigma m x'=0,\ \Sigma m y'=0,\ \Sigma m z'=0; \tag{b}$$

und weil die Axen Hauptaxen sind (§. 6, II, VI)

$$\Sigma m x'y'=0,\ \Sigma m x'z'=0;\ \Sigma m x'z'=0,\ \Sigma m(x'^2+y'^2)=\mathfrak{H},\ \Sigma m(x'^2+z'^2)=\mathfrak{G},$$
$$\Sigma m(y'^2+z'^2)=\mathfrak{F}, \tag{c}$$

so dass

$$2T=\Sigma m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]=\Sigma m\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right]$$
$$+2\frac{d\xi}{dt}\Sigma m\left(x'\frac{da_1}{dt}+y'\frac{db_1}{dt}+z'\frac{dc_1}{dt}\right)+2\frac{d\eta}{dt}\Sigma m\left(x'\frac{da_2}{dt}+y'\frac{db_2}{dt}+z'\frac{dc_2}{dt}\right)$$
$$+2\frac{d\zeta}{dt}\Sigma m\left(x'\frac{da_3}{dt}+y'\frac{db_3}{dt}+z'\frac{dc_3}{dt}\right)+\Sigma m\left[\left(x'\frac{da_1}{dt}+y'\frac{db_1}{dt}+z'\frac{dc_1}{dt}\right)^2\right.$$
$$\left.+\left(x'\frac{da_2}{dt}+y'\frac{db_2}{dt}+z'\frac{dc_2}{dt}\right)^2+\left(x'\frac{da_3}{dt}+y'\frac{db_3}{dt}+z'\frac{dc_3}{dt}\right)^2\right],$$

d. h. mit Berücksichtigung von (b) und (c), so wie §. 8, II:

$$2T=\Sigma m\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right]+\mathfrak{F}p^2+\mathfrak{G}q^2+\mathfrak{H}r^2.$$

Aber wenn M die Masse, so ist $\Sigma m=M$, mithin

$$2T=M\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right]+\mathfrak{F}p^2+\mathfrak{G}q^2+\mathfrak{H}r^2, \tag{63}$$

wo p, q, r durch (54) gegeben sind und

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2$$

das Quadrat der Geschwindigkeit des Schwerpunkts ausdrückt.

Für die (sechs) Q hat man:

$$Q_1=\Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial\xi}+Y\frac{\partial y}{\partial\xi}+Z\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)=\Sigma X,$$

$$Q_2=\Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial\eta}+Y\frac{\partial y}{\partial\eta}+Z\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)=\Sigma Y,$$

$$Q_3=\Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial\zeta}+Y\frac{\partial y}{\partial\zeta}+Z\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right)=\Sigma Z;$$

Q_4, Q_5, Q_6 haben dieselben Werthe wie Q_1, Q_2, Q_3 in §. 8, II.

Aufstellung der Bewegungsgleichungen.

III. Die Grössen

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \varphi,\ \psi,\ \delta$$

sind die ξ des §. 5, IV, wo $k = 6$, so dass man also hat

$$\left.\begin{aligned}
&M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma X,\ M\frac{d^2\eta}{dt^2} = \Sigma Y,\ M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma Z,\\
&\mathfrak{F}\frac{dp}{dt} + (\mathfrak{H} - \mathfrak{G})\,qr = \Sigma(y'Z' - z'Y'),\\
&\mathfrak{G}\frac{dq}{dt} + (\mathfrak{F} - \mathfrak{H})\,pr = \Sigma(z'X' - x'Z'),\\
&\mathfrak{H}\frac{dr}{dt} + (\mathfrak{G} - \mathfrak{F})\,pq = \Sigma(x'Y' - y'X').
\end{aligned}\right\}\quad (64)$$

Die drei ersten Gleichungen sind die (14) des §. 2, die drei anderen die (56) des §. 8. Doch ist hiebei zu beachten, dass die zweiten Seiten der (64) im Allgemeinen die sechs Grössen

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \varphi,\ \psi,\ \delta$$

enthalten können.

Enthalten

$$\Sigma X,\ \Sigma Y,\ \Sigma Z$$

nur

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,$$

so ist die Bewegung des Schwerpunkts unabhängig von der Rotation und die Aufgabe dadurch erleichtert.

Kanonische Form, im Falle einer Kräftefunktion.

IV. Ist eine Kräftefunktion V (§. 5, V) vorhanden, so setze man (§. 5, VI)

$$\frac{\partial T}{\partial \xi'} = \lambda_1,\ \frac{\partial T}{\partial \eta'} = \lambda_2,\ \frac{\partial T}{\partial \zeta'} = \lambda_3,\ \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \lambda_4,\ \frac{\partial T}{\partial \psi'} = \lambda_5,\ \frac{\partial T}{\partial \delta'} = \lambda_6,$$

von welchen Gleichungen die drei ersten heissen

$$M\xi' = \lambda_1,\ M\eta' = \lambda_2,\ M\zeta' = \lambda_3,$$

die drei andern aber wie in §. 8, IV lauten; und bestimme hieraus

$$\xi',\ \eta',\ \zeta',\ \varphi',\ \psi',\ \delta',$$

welche Werthe in T (§. 5, IX) einzusetzen sind, wodurch diese Grösse (§. 8, IV) wird

$$2T = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}{M} + \frac{[(\lambda_6 - \lambda_4\cos\delta)\sin\varphi + \lambda_6\cos\varphi\sin\delta]^2}{\mathfrak{F}\sin^2\delta}$$

$$+ \frac{[\lambda_5 - \lambda_4\cos\delta)\cos\varphi - \lambda_6\sin\varphi\sin\delta]^2}{\mathfrak{G}\sin^2\delta} + \frac{\lambda_4^2}{\mathfrak{H}}. \quad (d)$$

Setzt man nun (§. 5, IX, §. 8, IV)

$\Phi = T - V$, T aus (d) gezogen, V in $\xi, \eta, \zeta, \varphi, \psi, \delta$ ausgedrückt,

so ist (§. 5, VI):

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_2}, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_3}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_4}, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_5}, \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_6};$$

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad \frac{d\lambda_2}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad \frac{d\lambda_3}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}, \quad \frac{d\lambda_4}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad \frac{d\lambda_5}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \psi}, \quad \frac{d\lambda_6}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \delta}. \qquad (64')$$

Dabei kann V ganz wohl noch t enthalten (nur nicht die Differentialquotienten von $\xi, \eta, \zeta, \varphi, \psi, \delta$).

Integration.

V. Enthält Φ (d. h. V) die Zeit t entwickelt, so hat man nach §. 5, VII einen Werth λ als Funktion von

$$\xi, \eta, \zeta, \varphi, \psi, \delta, t$$

mit sechs willkürlichen Konstanten

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_6,$$

von denen jedoch keine bloss addirt sein darf, zu suchen, welcher der partiellen Differentialgleichung

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2M}\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \zeta}\right)^2\right] + \frac{1}{2\mathfrak{H}}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi}\right)^2 \\ &+ \frac{1}{2\mathfrak{G} \sin^2\delta}\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \psi} - \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi}\cos\delta\right)\cos\varphi - \frac{\partial \lambda}{\partial \delta}\sin\varphi \sin\delta\right]^2 \\ &+ \frac{1}{2\mathfrak{F} \sin^2\delta}\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \psi} - \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi}\cos\delta\right)\sin\varphi + \frac{\partial \lambda}{\partial \delta}\cos\varphi \sin\delta\right]^2 - V + \frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (65)$$

genügt, und hat dann als Integralgleichungen der Bewegung die (39′), nämlich

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \lambda}{\partial \xi} = M\frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} = M\frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} = M\frac{d\zeta}{dt}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} = \frac{\partial T}{\partial \varphi'}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \psi} = \frac{\partial T}{\partial \psi'}, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \delta} = \frac{\partial T}{\partial \delta'}; \\ &\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_3} = \beta_3, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_4} = \beta_4, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_5} = \beta_5, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_1} = \beta_6, \end{aligned}\right\} \quad (65')$$

mit den zwölf willkürlichen Konstanten

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_6, \beta_1, \ldots, \beta_6.$$

Dabei lösen die sechs letzten (65′) die Aufgabe; die sechs ersten dienen zur Kontrole und (etwa) Bestimmung der willkürlichen Konstanten, ergeben sich aber selbstverständlich aus den andern. Aus §. 8, III ist

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial \psi'} = \mathfrak{F} p \sin\varphi \sin\delta + \mathfrak{G} q \cos\varphi \sin\delta + \mathfrak{H} r \cos\delta, \\ &\frac{\partial T}{\partial \delta'} = \mathfrak{F} p \cos\varphi - \mathfrak{G} q \sin\varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \mathfrak{H} r. \end{aligned}\right\} \quad (f)$$

VI. Enthält V, also auch Φ die Zeit nicht entwickelt, so hat man eine Auflösung der partiellen Differentialgleichung (§. 5, VIII)

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2\mathrm{M}}\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\zeta}\right)^2\right]+\frac{1}{2\mathfrak{H}}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\right)^2\\ \quad+\frac{1}{2\mathfrak{G}\sin^2\delta}\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\psi}-\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\cos\delta\right)\cos\varphi-\frac{\partial\lambda}{\partial\delta}\sin\varphi\sin\delta\right]^2\\ \quad+\frac{1}{2\mathfrak{F}\sin^2\delta}\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\psi}-\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\cos\delta\right)\sin\varphi+\frac{\partial\lambda}{\partial\delta}\cos\varphi\sin\delta\right]^2-\mathrm{V}+\mathrm{a}=0\end{array}\right\}\quad(66)$$

zu suchen mit fünf willkürlichen Konstanten (keine addirt)

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_5,$$

und es sind die Integralgleichungen der Aufgabe:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}=\mathrm{M}\frac{d\xi}{dt},\ \frac{\partial\lambda}{\partial\eta}=\mathrm{M}\frac{d\eta}{dt},\ \frac{\partial\lambda}{\partial\zeta}=\mathrm{M}\frac{d\zeta}{dt},\ \frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}=\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial\varphi'},\ \frac{\partial\lambda}{\partial\psi}=\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial\psi'},\ \frac{\partial\lambda}{\partial\delta}=\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial\delta'};\\ \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_1}=\beta_1,\ \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_2}=\beta_2,\ \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_3}=\beta_3,\ \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_4}=\beta_4,\ \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_5}=\beta_5,\ \frac{\partial\lambda}{\partial\mathrm{a}}+\mathrm{t}=\beta_6.\end{array}\right\}\quad(66')$$

mit den zwölf willkürlichen Konstanten

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_5,\ \mathrm{a},\ \beta_1, \ldots, \beta_6.$$

Fall, da keine äussern Kräfte vorhanden sind.

VII. Die (64) heissen jetzt:

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{M}\frac{d^2\xi}{dt^2}=0,\ \mathrm{M}\frac{d^2\eta}{dt^2}=0,\ \mathrm{M}\frac{d^2\zeta}{dt^2}=0;\\ \mathfrak{F}\frac{d\mathrm{p}}{dt}+(\mathfrak{H}-\mathfrak{G})\mathrm{qr}=0,\ \mathfrak{G}\frac{d\mathrm{q}}{dt}+(\mathfrak{F}-\mathfrak{H})\mathrm{pr}=0,\ \mathfrak{H}\frac{d\mathrm{r}}{dt}+(\mathfrak{G}-\mathfrak{F})\mathrm{pq}=0,\end{array}\right\}\quad(67)$$

woraus sofort klar ist, dass die Bewegung des Schwerpunkts und die Rotation um denselben von einander ganz unabhängig sind. Es gelten für beide jetzt die in §. 2, III und §. 8, IX einzeln gefundenen Gesetze.

Der Schwerpunkt bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in gerader Linie, und um ihn dreht sich der Körper als wie wenn dieser Schwerpunkt fest wäre. Von einem Druck auf den Schwerpunkt kann hier keine Rede sein, weil kein fester Punkt vorhanden ist (§. 4).

Wollte man nach VI ($\mathrm{V}=0$) verfahren, so hätte man die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{\mathrm{M}}\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\zeta}\right)^2\right]+\frac{1}{\mathfrak{H}}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\right)^2\\ \quad+\frac{1}{\mathfrak{G}\sin^2\delta}\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\psi}-\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\cos\delta\right)\cos\varphi-\frac{\partial\lambda}{\partial\delta}\sin\varphi\sin\delta\right]^2\\ \quad+\frac{1}{\mathfrak{F}\sin^2\delta}\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\psi}-\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\cos\delta\right)\sin\varphi+\frac{\partial\lambda}{\partial\delta}\cos\varphi\sin\delta\right]^2+2\mathrm{a}=0.\end{array}\right\}\quad(68)$$

und die (66') lösen die Aufgabe.

In (68) kann man sofort setzen

$$\lambda = (\alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta) \sqrt{M} + \alpha_4 \psi + \mu \qquad (g)$$

und dann μ mit einer weitern Konstanten α_5 aus

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2a + \frac{1}{\mathfrak{H}} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \varphi}\right)^2$$

$$+ \frac{1}{\mathfrak{G} \sin^2 \delta} \left[\left(\alpha_4 - \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} \cos \delta\right) \cos \varphi - \frac{\partial \mu}{\partial \delta} \sin \varphi \sin \delta\right]^2$$

$$+ \frac{1}{\mathfrak{F} \sin^2 \delta} \left[\left(\alpha_4 - \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} \cos \delta\right) \sin \varphi + \frac{\partial \mu}{\partial \delta} \cos \varphi \sin \delta\right]^2 = 0 \qquad (68')$$

bestimmen.

Die (66′) sind jetzt:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 \sqrt{M} = M \frac{d\xi}{dt}, \quad \alpha_2 \sqrt{M} = M \frac{d\eta}{dt}, \quad \alpha_3 \sqrt{M} = M \frac{d\zeta}{dt}; \\ \xi \sqrt{M} + \frac{\partial \mu}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \eta \sqrt{M} + \frac{\partial \mu}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \zeta \sqrt{M} + \frac{\partial \mu}{\partial \alpha_3} = \beta_3; \\ \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} = \frac{\partial T}{\partial \varphi'}, \quad \alpha_4 = \frac{\partial T}{\partial \psi'}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \delta} = \frac{\partial T}{\partial \delta'}, \\ \psi + \frac{\partial \mu}{\partial \alpha_4} = \beta_4, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \alpha_5} = \beta_5, \quad \frac{\partial \mu}{\partial a} + t = \beta_6. \end{array}\right\} \quad (h)$$

Die Summe

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2a$$

geht ungetrennt in μ ein; heisst sie c, so ist

$$\frac{\partial \mu}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial \mu}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial \alpha_1} = 2\alpha_1 \frac{\partial \mu}{\partial c}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \alpha_2} = 2\alpha_2 \frac{\partial \mu}{\partial c}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \alpha_3} = 2\alpha_3 \frac{\partial \mu}{\partial c}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial a} = 2 \frac{\partial \mu}{\partial c}.$$

Da nun

$$\frac{\partial \mu}{\partial a} = \beta_6 - t, \quad \frac{\partial \mu}{\partial c} = \tfrac{1}{2}\beta_6 - \tfrac{1}{2} t,$$

so heissen die sechs ersten (h):

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 \sqrt{M} = M \frac{d\xi}{dt}, \quad \alpha_2 \sqrt{M} = M \frac{d\eta}{dt}, \quad \alpha_3 \sqrt{M} = M \frac{d\zeta}{dt}, \\ \xi \sqrt{M} + \alpha_1 \beta_6 - \alpha_1 t = \beta_1, \quad \eta \sqrt{M} + \alpha_2 \beta_6 - \alpha_2 t = \beta_2, \quad \zeta \sqrt{M} + \alpha_3 \beta_6 - \alpha_3 t = \beta_3, \end{array}\right\} \quad (h')$$

wodurch die ersten drei mit den letzten zusammenstimmen, und die Bewegung des Schwerpunkts bestimmen. Die sechs letzten in (h) bestimmen die Rotation. Dass in die (h′) scheinbar sieben Konstanten eintreten

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_6)$$

wird keine Schwierigkeit machen, da man offenbar die (h′) schreiben kann:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\alpha_1}{\sqrt{M}}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{\alpha_2}{\sqrt{M}}, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\alpha_3}{\sqrt{M}},$$

$$\xi = \frac{\alpha_1}{\sqrt{M}} t + C_1, \quad \eta = \frac{\alpha_2}{\sqrt{M}} t + C_2, \quad \zeta = \frac{\alpha_3}{\sqrt{M}} t + C_3,$$

wodurch sie vollständig zusammenfallen und nur sechs Konstanten enthalten.

Für den besondern Fall dass $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$, wird die (68'):

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2\alpha + \frac{1}{\mathfrak{H}}\left(\frac{\partial \mu}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{\mathfrak{F}\sin^2\delta}\left[(\alpha_4 - \frac{\partial \mu}{\partial \varphi}\cos\delta)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \delta}\right)^2 \sin^2\delta\right] = 0,$$

wo man noch

$$\mu = \alpha_5 \varphi + \nu$$

setzen kann und ν zu bestimmen ist (ohne Konstante) aus

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2a + \frac{\alpha_5^2}{\mathfrak{H}} + \frac{(\alpha_4 - \alpha_5\cos\delta)^2}{\mathfrak{F}\sin^2\delta} + \frac{1}{\mathfrak{F}}\left(\frac{\partial \nu}{\partial \delta}\right)^2 = 0;$$

demnach wäre jetzt

$$\lambda = (\alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta)\sqrt{M} + \alpha_4 \psi + \alpha_5 \varphi$$

$$\pm \sqrt{\mathfrak{F}}\int\sqrt{-2a - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 - \frac{\alpha_5^2}{\mathfrak{H}} - \frac{(\alpha_4 - \alpha_5\cos\delta)^2}{\mathfrak{F}\sin^2\delta}}\,\partial\delta$$

und das Problem vollständig gelöst. Zusammengesetzter ist die Auflösung allerdings, wenn nicht $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$; doch hat Richelot (Abhandlungen der Berliner Akademie aus dem Jahre 1850) auch diesen Fall gelöst. (Eigentlich den zu §. 8 gehörigen, doch ist die Rechnung ganz dieselbe).

§. 10.

Untersuchungen über die lebendige Kraft.

I. Nach §. 5, III nennt man die Grösse

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] \qquad (69)$$

die lebendige Kraft eines Systems zur Zeit t, wo x, y, z die (rechtwinkligen) Koordinaten eines Punktes des Systems (von der Masse) m sind, und das Summenzeichen sich auf alle Punkte des Systems erstreckt.

Heisst man v die Geschwindigkeit des Punktes m, so ist auch

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma m v^2. \qquad (69')$$

Mit der genauern Betrachtung dieser Grösse wollen wir uns hier beschäftigen.

Multiplizirt man die (13) bezüglich mit

$$\frac{dx_r}{dt},\ \frac{dy_r}{dt},\ \frac{dz_r}{dt},$$

so ergibt die Addition:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma_r m_r \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx_r}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_r}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_r}{dt}\right)^2\right]$$
$$=\Sigma_r\left(X_r\frac{dx_r}{dt}+Y_r\frac{dy_r}{dt}+Z_r\frac{dz_r}{dt}\right)-\tfrac{1}{2}\Sigma_r\Sigma_s P_{r,s}\frac{d\varrho_{r,s}}{dt}$$
$$+\Sigma_r\Sigma_\varrho S_\varrho\left(\frac{\partial u_\varrho}{\partial x_r}\frac{dx_r}{dt}+\frac{\partial u_\varrho}{\partial y_r}\frac{dy_r}{dt}+\frac{\partial u_\varrho}{\partial z_r}\frac{dz_r}{dt}\right),$$

wo auf der zweiten Seite im ersten Gliede sich das Summenzeichen Σ_r auf alle Punkte des Systems erstreckt; in dem Gliede

$$\tfrac{1}{2}\Sigma_r\Sigma_s P_{r,s}\frac{d\varrho_{r,s}}{dt}$$

aber das eine Summenzeichen Σ_s zunächst bei festem r auf alle Punkte, d. h. auf alle s, * und dann das zweite Σ_r auf alle r; im dritten Gliede bezieht sich das Summenzeichen Σ_ϱ auf alle ϱ (was ohne Anstand zuzulassen ist, da, wenn die Koordinaten des Punktes m_r in einem u nicht vorkommen, dann

$$\frac{\partial u}{\partial x_r},\ \frac{\partial u}{\partial y_r},\ \frac{\partial u}{\partial z_r}$$

Null sind), das zweite Σ_r auf alle r.

Aber aus $u_\varrho = 0$ folgt

$$\frac{\partial u_\varrho}{\partial t}+\Sigma_r\left(\frac{\partial u_\varrho}{\partial x_r}\frac{dx_r}{dt}+\frac{\partial u_\varrho}{\partial y_r}\frac{dy_r}{dt}+\frac{\partial u_\varrho}{\partial z_r}\frac{dz_r}{dt}\right)=0,$$

also (§. 5, II)

$$\frac{dT}{dt}=\Sigma\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)-\tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma P\frac{d\varrho}{dt}-\Sigma_\varrho S_\varrho\frac{\partial u_\varrho}{\partial t}, \qquad (70)$$

wenn wir kurzweg $P_{r,s}$ durch P bezeichnen, $\varrho_{r,s}$ durch ϱ und die Summirungen wie oben verstanden sind.

Verstehen wir unter X, Y, Z die Seitenkräfte aller auf m wirkenden Kräfte, also sowohl der äussern als der innern, so können wir das zweite Glied der zweiten Seite mit dem ersten zusammenziehen und haben dann:

$$\frac{dT}{dt}=\Sigma\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)-\Sigma_\varrho S_\varrho\frac{\partial u_\varrho}{\partial t}. \qquad (71)$$

II. Die Grösse

$$X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}$$

lässt sich noch etwas anders ausdrücken. Seien nämlich

$$U_1, U_2, \ldots, U_n$$

die Kräfte, die auf den (einen) Punkt m wirken;

---

* Man kann Σ_s auf alle Punkte sich erstrecken lassen, d. h.

$$s = 1, 2, \ldots, n$$

setzen, da wenn ein Punkt auf m_r nicht mehr wirkt, nothwendig $P_{r,s}$ Null ist. Dass der Faktor $\frac{1}{2}$ zuzufügen war, ist aus §. 5, X klar.

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \ldots; \alpha_n, \beta_n, \gamma_n$$

ihre Richtungswinkel, so ist

$$X = U_1 \cos\alpha_1 + \ldots + U_n \cos\alpha_n, \quad Y = U_1 \cos\beta_1 + \ldots + U_n \cos\beta_n,$$
$$Z = U_1 \cos\gamma_1 + \ldots + U_n \cos\gamma_n.$$

Demnach

$$X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt} = U_1\left(\cos\alpha_1\frac{dx}{dt} + \cos\beta_1\frac{dy}{dt} + \cos\gamma_1\frac{dz}{dt}\right)$$
$$+ \ldots$$
$$\vdots$$
$$+ U_n\left(\cos\alpha_n\frac{dx}{dt} + \cos\beta_n\frac{dy}{dt} + \cos\gamma_n\frac{dz}{dt}\right).$$

Sei s der Bogen der Kurve, die m beschreibt, so ist $\frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit des Punktes (immer positiv gedacht), und wenn α, β, γ die Richtungswinkel derselben:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt}\cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt}\cos\beta, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{ds}{dt}\cos\gamma,$$

so dass

$$X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt} = U_1(\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1)\frac{ds}{dt}$$
$$+ \ldots$$
$$\vdots$$
$$+ U_n(\cos\alpha\cos\alpha_n + \cos\beta\cos\beta_n + \cos\gamma\cos\gamma_n)\frac{ds}{dt}.$$

Ist nun aber φ_1 der Winkel, den die Richtung der Kraft U_1 mit der Richtung der Geschwindigkeit macht: * ....., φ_n dieselbe Grösse für U_n: so ist also

$$X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt} = (U_1\cos\varphi_1 + \ldots + U_n\cos\varphi_n)\frac{ds}{dt}.$$

Ist R die Resultirende aller auf m wirkenden Kräfte, φ der Winkel den ihre Richtung mit der Geschwindigkeits (= Bewegungs)-Richtung von m macht, so ist

$$U_1\cos\varphi_1 + U_2\cos\varphi_2 + \ldots + U_n\cos\varphi_n = R\cos\varphi, \tag{72}$$

so dass endlich die (71) heisst

$$\frac{dT}{dt} = \Sigma R\cos\varphi\frac{ds}{dt} - \Sigma_e S_e\frac{\partial u_e}{\partial t} = \Sigma v R\cos\varphi - \Sigma_e S_e\frac{\partial u_e}{\partial t}, \tag{73}$$

wo v die Geschwindigkeit des Punktes m (auf den R wirkt). Dabei ist φ zwischen 0 und 180° gerechnet. (R ist natürlich durchaus positiv gedacht).

---

* Alle Geraden sind als Strahlen, d. h. nur nach einer Richtung hin verlängert, aufgefasst.

Aus (73) folgt

$$T - T_0 = \Sigma \int_\tau^t R \cos\varphi \frac{ds}{dt} dt - \Sigma_0 \int_\tau^t S_0 \frac{\partial u_0}{\partial t} dt \qquad (74)$$

oder auch

$$T - T_0 = \Sigma \int_\tau^t R v \cos\varphi \, dt - \Sigma_0 \int_\tau^t S_0 \frac{\partial u_0}{\partial t} dt,$$

worin T_0 der Werth von T für $t = \tau$ ist (und die obere Gränze der bestimmten Integrale grösser als τ soll gedacht sein, da wir die Zeit immer als wachsend angesehen haben). Dabei ist natürlich vorausgesetzt, dass in dem Systeme nur stetige Aenderungen vor sich gehen.

Wir müssen übrigens noch auf einen weitern Punkt aufmerksam machen. Da wir offenbar annehmen dürfen, dass der Bogen s mit der Zeit unaufhörlich wachse, so ist $\frac{ds}{dt}$ für uns kurzweg positiv, und nehmen wir also auch v geradezu als positiv an, so dass die Richtung von v dieselbe ist mit der Richtung der berührenden Geraden an den Punkt des Bogens, in dem m sich zur Zeit t befindet, diese Gerade nach der Seite des wachsenden Bogens hin gezogen. * Der Winkel φ ist folglich spitz, wenn Kraft und die so erklärte Geschwindigkeitsrichtung einen spitzen Winkel machen, so dass die Projektion der Kraft auf diese Richtung der berührenden Geraden auf die Seite des wachsenden Bogens fällt; φ ist stumpf, wenn die Projektion der Kraft auf die entgegengesetzte Seite fällt.

Begriff der Arbeit.

III. Die erste Grösse der zweiten Seite in (74) lässt sich noch etwas anders auslegen. Hält man den Begriff des bestimmten Integrals fest so ist

$$\int_\tau^t v R \cos\varphi \, dt$$

die Summe der Elemente

$$v R \cos\varphi \, \Delta t,$$

---

* Ist so $v = \frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit, so sind die Cosinus der Richtungswinkel derselben mit den Koordinatenaxen

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds},$$

wo $\frac{dx}{ds}$ positiv ist, wenn x wächst mit s, also mit der Zeit u. s. w. Demnach sind die Projektionen der Geschwindigkeit

$$\frac{ds}{dt}\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}, \quad \frac{ds}{dt}\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{ds}{dt}\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dt},$$

wie sich gehört.

wenn Δt unendlich klein. Eben so ist

$$\int_{\tau}^{t} R \cos\varphi \frac{ds}{dt} dt$$

die Summe der Elemente

$$R \cos\varphi \frac{ds}{dt} \Delta t.$$

Aber $v \Delta t$ ist das Element des Weges $= \Delta s$, so dass

$$v R \cos\varphi \Delta t = R \cos\varphi \Delta s,$$

wo Δs immer als positiv betrachtet wird.

$$R \cos\varphi$$

ist die Projektion der Kraft auf die Richtung dieses (mit wachsender Zeit wachsenden) Weges, so dass also

$$R \cos\varphi \Delta s$$

gleich ist dem (positiven) Wege Δs, den der Punkt in der unendlich kleinen Zeit Δt zurücklegt, multiplizirt mit der nach der Richtung des Weges zerlegten Kraft. * Dieses Produkt nennt man die Arbeit der Kraft in der Zeit Δt. Demnach stellt das erste Glied der zweiten Seite in (74) die Gesammtsumme der Arbeit aller Kräfte in der Zeit $t - \tau$ vor.

---

* Das bestimmte Integral

$$\int_{\tau}^{t} R \cos\varphi \frac{ds}{dt} dt$$

kurzweg gleich

$$\int_{\sigma}^{s} R \cos\varphi \, ds$$

setzen ist nach unserer Anschauung nicht zulässig, wenn nicht

$$R \cos\varphi$$

eine Funktion von s allein ist. Aber wenn man die „unendlich Kleinen" vermeiden will, so ist

$$\int_{\tau}^{t} R \cos\varphi \frac{ds}{dt} dt = Gr \sum_{\tau}^{t} R \cos\varphi \frac{ds}{dt} \Delta t;$$

ferner $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} + \alpha$, wo $Gr\,\alpha = 0$, so dass also

$$\int_{\tau}^{t} R \cos\varphi \frac{ds}{dt} dt = Gr \Sigma R \cos\varphi \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} - \alpha\right) \Delta t = Gr \Sigma R \cos\varphi \Delta s - Gr \Sigma \alpha R \cos\varphi \Delta t.$$

Da nun $\alpha R \cos\varphi$ mit Δt gegen Null geht, so ist bekanntlich

$$Gr \Sigma \alpha R \cos\varphi \Delta t = 0,$$

so dass

$$\int_{\tau}^{t} R \cos\varphi \frac{ds}{dt} dt = Gr \sum_{\tau}^{t} R \cos\varphi \Delta s.$$

Diess ist die strengere Begründung der ausgesprochenen Sätze.

Die (Elementar-) Arbeit

$$R \cos\varphi \, \Delta s$$

ist positiv, wenn $\cos\varphi$ positiv, d. h.

$$\varphi < 90^\circ;$$

sie ist negativ, wenn

$$\varphi > 90^\circ.$$

Macht also die Richtung der Kraft (nach der Seite hin gezählt, nach der sie den Punkt zu treiben sucht) mit der Richtung der wirklichen Bewegung einen spitzen Winkel, so ist die Arbeit der Kraft positiv oder fördernd; machen beide Richtungen dagegen einen stumpfen Winkel, so ist diese Arbeit negativ oder hemmend. Die letztere pflegt man auch widerstehende Arbeit oder kurzweg Widerstand zu heissen. Das oben betrachtete Glied in (74) ist der Unterschied beider Arten von Arbeiten.

Steht eine Kraft senkrecht zur Richtung des Weges, so ist ihre Arbeit gleich Null ($\varphi = 90^\circ$). Also wenn ein Punkt auf einer unveränderlichen Fläche bleiben muss, so ist die Arbeit des Druckes Null; wirklich fällt auch, wenn

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = 0,$$

die Grösse u_0 ganz in der Rechnung weg. Nach (72) ist übrigens die Arbeit der Resultirenden gleich der (algebraischen) Summe der Arbeiten aller Componenten.

Fall der Bedingungsgleichungen, welche die Zeit nicht enthalten.

IV. Sind die Gleichungen $u_0 = 0$ (§. 1, VI) so beschaffen, dass sie die Zeit t nicht entwickelt enthalten (d. h. also die betreffenden Flächen sich mit der Zeit nicht ändern), was in den meisten Fällen eintrifft, so heisst die (74):

$$T - T_0 = \Sigma \int_\tau^t R \cos\varphi \frac{ds}{dt} dt = \Sigma \int_\tau^t \left(X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \right) dt, \quad (74')$$

und es ist die Zunahme der lebendigen Kraft in der Zeit $t - \tau$ gleich dem Ueberschuss der fördernden Arbeit über die hemmende. Dabei ist zu beachten, dass T niemals negativ sein kann, wie diess aus (69) sofort hervorgeht, und dass für $T = 0$ nothwendig $v = 0$, dass dann also nothwendig **alle** Punkte stille stehen.

Arbeitsfähigkeit eines Systems.

V. Gesetzt es habe das System die lebendige Kraft T_0 und es seien in dem Systeme nur Kräfte, die bei der Bewegung hemmende Arbeit liefern,

und keine, welche fördern, was häufig bei Maschinen der Fall ist, so sind alle Elemente

$$R \cos\varphi \frac{ds}{dt} \varDelta t$$

negativ und es wird das System noch eine Zeit τ in Bewegung bleiben, gerechnet von dem Augenblicke an wo $T = T_0$ war und die hier aufgeführten Verhältnisse stattfinden, gegeben durch die Gleichung

$$0 = T_0 + \Sigma \int_0^\tau R \cos\varphi\, v\, dt, \tag{75}$$

wo natürlich das zweite Glied negativ ist. Alsdann ist nach (74′) $T = 0$, d. h. das ganze System steht nothwendig still und bleibt auch in Ruhe. Denn sollte unter denselben Bedingungen die Bewegung fortdauern, so würde

$$T_0 + \Sigma \int_0^t R \cos\varphi\, v\, dt$$

(d. h. T) negativ werden.

Die verrichtete Arbeit, in dem Sinne dass Widerstand überwunden, ist gleich T_0, so dass also ein System, dessen lebendige Kraft $= T_0$ ist, sich so lange bewegt, bis die verrichtete Arbeit gleich derselben ist.

Aus (74) folgt

$$T = T_0 + \Sigma \int_\tau^t R \cos\varphi\, v\, dt - \Sigma \int_\tau^t S_e \frac{\partial u_e}{\partial t} dt.$$

Das erste Glied (der zweiten Seite) ist die lebendige Kraft zur Zeit $t = \tau$; das zweite die Arbeit, wenn wir nur widerstehende Arbeit annehmen; soll nun $T = 0$ werden, so muss jetzt

$$T_0 = -\Sigma \int_\tau^t R \cos\varphi\, v\, dt + \Sigma \int_\tau^t S_e \frac{\partial u_e}{\partial t} dt$$

sein. Daraus folgt, dass in (74)

$$\Sigma \int_\tau^t S_e \frac{\partial u_e}{\partial t} dt$$

die Arbeit ist, welche auf die Aenderung der Gestalt der Flächen verwendet wurde.

Fall der Kräftefunktion.

VI. Besteht die Kräftefunktion V (§. 5, V) und sind die Bedingungsgleichungen frei von der Zeit, so ist aus (74′)

$$T - T_0 = \int_\tau^t \Sigma \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt.$$

Abér

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \Sigma\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right),$$

so dass

$$T - T_0 = \int_\tau^t \left(\frac{dV}{dt} - \frac{\partial V}{\partial t}\right) dt = V - V_0 - \int_\tau^t \frac{\partial V}{\partial t}\, dt. \qquad (76)$$

ist, wo V den Werth zur Zeit t, V_0 zur Zeit τ bezeichnet.

Ist V frei von t, so ist

$$T - T_0 = V - V_0, \qquad (76')$$

und es ist in diesem Satze das so genannte Prinzip der lebendigen Kräfte ausgesprochen. Dabei ist selbstverständlich vorausgesetzt, dass V eine mit der Zeit sich stetig ändernde Funktion sei.

Reduktion der lebendigen Kraft.

VII. Seien (wie in §. 2) ξ, η, ζ die Koordinaten des Schwerpunkts des Systems zur Zeit t, bezogen auf dieselben festen Koordinatenaxen, die wir seither immer betrachteten; durch diesen Schwerpunkt legen wir ein mit dem ersten paralleles Koordinatensystem, dessen Anfang hiernach beweglich ist. Seyen x, y, z die Koordinaten des Punktes m für die festen; x', y', z' für die beweglichen Axen. Dann ist

$$x = \xi + x',\; y = \eta + y',\; z = \zeta + z';\; \Sigma m x' = 0,\; \Sigma m y' = 0,\; \Sigma m z' = 0. \qquad (a)$$

Daraus

$$2T = \Sigma m\left[\left(\frac{d\xi}{dt} + \frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt} + \frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt} + \frac{dz'}{dt}\right)^2\right]$$

$$= \Sigma m\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right] + \Sigma m\left[\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt}\right)^2\right],$$

da wegen (a)

$$\Sigma m \frac{dx'}{dt} = 0,\; \Sigma m \frac{d\xi}{dt}\frac{dx'}{dt} = \frac{d\xi}{dt}\Sigma m \frac{dx'}{dt} = 0$$

u. s. w.

Ist w die Geschwindigkeit des Schwerpunkts, so dass

$$w^2 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2; \qquad (b)$$

ist ferner v' die relative Geschwindigkeit des Punktes m in Bezug auf auf den Schwerpunkt, d. h.

$$v'^2 = \left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt}\right)^2, \qquad (c)$$

so ist

$$2T = M w^2 + \Sigma m v'^2, \qquad (77)$$

wo M die Masse des Systems. [Vergl. §. 9, Glchg (63)].

Die „relative Geschwindigkeit" v' kann man erklären als die Geschwindigkeit, welche der Punkt m haben würde, wenn man neben seiner eigenen Geschwindigkeit ihm noch die des Schwerpunkts, letztere jedoch in der entgegengesetzten Richtung von der genommen die der Schwerpunkt selbst hat, zutheilen würde. Es ergibt sich diess unmittelbar aus den Formeln

$$\frac{dx'}{dt}=\frac{dx}{dt}-\frac{d\xi}{dt},\quad \frac{dy'}{dt}=\frac{dy}{dt}-\frac{d\eta}{dt},\quad \frac{dz'}{dt}=\frac{dz}{dt}-\frac{d\zeta}{dt},$$

in denen übrigens von der besondern Eigenschaft des Schwerpunkts noch keine Rede ist.

§. 11.

Bewegung eines festen Körpers bei Berücksichtigung der innern Kräfte.

I. Wir wollen uns einen Körper denken, der die Eigenschaften eines starren habe, nur dass seine einzelnen Punkte kleine Schwingungen um ihre Ruhelage* ausführen können, in diese aber sofort zurückkehren, sobald die Schwingungen aufhören. Sonst soll der Körper völlig frei sein.

Aus §. 2 folgt nun sofort, dass der Schwerpunkt des Körpers sich so bewegt, als wenn die innern Kräfte nicht vorhanden wären. Dabei müssen wir aber auf einen Umstand aufmerksam machen. Die Kräfte X, Y, Z in in §. 1, VII können von den Koordinaten des bewegten Punktes abhängen; diese Koordinaten werden durch die innern Schwingungen geändert. Wir setzen nun voraus, dass die (äussern) Kräfte nur von den Koordinaten der Ruhelagen abhängen, was wir schon dürfen, da die Koordinaten der wirklichen Lagen (zur Zeit t) von denen der Ruhelagen nur wenig verschieden sind.

Wir wollen im Raume ein festes Koordinatensystem der x, y, z, uns denken; sodann durch den Schwerpunkt des als starr angesehenen Körpers ein bewegliches legen, das — wenn der Körper starr wäre — das der Hauptaxen wäre. Die Koordinaten eines Punktes des als starr angesehenen Körpers (der Ruhelagen) in Bezug auf diese Axen seien

$$x', y', z';\quad x'+\alpha,\qquad y'+\beta,\ z'+\gamma$$

die wirklichen Koordinaten zur Zeit t, wo α, β, γ sehr kleine Grössen sind. Die Koordinaten des Schwerpunkts zur Zeit t seien

$$\xi, \eta, \zeta;\quad x, y, z$$

die des Punktes m zur Zeit t, Alles bezogen auf die festen Axen.

* D. h. die Lage im starren Körper.

Dann ist (§. 9, I)

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi + a_1 (x' + \alpha) + b_1 (y' + \beta) + c_1 (z' + \gamma), \\ y &= \eta + a_2 (x' + \alpha) + b_2 (y' + \beta) + c_2 (z' + \gamma), \\ z &= \zeta + a_3 (x' + \alpha) + b_3 (y' + \beta) + c_3 (z' + \gamma), \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

wo

$$a_1, \ldots, c_3$$

dieselbe Bedeutung haben wie in §. 8, I. Zugleich ist (§. 6, II)

$$\Sigma m x' = 0,\ \Sigma m y' = 0,\ \Sigma m z' = 0,\ \Sigma m x' y' = 0,\ \Sigma m x' z' = 0,\ \Sigma m y' z' = 0. \quad (b)$$

Doch ist dabei zunächst wesentlich festzuhalten, dass der hier als Schwerpunkt bezeichnete Punkt nur der Schwerpunkt des als starr angesehenen Körpers ist, und wir erst nachzuweisen haben, dass der wirkliche Schwerpunkt des innerlich bewegten Körpers mit demselben zusammenfällt (III).

Bewegungsgleichungen.

II. Unserer Anschauung nach sind die innern Schwingungen bloss durch die innern Kräfte hervorgerufen. Demgemäss bestehen für jeden Punkt m_r die Gleichungen (§. 1, IX)

$$m_r \frac{d^2\alpha_r}{dt^2} = -\Sigma_s P_{r,s} \frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial \alpha_r},\ m_r \frac{d^2\beta_r}{dt^2} = -\Sigma_s P_{r,s} \frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial \beta_r},\ m_r \frac{d^2\gamma_r}{dt^2} = -\Sigma_s P_{r,s} \frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial \gamma_r}. \quad (c)$$

Dabei ist

$$\varrho^2_{r,s} = (x_r' - x_s' + \alpha_r - \alpha_s)^2 + (y_r' - y'_s + \beta_r - \beta_s)^2 + (z_r' - z_s' + \gamma_r - \gamma_s)^2,$$

woraus

$$\begin{aligned} \varrho_{r,s} \frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial \alpha_r} &= x_r' - x_s' + \alpha_r - \alpha_s = x' + \alpha_r - (x_s' + \alpha_s) \\ &= a_1 (x_r - \xi) + a_2 (y_r - \eta) + a_3 (z_r - \zeta) - [a_1 (x_s - \xi) + a_2 (y_s - \eta) + a_3 (z - \zeta)] \\ &= a_1 (x_r - x_s) + a_2 (y_r - y_s) + a_3 (z_r - z_s). \end{aligned}$$

Da aber auch

$$\varrho^2_{r,s} = (x_r - x_s)^2 + (y_r - y_s)^2 + (z_r - z_s)^2,\ \varrho_{r,s} \frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial x_r} = x_r - x_s, \ldots,$$

so ist endlich (ϱ kurzweg für $\varrho_{r,s}$ gesetzt)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varrho}{\partial \alpha_r} &= a_1 \frac{\partial \varrho}{\partial x_r} + a_2 \frac{\partial \varrho}{\partial y_r} + a_3 \frac{\partial \varrho}{\partial z_r}, & \frac{\partial \varrho}{\partial x_r} &= a_1 \frac{\partial \varrho}{\partial \alpha_r} + b_1 \frac{\partial \varrho}{\partial \beta_r} + c_1 \frac{\partial \varrho}{\partial \gamma_r}, \\ \frac{\partial \varrho}{\partial \beta_r} &= b_1 \frac{\partial \varrho}{\partial x_r} + b_2 \frac{\partial \varrho}{\partial y_r} + b_3 \frac{\partial \varrho}{\partial z_r}, & \frac{\partial \varrho}{\partial y_r} &= a_2 \frac{\partial \varrho}{\partial \alpha_r} + b_2 \frac{\partial \varrho}{\partial \beta_r} + c_2 \frac{\partial \varrho}{\partial \gamma_r}, \\ \frac{\partial \varrho}{\partial \gamma_r} &= c_1 \frac{\partial \varrho}{\partial x_r} + c_2 \frac{\partial \varrho}{\partial y_r} + c_3 \frac{\partial \varrho}{\partial z_r}, & \frac{\partial \varrho}{\partial z_r} &= a_3 \frac{\partial \varrho}{\partial \alpha_r} + b_3 \frac{\partial \varrho}{\partial \beta_r} + c_3 \frac{\partial \varrho}{\partial \gamma_r}, \end{aligned}\right\} \quad (d)$$

Weiter ist nach §. 1, IX:

$$\left.\begin{array}{l} m_r \frac{d^2 x_r}{dt^2} = X_r - \Sigma_s P_{r,s} \frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial x_r}, \quad m_r \frac{d^2 y_r}{dt^2} = Y_r - \Sigma_s P_{r,s} \frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial y_r}, \\ \qquad\qquad m_r \frac{d^2 z_r}{dt^2} = Z_r - \Sigma_s P_{r,s} \frac{\partial \varrho_{r,s}}{\partial z_r}. \end{array}\right\} \quad (e)$$

Unter Beachtung von (a), (d), (c) folgt hieraus

$$\left.\begin{array}{l} m_r \left[\frac{d^2 \xi}{dt^2} + (x_r' + \alpha_r) \frac{d^2 a_1}{dt^2} + (y_r' + \beta_r) \frac{d^2 b_1}{dt^2} + (z_r' + \gamma_r) \frac{d^2 c_1}{dt^2} \right. \\ \qquad \left. + 2\left(\frac{d\alpha_r}{dt}\frac{da_1}{dt} + \frac{d\beta_r}{dt}\frac{db_1}{dt} + \frac{d\gamma_r}{dt}\frac{dc_1}{dt}\right)\right] = X_r, \\ m_r \left[\frac{d^2 \eta}{dt^2} + (x_r' + \alpha_r) \frac{d^2 a_2}{dt^2} + (y_r' + \beta_r) \frac{d^2 b_2}{dt^2} + (z_r' + \gamma_r) \frac{d^2 c_2}{dt^2} \right. \\ \qquad \left. + 2\left(\frac{d\alpha_r}{dt}\frac{da_2}{dt} + \frac{d\beta_r}{dt}\frac{db_2}{dt} + \frac{d\gamma_r}{dt}\frac{dc_2}{dt}\right)\right] = Y_r, \\ m_r \left[\frac{d^2 \zeta}{dt^2} + (x_r' + \alpha_r) \frac{d^2 a_3}{dt^2} + (y_r' + \beta_r) \frac{d^2 b_3}{dt^2} + (z_r' + \gamma_r) \frac{d^2 c_3}{dt^2} \right. \\ \qquad \left. + 2\left(\frac{d\alpha_r}{dt}\frac{da_3}{dt} + \frac{d\beta_r}{dt}\frac{db_3}{dt} + \frac{d\gamma_r}{dt}\frac{dc_3}{dt}\right)\right] = Z_r. \end{array}\right\} \quad (78)$$

In diesen Gleichungen darf man α_r, β_r, γ_r neben x_r', y_r', z_r' vernachlässigen, doch wollen wir jene Grössen vorerst noch beibehalten.

Schwerpunkt des bewegten Körpers.

III. Aus den (c) ergibt sich sofort

$$\Sigma m \frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0, \quad \Sigma m \frac{d^2\beta}{dt^2} = 0, \quad \Sigma m \frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0,$$

d. h.

$$\Sigma m \frac{d\alpha}{dt} = C_1, \qquad \Sigma m \frac{d\beta}{dt} = C_2, \qquad \Sigma m \frac{d\gamma}{dt} = C_3;$$

$$\Sigma m\alpha = C_1 t + E_1, \quad \Sigma m\beta = C_2 t + E_2, \quad \Sigma m\gamma = C_3 t + E_3.$$

Nun ist $\Sigma m\alpha$ die Abszisse des wirklichen Schwerpunkts, bezogen auf die beweglichen Axen der x', y', z'. Da derselbe sich — der Annahme nach — nicht unbegränzt weit von dem Schwerpunkt des starren Körpers entfernen kann, so muss nothwendig $C_1 = 0$ sein, weil sonst $\Sigma m\alpha$ mit der Zeit unbegränzt wachsen würde. Demnach ist immer

$$\Sigma m \frac{d\alpha}{dt} = 0, \quad \Sigma m \frac{d\beta}{dt} = 0, \quad \Sigma m \frac{d\gamma}{dt} = 0, \qquad (f)$$

und

$$\Sigma m\alpha, \ \Sigma m\beta, \ \Sigma m\gamma$$

sind unveränderlich. Fällt also einmal der Schwerpunkt des innerlich bewegten Körpers zusammen mit dem des starren, so ist diess immer so.

Diess dürfen wir aber sicher zu Anfang der Bewegung annehmen,* so dass also immer

$$\Sigma m\alpha = 0,\ \Sigma m\beta = 0,\ \Sigma m\gamma = 0, \tag{g}$$

woraus wegen (b)

$$\Sigma m(x' + \alpha) = 0,\ \Sigma m(y' + \beta) = 0,\ \Sigma m(z' + \gamma) = 0. \tag{g'}$$

Demnach fällt der wirkliche Schwerpunkt mit den in I betrachteten immer zusammen.

Unter Berücksichtigung der (f) und (g) bestimmt sich seine Bewegung aus

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma X,\ M\frac{d^2\eta}{dt} = \Sigma Y,\ M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Sigma Z, \tag{79}$$

welche Gleichungen aus (78) sich sofort ergeben (§. 2, I). Dabei enthalten die zweiten Seiten die innern Kräfte nicht, und nach der Annahme in I hängen dieselben auch nicht von den durch die innern Bewegungen hervorgebrachten Aenderungen der Koordinaten ab.

Berechnung der lebendigen Kraft.

IV. Aus (a) folgt

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + (x' + \alpha)\frac{da_1}{dt} + (y' + \beta)\frac{db_1}{dt} + (z' + \gamma)\frac{dc_1}{dt} + a_1\frac{d\alpha}{dt} + b_1\frac{d\beta}{dt} + c_1\frac{d\gamma}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\eta}{dt} + (x' + \alpha)\frac{da_2}{dt} + (y' + \beta)\frac{db_2}{dt} + (z' + \gamma)\frac{dc_2}{dt} + a_2\frac{d\alpha}{dt} + b_2\frac{d\beta}{dt} + c_2\frac{d\gamma}{dt},$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} + (x' + \alpha)\frac{da_3}{dt} + (y' + \beta)\frac{db_3}{dt} + (z' + \gamma)\frac{dc_3}{dt} + a_3\frac{d\alpha}{dt} + b_3\frac{d\beta}{dt} + c_3\frac{d\gamma}{dt}.$$

Mit Berücksichtigung von (b), (f), (g) folgt daraus

$$\begin{aligned}
2T = M\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right] &+ \Sigma m\left[(x'+\alpha)\frac{da_1}{dt} + (y'+\beta)\frac{db_1}{dt} + (z'+\gamma)\frac{dc_1}{dt}\right]^2 \\
&+ \Sigma m\left[(x'+\alpha)\frac{da_2}{dt} + (y'+\beta)\frac{db_2}{dt} + (z'+\gamma)\frac{dc_2}{dt}\right]^2 \\
&+ \Sigma m\left[(x'+\alpha)\frac{da_3}{dt} + (y'+\beta)\frac{db_3}{dt} + (z'+\gamma)\frac{dc_3}{dt}\right]^2 \\
+ \Sigma m\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2\right]& \\
+ 2\Sigma m\left[(x'+\alpha)\frac{da_1}{dt} + (y'+\beta)\frac{db_1}{dt} + (z'+\gamma)\frac{dc_1}{dt}\right]&\left[a_1\frac{d\alpha}{dt} + b_1\frac{d\beta}{dt} + c_1\frac{d\gamma}{dt}\right] \\
+ 2\Sigma m\left[(x'+\alpha)\frac{da_2}{dt} + (y'+\beta)\frac{db_2}{dt} + (z'+\gamma)\frac{dc_2}{dt}\right]&\left[a_2\frac{d\alpha}{dt} + b_2\frac{d\beta}{dt} + c_2\frac{d\gamma}{dt}\right]
\end{aligned}$$

---

* Wir betrachten hiernach den Anfangszustand als den der Ruhelagen, um die dann die innern Schwingungen vor sich gehen, während der Körper sich im Ganzen fortbewegt.

$$+2\Sigma m\left[(x'+\alpha)\frac{da_3}{dt}+(y'+\beta)\frac{db_3}{dt}+(z'+\gamma)\frac{dc_3}{dt}\right]\left[a_3\frac{d\alpha}{dt}+b_3\frac{d\beta}{dt}+c_3\frac{d\gamma}{dt}\right].$$

Wegen der (51), die ohnehin so eben benützt wurden, ist die Summe der drei letzten Glieder*

$$2\left(b_1\frac{da_1}{dt}+b_2\frac{da_2}{dt}+b_3\frac{da_3}{dt}\right)\Sigma m\left[(x'+\alpha)\frac{d\beta}{dt}-(y'+\beta)\frac{d\alpha}{dt}\right]$$

$$+2\left(a_1\frac{dc_1}{dt}+a_2\frac{dc_2}{dt}+a_3\frac{dc_3}{dt}\right)\Sigma m\left[(z'+\gamma)\frac{d\alpha}{dt}-(x'+\alpha)\frac{d\gamma}{dt}\right].$$

$$+2\left(c_1\frac{db_1}{dt}+c_2\frac{db_2}{dt}+c_3\frac{db_3}{dt}\right)\Sigma m\left[(y'+\beta)\frac{d\gamma}{dt}-(z'+\gamma)\frac{d\beta}{dt}\right].$$

$$=2r\,\Sigma m\left[(x'+\alpha)\frac{d\beta}{dt}-(y'+\beta)\frac{d\alpha}{dt}\right]+2q\,\Sigma m\left[(z'+\gamma)\frac{d\alpha}{dt}-(x'+\alpha)\frac{d\gamma}{dt}\right]$$

$$+2p\,\Sigma m\left[(y'+\beta)\frac{d\gamma}{dt}-(z'+\gamma)\frac{d\beta}{dt}\right],$$

wenn p, q, r die Bedeutung in §. 8, II haben (§. 8, VIII).

Die ersten Seiten der (c) heissen auch

$$m_r\frac{d^2(x_r'+\alpha_r)}{dt^2},\quad m_r\frac{d^2(y_r'+\beta_r)}{dt^2},\quad m_r\frac{d^2(z_r'+\gamma_r)}{dt^2}.$$

Daraus folgt nach §. 3, II, (18), dass weil die Grössen

$$\Sigma m_r F_r, \ldots$$

nicht unbegränzt wachsen können, sobald wir eine schwingende Bewegung untersuchen:

$$\Sigma m\left[(x'+\alpha)\frac{d\beta}{dt}-(y'+\beta)\frac{d\alpha}{dt}\right]=0,\quad \Sigma m\left[(z'+\gamma)\frac{d\alpha}{dt}-(x'+\alpha)\frac{d\gamma}{dt}\right]=0,$$

$$\Sigma m\left[(y'+\beta)\frac{d\gamma}{dt}-(z'+\gamma)\frac{d\beta}{dt}\right]=0, \tag{h}$$

so dass die betreffende Summe Null ist.

Ferner ist in der Summe der drei Quadrate gestattet, α, β, γ neben x', y', z' zu vernachlässigen, d. h. anzunehmen, dass durch die Schwingungen die Lage der wirklichen Hauptaxen, sowie die Werthe der wirklichen Hauptträgheitsmomente unmerklich abweichen von denen für den starren Körper.

Dadurch wird (§. 9, II)

---

* Es folgt aus (51):

$$a_1\frac{db_1}{dt}+a_2\frac{db_2}{dt}+a_3\frac{db_3}{dt}=-\left(b_1\frac{da_1}{dt}+b_2\frac{da_2}{dt}+b_3\frac{da_3}{dt}\right),$$

$$c_1\frac{da_1}{dt}+c_2\frac{da_2}{dt}+c_3\frac{da_3}{dt}=-\left(a_1\frac{dc_1}{dt}+a_2\frac{dc_2}{dt}+a_3\frac{dc_3}{dt}\right),$$

$$b_1\frac{dc_1}{dt}+b_2\frac{dc_2}{dt}+b_3\frac{dc_3}{dt}=-\left(c_1\frac{db_1}{dt}+c_2\frac{db_2}{dt}+c_3\frac{db_3}{dt}\right).$$

$$2T = Mw^2 + \mathfrak{A}p^2 + \mathfrak{B}q^2 + \mathfrak{C}r^2 + \Sigma m\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2\right], \quad (80)$$

wo w (wie in §. 10, VII) die Geschwindigkeit des Schwerpunkts ist.

Diese Grösse T lässt sich nun aber nicht wie in §. 5, IV benützen, da $\xi, \eta, \zeta, \varphi, \psi, \delta$ und die α, β, γ zu viele bestimmende Grössen sind.

Unsere vorhin gemachte Annahme wegen der Hauptträgheitsmomente kommt auf

$$\Sigma m(x' + \alpha)(y' + \beta) = 0,$$

u. s. w. hinaus. Daraus würde folgen

$$\Sigma m\left[(y' + \beta)\frac{d\alpha}{dt} + (x' + \alpha)\frac{d\beta}{dt}\right] = 0, {}^*$$

was in Verbindung mit (h) zu

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma m(x' + \alpha)\frac{d\beta}{dt} = 0, \quad \Sigma m(x' + \alpha)\frac{d\gamma}{dt} = 0, \quad \Sigma m(y' + \beta)\frac{d\alpha}{dt} = 0, \\ &\Sigma m(y' + \beta)\frac{d\gamma}{dt} = 0, \quad \Sigma m(z' + \gamma)\frac{d\alpha}{dt} = 0, \quad \Sigma m(z' + \gamma)\frac{d\beta}{dt} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (i)$$

führt. Auch hier dürfte man α, β, γ neben x', y', z' wohl vernachlässigen.

Berechnung der p, q, r.

V. Die (78) heissen, wenn man α, β, γ vernachlässigt:

$$m\left[\frac{d^2\xi}{dt^2} + x'\frac{d^2a_1}{dt} + y'\frac{d^2b_1}{dt} + z'\frac{d^2c_1}{dt^2} + 2\left(\frac{d\alpha}{dt}\frac{da_1}{dt} + \frac{d\beta}{dt}\frac{db_1}{dt} + \frac{d\gamma}{dt}\frac{dc_1}{dt}\right)\right] = X,$$

$$m\left[\frac{d^2\eta}{dt^2} + x'\frac{d^2a_2}{dt^2} + y'\frac{d^2b_2}{dt^2} + z'\frac{d^2c_2}{dt^2} + 2\left(\frac{d\alpha}{dt}\frac{da_2}{dt} + \frac{d\beta}{dt}\frac{db_2}{dt} + \frac{d\gamma}{dt}\frac{dc_2}{dt}\right)\right] = Y,$$

$$m\left[\frac{d^2\zeta}{dt} + x'\frac{d^2a_3}{dt^2} + y'\frac{d^2b_3}{dt^2} + z'\frac{d^2c_3}{dt^2} + 2\left(\frac{d\alpha}{dt}\frac{da_3}{dt} + \frac{d\beta}{dt}\frac{db_3}{dt} + \frac{d\gamma}{dt}\frac{dc_3}{dt}\right)\right] = Z.$$

Man wird nun bemerken, dass die ersten Seiten, wenn man α, β, γ wegliesse, ganz die in den Gleichungen wären, die in §. 9, I für die Bewegung

---

* Ist diese Grösse nicht $= 0$, sondern gleich μ, wo μ von der Zeit abhängt, so ist

$$\Sigma m(x' + \alpha)(y' + \beta) = \int_0^t \mu\, dt,$$

wenn man beachtet, dass im Anfang α und β Null waren, also genau die erste Seite Null. Aber

$$\int_0^t \mu\, dt = t\mu_1,$$

wo μ_1 ein Mittelwerth von μ, so dass weil

$$\Sigma m(x' + \alpha)(y' + \beta)$$

gewiss immer klein, auch μ_1 klein (und desto kleiner je grösser t). Da diess für alle t gilt, so folgt daraus, dass μ jedenfalls sehr klein sein muss.

eines Punktes aufzustellen gewesen wären. Daraus kann man schliessen, dass die (64) zum Vorschein kommen werden, und es liessen sich dieselben aus dieser Bemerkung auch finden. Doch wollen wir sie durch unmittelbare Rechnung ableiten.

Zerlegen wir X, Y, Z nach den Axen der x′, y′, z′, so ergibt sich aus vorstehenden Gleichungen (§. 8, II)

$$X' = m\Big[a_1 \frac{d^2\xi}{dt^2} + a_2 \frac{d^2\eta}{dt^2} + \alpha_3 \frac{d^2\zeta}{\partial t^2} + x'\left(a_1 \frac{d^2 a_1}{dt^2} + a_2 \frac{d^2 a_2}{dt^2} + a_3 \frac{d^2 a_3}{dt^2}\right)$$
$$+ y'\left(a_1 \frac{d^2 b_1}{dt^2} + a_2 \frac{d^2 b_2}{dt^2} + a_3 \frac{d^2 b_3}{dt^2}\right)$$
$$+ z'\left(a_1 \frac{d^2 c_1}{dt^2} + a_2 \frac{d^2 c_2}{dt^2} + a_3 \frac{d^2 c_3}{dt^2}\right) - 2r\frac{d\beta}{dt}$$
$$+ 2q\frac{d\gamma}{dt}\Big],$$

$$Y' = m\Big[b_1 \frac{d^2\xi}{dt^2} + b_2 \frac{d^2\eta}{dt^2} + b_3 \frac{d^2\zeta}{dt^2} + x'\left(b_1 \frac{d^2 a_1}{dt^2} + b_2 \frac{d^2 a_2}{dt} + b_3 \frac{d^2 a_3}{dt^2}\right)$$
$$+ y'\left(b_1 \frac{d^2 b_1}{dt^2} + b_2 \frac{d^2 b_2}{dt^2} + b_3 \frac{d^2 b_3}{dt^2}\right)$$
$$+ z'\left(b_1 \frac{d^2 c_1}{dt^2} + b_2 \frac{d^2 c_2}{dt^2} + b_3 \frac{d^2 c_3}{dt^2}\right) + 2r\frac{d\alpha}{dt}$$
$$-2p\frac{d\gamma}{dt}\Big],$$

$$Z' = m\Big[c_1 \frac{d^2\xi}{dt^2} + c_2 \frac{d^2\eta}{dt^2} + c_3 \frac{d^2\zeta}{dt^2} + x'\left(c_1 \frac{d^2 a_1}{dt^2} + c_2 \frac{d^2 a_2}{dt^2} + c_3 \frac{d^2 a_3}{dt^2}\right)$$
$$+ y'\left(c_1 \frac{d^2 b_1}{dt^2} + c_2 \frac{d^2 b_2}{dt^2} + c_3 \frac{d^2 b_3}{dt^2}\right)$$
$$+ z'\left(c_1 \frac{d^2 c_1}{dt^2} + c_2 \frac{d^2 c_2}{dt^2} + c_3 \frac{d^2 c_3}{dt^2}\right) - 2q\frac{d\alpha}{dt}$$
$$+ 2p\frac{d\beta}{dt}\Big].$$

Daraus mit Beachtung von (b), (i):

$$\Sigma(x'Y' - y'X') = \left(b_1 \frac{d^2 a_1}{dt^2} + b_2 \frac{d^2 a_2}{dt^2} + b_3 \frac{d^2 a_3}{dt^2}\right)\Sigma m x'^2$$
$$- \left(a_1 \frac{d^2 b_1}{dt^2} + a_2 \frac{d^2 b_2}{dt^2} + a_3 \frac{d^2 b_3}{dt^2}\right)\Sigma m y'^2.$$

Nun ist

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0, \quad \frac{d^2}{dt^2}(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) = 0,$$

d. h.

$$a_1 \frac{d^2 b_1}{dt^2} + a_2 \frac{d^2 b_2}{dt^2} + a_3 \frac{d^2 b_3}{dt_3} + 2\left(\frac{da_1}{dt} + \ldots\right) + b_1 \frac{d^2 a_1}{dt^2} + \ldots = 0.$$

Weiter aus §. 8, VIII:

$$b_1 \frac{d^2 a_1}{dt^2} + \ldots + \frac{da_1}{dt}\frac{db_1}{dt} + \ldots = \frac{dr}{dt},$$

also

$$a_1 \frac{d^2 b_1}{dt^2} + a_2 \frac{d^2 b_2}{dt^2} + a_3 \frac{d^2 b_3}{dt^2} = -\frac{dr}{dt} - \left(\frac{da_1}{dt}\frac{db_1}{dt} + \frac{da_2}{dt}\frac{db_2}{dt} + \frac{da_3}{dt}\frac{db_3}{dt}\right),$$

$$\Sigma(x'Y' - y'X') = \frac{dr}{dt}\Sigma m(x'^2 + y'^2) - \left(\frac{da_1}{dt}\frac{db_1}{dt} + \ldots\right)\Sigma m(x'^2 - y'^2)$$

$$= \mathfrak{H}\frac{dr}{dt} - \left(\frac{da_1}{dt}\frac{db_1}{dt} + \ldots\right)(\mathfrak{F} - \mathfrak{G}).$$

Aus

$$c_1 \frac{db_1}{dt} + c_2 \frac{db_2}{dt} + c_3 \frac{db_3}{dt} = p,\quad b_1 \frac{dc_1}{dt} + b_2 \frac{dc_2}{dt} + b_3 \frac{dc_3}{dt} = -p,$$

$$a_1 \frac{dc_1}{dt} + a_2 \frac{dc_2}{dt} + a_3 \frac{dc_3}{dt} = q,\quad c_1 \frac{da_1}{dt} + c_2 \frac{da_2}{dt} + c_3 \frac{da_3}{dt} = -q,$$

$$b_1 \frac{da_1}{dt} + b_2 \frac{da_2}{dt} + b_3 \frac{da_3}{dt} = r,\quad a_1 \frac{db_1}{dt} + a_2 \frac{db_2}{dt} + a_3 \frac{db_3}{dt} = -r,$$

$$a_1 \frac{da_1}{dt} + a_2 \frac{da_2}{dt} + a_3 \frac{da_3}{dt} = 0,\quad b_1 \frac{db_1}{dt} + b_2 \frac{db_2}{dt} + b_3 \frac{db_3}{dt} = 0,$$

$$c_1 \frac{dc_1}{dt} + c_2 \frac{dc_2}{dt} + c_3 \frac{dc_3}{dt} = 0,$$

erhält man

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da_1}{dt} &= b_1 r - c_1 q, & \frac{da_2}{dt} &= b_2 r - c_2 q, & \frac{da_3}{dt} &= b_3 r - c_3 q,\\
\frac{db_1}{dt} &= c_1 p - a_1 r, & \frac{db_2}{dt} &= c_2 p - a_2 r, & \frac{db_3}{dt} &= c_3 p - a_3 r,\\
\frac{dc_1}{dt} &= a_1 q - b_1 p, & \frac{dc_2}{dt} &= a_2 q - b_2 p, & \frac{dc_3}{dt} &= a_3 q - b_3 p.
\end{aligned}\right\} \quad (k)$$

Daraus dann sofort

$$\frac{da_1}{dt}\frac{db_1}{dt} + \frac{da_2}{dt}\frac{db_2}{dt} + \frac{da_3}{dt}\frac{db_3}{dt} = -pq,$$

so dass

$$\Sigma(x'Y' - y'X') = \mathfrak{H}\frac{dr}{dt} + (\mathfrak{G} - \mathfrak{F})pq,$$

welches die letzte der (64) ist. Eben so erhält man die übrigen.

Bestimmung der Bewegung.

VI. Aus V ergibt sich nun zur Bestimmung der Bewegung folgende Vorschrift.

Man behandelt den Körper als einen starren im Sinne des §. 9 und bestimmt so seine Lage zur Zeit t, so wie dessen fortschreitende (Schwerpunkts-) Bewegung und seine Drehung. Aus den (c) bestimmt man die Schwingungen ganz unabhängig hievon (§. 14), da die Gesammtbewegung

von diesen Schwingungen unmerklich berührt wird. Alsdann wird man aus der Zusammensetzung beider Bewegungen die eigentliche Bewegung jedes Punktes erhalten.

Die äussern Kräfte bedingen die erste Bewegung, die wir die mittlere nennen wollen; die innern die zweite. Dieses Ergebniss war vorauszusehen, da es in den gemachten Annahmen lag, auch deutet der Ausdruck (79) darauf hin.

Prinzip der lebendigen Kräfte.

VII. Die (74′) in §. 10, IV heisst nun

$$\tfrac{1}{2} M w^2 + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A} p^2 + \mathfrak{B} q^2 + \mathfrak{C} r^2) + \tfrac{1}{2}\Sigma m\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2\right] - T_0$$
$$= \Sigma \int_0^t \left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right)dt. \qquad (81)$$

Hier sind X, Y, Z die Gesammtkräfte; die x, y, z aber die aus (a) gezogenen, deren Differentialquotienten in IV gegeben sind.

Setzt man diese Werthe ein, so erhält man auf der zweiten Seite eine Reihe Glieder, die wir einzeln untersuchen wollen.

Es ist

$$\Sigma\left(X\frac{d\xi}{dt} + Y\frac{d\eta}{dt} + Z\frac{d\zeta}{dt}\right) = \Sigma m\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\frac{d\xi}{dt} + \frac{d^2\eta}{dt^2}\frac{d\eta}{dt} + \frac{d^2\zeta}{dt^2}\frac{d\zeta}{dt}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\Sigma m \frac{dw^2}{dt},$$

wie (79) sofort gibt. Also ist der Theil der zweiten Seite in (81), der diesen Gliedern zugehört, gleich $\frac{1}{2}Mw^2 - \frac{1}{2}Mw_0^2$, so dass man die (81) auch schreiben darf

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{A} p^2 + \mathfrak{B} q^2 + \mathfrak{C} r^2) + \tfrac{1}{2}\Sigma m\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2\right]$$
$$= C + \Sigma\int_0^t \left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right)dt, \qquad (81')$$

wo C der Werth der ersten Seite für $t=0$ ist und man auf der zweiten Seite ξ, η, ζ weglässt.

Trennt man die innern und äussern Kräfte, so ist für erstere

$$X_r\frac{dx_r}{dt} + Y_r\frac{dy_r}{dt} + Z_r\frac{dz_r}{dt} + X_s\frac{dx_s}{dt} + Y_s\frac{dy_s}{dt} + Z_s\frac{dz_s}{dt} = -f(\varrho_{r,s})\frac{d\varrho_{r,s}}{dt},$$

wenn $P_{r,s} = f(\varrho_{r,s})$ (§. 1, IV): also ist der hievon herrührende Theil

$$-\Sigma\int_0^t f(\varrho)\frac{d\varrho}{dt}dt = -\Sigma\int_{\varrho_0}^{\varrho} f(\varrho)\,d\varrho,$$

wo die Summirung auf alle verschiedenen Verbindungen je zweier Punkte

auszudehnen ist (und die letzte Form des Integrals verlangt, dass $f(\varrho)$ immer wieder denselben Werth annimmt, wenn ϱ dasselbe geworden).

Aus den (c) folgt aber

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2\right]=-\Sigma f(\varrho)\frac{d\varrho}{dt},$$

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2\right]+c=-\Sigma\int_0^t f(\varrho)\frac{d\varrho}{dt}\,dt,$$

so dass die (81′) ist

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{A}p^2+\mathfrak{B}q^2+\mathfrak{C}r^2)=C+\int_0^t\Sigma\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)dt, \qquad (81'')$$

wenn man hier nur die äussern Kräfte berücksichtigt, und in x, y, z die Schwerpunktskoordinaten wegbleiben. C ist der Werth der ersten Seite für $t=0$. Zerlegt man X, Y, Z nach den Axen der x', y', z', so ist

$$\begin{aligned}X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}&=(a_1X'+b_1Y'+c_1Z')\left(x'\frac{da_1}{dt}+y'\frac{db_1}{dt}+z'\frac{dc_1}{dt}+a_1\frac{d\alpha}{dt}\right.\\&\qquad\left.+b_1\frac{d\beta}{dt}+c_1\frac{d\gamma}{dt}\right)\\&+(a_2X'+b_2Y'+c_2Z')\left(x'\frac{da_2}{dt}+y'\frac{db_2}{dt}+z'\frac{dc_2}{dt}+a_2\frac{d\alpha}{dt}\right.\\&\qquad\left.+b_2\frac{d\beta}{dt}+c_2\frac{d\gamma}{dt}\right)\\&+(a_3X'+b_3Y'+c_3Z')\left(x'\frac{da_3}{dt}+y'\frac{db_3}{dt}+z'\frac{dc_3}{dt}+a_3\frac{d\alpha}{dt}\right.\\&\qquad\left.+b_3\frac{d\beta}{dt}+c_3\frac{d\gamma}{dt}\right)\\&=r(x'Y'-y'X')+q(z'X'-y'Z')+p(y'Z'-z'Y')\\&\qquad+X'\frac{d\alpha}{dt}+Y'\frac{d\beta}{dt}+Z'\frac{d\gamma}{dt},\end{aligned}$$

also wegen der (64):

$$\begin{aligned}\Sigma\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)&=r\left[\mathfrak{C}\frac{dr}{dt}+(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})pq\right]+q\left[\mathfrak{B}\frac{dq}{dt}+(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})pr\right]\\&\quad+p\left[\mathfrak{A}\frac{dp}{dt}+(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})qr\right]+\Sigma\left(X'\frac{d\alpha}{dt}+Y'\frac{d\beta}{dt}+Z'\frac{d\gamma}{dt}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^t\Sigma\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)dt&=\tfrac{1}{2}(\mathfrak{C}r^2+\mathfrak{B}q^2+\mathfrak{A}p^2)-C\\&\quad+\int_0^t\Sigma\left(X'\frac{d\alpha}{dt}+Y'\frac{d\beta}{dt}+Z'\frac{d\gamma}{dt}\right)dt,\end{aligned}$$

so dass in (81″):

$$0=\int_0^t\Sigma\left(X'\frac{d\alpha}{dt}+Y'\frac{d\beta}{dt}+Z'\frac{d\gamma}{dt}\right)dt, \qquad (m)$$

d. h. diese Grösse von der Gattung derer ist, die wir hier vernachlässigen.

VIII. Nach den vorstehenden Untersuchungen trennt sich die Gesammtarbeit

$$\int_0^t \Sigma\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)dt$$

in drei Theile:

1) die Arbeit der äussern Kräfte während der mittlern Bewegung, wobei von den Schwingungen ganz abzusehen, der Körper also nach §. 9 zu behandeln ist;
2) die Arbeit der äussern Kräfte während der Schwingungen, welche in (m) vorkommt, hier aber unmerklich ist;
3) die Arbeit der innern Kräfte während der Schwingungen, welche gleich

$$-\Sigma\int_0^t f(\varrho)\frac{d\varrho}{dt}\,dt$$

ist.

Der in 1) angegebene Werth ist allerdings nur eine Näherung, wie denn überhaupt die ganze Untersuchung auf die wesentliche Bedingung sehr kleiner Schwingungen gegründet ist.

Sind die hier gemachten Annahmen zulässig, so folgt aus den Untersuchungen in VII offenbar, dass man die Gleichung (74′) der lebendigen Kräfte auch zulassen kann, wenn man von den innern Bewegungen ganz absieht und nur die mittlere Bewegung beachtet, trotzdem dass diese innern Bewegungen bestehen.

Es geht diess aus (81″) hervor. Denn wegen (m) kann man auf der zweiten Seite jener Gleichung ganz wohl α, β, γ ganz unbeachtet lassen. Lässt man also dort α, β, γ weg, fügt aber den x, y, z die Schwerpunktskoordinaten bei, so ist nunmehr

$$\int_0^t \Sigma\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)dt+C=\tfrac{1}{2}(\mathfrak{F}p^2+\mathfrak{G}q^2+\mathfrak{H}r^2)$$
$$+\int_0^t \Sigma\left(X\frac{d\xi}{dt}+Y\frac{d\eta}{dt}+Z\frac{d\zeta}{dt}\right)dt,$$

d. h.

$$\int_0^t \Sigma\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)dt+C=\tfrac{1}{2}(\mathfrak{F}p^2+\mathfrak{G}q^2+\mathfrak{H}r^2)+\tfrac{1}{2}Mw^2-\tfrac{1}{2}Mw_0^2,$$

oder

$$\tfrac{1}{2}Mw^2+\tfrac{1}{2}(\mathfrak{F}p^2+\mathfrak{G}q^2+\mathfrak{H}r^2)=C'+\int_0^t \Sigma\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)dt, \quad (82)$$

wo auf der zweiten Seite nur die äussern Kräfte beachtet und x, y, z durch die Formeln (a) des §. 9, I gegeben sind. Dabei ist C′ der Werth der ersten Seite für $t=0$. Die (82) enthält den ausgesprochenen Satz, sie ist nämlich die (74′) unter der Annahme eines starren Körpers.

Arbeitsfähigkeit.

IX. Bei dem so eben erhaltenen Ergebnisse ist jedoch wesentlich zu beachten, dass C' nicht die ganze dem System anfänglich mitgetheilte lebendige Kraft ist, da C' eben bloss der Werth der ersten Seite für $t = 0$ ist. Diese ganze anfängliche lebendige Kraft ist T_0 in (81) und enthält in sich auch den Anfangswerth von

$$\frac{1}{2}\Sigma m\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2\right].$$

Theilt man also dem Systeme anfänglich eine gewisse lebendige Kraft mit, so wird ein Theil derselben dazu verwendet, innere Schwingungen hervorzurufen, während der andere die mittlere Bewegung erzeugt. Jener erste Theil ist thatsächlich wohl immer klein, und wird also auch nur dann von merklichem Einfluss werden, wenn überhaupt T_0 klein ist.

Würden die Körperpunkte schliesslich zur Ruhe gelangen, so würde immerhin auch der in ihnen enthaltene Theil verwendet sein (§. 10, V). Allein es ist diess nicht der Fall, d. h. es ist dieser Theil nicht zur Arbeit im gewöhnlichen Sinne verwendet, weil entweder die Schwingungen noch fortdauern auch wenn die mittlere Bewegung zu Ende ist, oder weil jene lebendige Kraft der Schwingungen sich den Aetherpunkten mittheilt, dort in den Erscheinungen der Wärme u. s. w. sich offenbart und so die schwingende Bewegung der Körperpunkte wohl aufhören kann, ohne dass die lebendige Kraft derselben zur Arbeit im frühern Sinne verwendet wurde. Verloren freilich geht diese lebendige Kraft nicht, wie überhaupt Nichts verloren geht, sondern sich nur umwandelt.

§. 12.

Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten.

I. An die Untersuchungen des §. 10 schliesst sich ganz unmittelbar der genaue Ausdruck des unter dem Namen des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten bekannten allgemeinen Satzes an. Wir haben von diesem Satze bereits in §. 1, VIII schon Gebrauch gemacht, allerdings in der dort geeigneten besondern Form, wollen aber hier näher auf denselben eingehen. Er wird sonst freilich an die Spitze der Mechanik gestellt; sein eigentlicher Ausdruck scheint uns jedoch erst durch die Feststellung des Begriffs der lebendigen Kraft darstellbar.

Wirkt auf ein System von Punkten ein System von Kräften, gleichgiltig welcher Art, ein und sind die Seitenkräfte der auf m_r wirkenden (Gesammt-) Kraft X_r, Y_r, Z_r, so sollen die Bedingungen aufgestellt werden, denen diese Kräfte genügen müssen, damit in dem Systeme selbst keine Bewegung eintrete, d. h. also dass jeder Punkt für

sich in Ruhe bleibe, wenn er es natürlich vorher schon ist, ehe die Kräfte zu wirken anfangen. Man sagt dann, es seien die Kräfte des Systems mit einander im Gleichgewicht.

Soll aber Ruhe in dem materiellen Systeme herrschen, so muss die Geschwindigkeit v_r jedes Punktes m_r Null sein. Man könnte nun unmittelbar untersuchen, indem man von den allgemeinen Gleichungen der Bewegung ausgienge, ob diess der Fall ist, und es würden sich dann die fraglichen Bedingungen ergeben müssen. Man kann aber auch anders verfahren, indem man untersucht ob die Grösse

$$T = \tfrac{1}{2} \Sigma m_r v_r^2 \qquad \text{(a)}$$

zu aller Zeit unter dem Einflusse der hier gedachten Kräfte Null ist. Sobald diess der Fall ist, müssen alle v_r nothwendig Null sein. Die Grösse T, die in unsern sämmtlichen Untersuchungen eine wichtige Rolle spielt, haben wir zu bilden gelehrt, und es ist daher für uns weit bequemer, diesen Weg einzuschlagen.

II. Statt nun aber zu untersuchen, ob die Gleichung

$$T = 0 \qquad (83)$$

erfüllt ist, wollen wir (wie in §. 1, VIII) untersuchen, ob

$$\frac{dT}{dt} = 0, \text{ d. h. } \Sigma m_r v_r \frac{dv_r}{dt} = 0 \qquad (84)$$

ist. Ist diess der Fall, so ist T konstant, und wenn dann nur zu Anfang der Zeit $T = 0$ ist, so ist die (83) immer erfüllt (d. h. T_0 soll $= 0$ sein).

Das Kräftesystem nehmen wir selbstverständlich als vollkommen unveränderlich an, da wir eben dieses System prüfen wollen in Bezug auf den möglichen Gleichgewichtszustand; wir werden die Kräfte also völlig als von der Zeit unabhängig uns denken (was um so mehr einleuchtend ist, als eben keine Bewegung erfolgen soll, also auch die Koordinaten der Punkte sich nicht ändern, wenn das fragliche Kräftesystem allein wirkt).

Die Gleichung (83) ist für das Gleichgewicht nothwendig und auch hinreichend. Ist sie nicht erfüllt, so sind auch nicht alle v_r Null, d. h. ist nicht allgemein Ruhe; ist sie erfüllt, so sind nothwendig alle v_r Null, ist also wirklich Ruhe im System. Statt der (83) kann die (84) eintreten, mit der dort beigefügten Bedingung.

Bedeutung der (84).

III. Wie so eben gezeigt, muss für das Gleichgewicht unter dem Einfluss der hier betrachteten Kräfte nothwendig die (84) erfüllt sein. * Wir

* Ist (84) erfüllt und $T_0 = 0$, so ist (83) richtig, und umgekehrt wenn (83) richtig ist, so folgt (84) daraus. Ist also (83) nothwendig und hinreichend, so ist auch (84) mit der Bedingung $T_0 = 0$ ebenfalls nothwendig und hinreichend.

haben also hier bloss die Bedeutung dieser Gleichung näher in's Auge zu fassen, um den gesuchten Satz, d. h. den Ausdruck des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten zu finden.

Wir dürfen natürlich nicht kurzweg annehmen, die gegebenen Kräfte halten das System in Ruhe, da wir sonst keine weitere Untersuchung mehr zu führen haben. Wir wollen uns also denken, es wäre unter dem Einfluss dieser unveränderlich bleibenden Kräfte eine Bewegung eingetreten. Diese könnte selbstverständlich nur mit Erfüllung aller Bedingungen, denen das Punktsystem etwa unterworfen ist (§. 1, III), erfolgen und gedacht werden.

Beim Beginn dieser Bewegung können wir offenbar $v_r = 0$ setzen, da wir ganz nothwendig voraussetzen müssen, dass die Punkte keine Bewegung haben und eine solche erst unter dem Einfluss der fraglichen Kräfte erlangen können. Demnach ist $T_0 = 0$, und es bleibt bloss die (84) zu untersuchen.

Sei nun die Zeit t von diesem Anfange her verflossen und dann x_r, y_r, z_r die Koordinaten des Punktes m_r, so dass (§. 1, I):

$$m_r \frac{d^2 x_r}{d t^2} = X_r, \quad m_r \frac{d^2 y_r}{d t^2} = Y_r, \quad m_r \frac{d^2 z_r}{d t^2} = Z_r.$$

Hieraus folgt (§. 10, I)

$$\frac{dT}{dt} = \Sigma\left(X_r \frac{d x_r}{d t} + Y_r \frac{d y_r}{d t} + Z_r \frac{d z_r}{d t}\right),$$

so dass die (84) auch heisst

$$\Sigma\left(X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt}\right) = 0 \qquad (84')$$

Nach §. 10, I fallen in dieser Gleichung die Kräfte, die mit S_0 (§. I, IX) zusammenhängen, ganz weg, da u_0 mit der Zeit als unveränderlich,* also $\frac{\partial u_0}{\partial t}$ als gleich Null muss betrachtet werden; es enthält also (84′) nur die äussern (und etwa auch innern) Kräfte, nie aber die Drucke auf Flächen.

Gemäss §. 10, II heisst die (84′) auch

$$\Sigma R \cos\varphi \frac{ds}{dt} = 0 \qquad (84'')$$

und da

$$R \cos\varphi \frac{ds}{dt}$$

(wo

---

* Wir betrachten ja das System in Bezug auf sein Gleichgewicht gerade in dem Stande, in dem es sich jetzt befindet, so dass Bedingungen und Kräfte sich nicht ändern dürfen, ohne dass man etwas Anderes zu untersuchen hätte.

$$R \cos\varphi$$

ganz wohl als unveränderlich angesehen werden kann) gleich ist dem Werthe von

$$R \cos\varphi \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

für ein unendlich kleines Δt, die (84″) also jedenfalls erfüllt ist, wenn für ein solches Δt kurzweg

$$\Sigma R \cos\varphi \, \Delta s = 0,$$

so kann man also (§. 10, III) sagen, dass wenn für ein unendlich kleines Δt

$$\Sigma R \cos\varphi \, \Delta s = 0, \qquad (85)$$

gewiss die (84″) auch erfüllt ist. Die (85) muss aber für ein solches Δt (und also auch Δs) genau erfüllt sein, also nicht bloss etwa

$$\Sigma R \cos\varphi \, \Delta s$$

unendlich klein sein, da sonst keineswegs die (84″) daraus folgt.

Darnach also ersetzt (85) die (84) und der Satz der virtuellen Geschwindigkeiten heisst:

Soll ein System materieller Punkte unter dem Einfluss bestimmter Kräfte im Gleichgewicht sein, so muss bei einer mit allen Bedingungen des Systems verträglichen, als möglich gedachten und in unendlich kleiner Zeit ausgeführten Bewegung die Gesammtarbeit dieser Kräfte Null sein. (Genauer gesprochen, das Verhältniss dieser Arbeit zum Zeitelemente muss Null sein.) Auf diese Weise entsteht nie Arbeit, also nie lebendige Kraft (§. 10, IV), bleibt also das System vollständig in Ruhe, sonst nicht.

Kräfte im Gleichgewicht, in Verbindung mit andern.

IV. Auf den Punkt m_r wirke die Kraft R_r, deren Seitenkräfte X_r, Y_r, Z_r seien, und die Kraft S_r, deren Seitenkräfte U_r, V_r, W_r sein mögen. Die Kräfte S sollen für sich das System im Gleichgewicht halten, so dass

$$\Sigma\left(U_r \frac{dx_r}{dt} + V_r \frac{dy_r}{dt} + W_r \frac{dz_r}{dt}\right) = 0. \qquad (b)$$

Man hat nun (§. 1)

$$m_r \frac{d^2 x_r}{dt^2} = X_r + U_r, \; m_r \frac{d^2 y_r}{dt^2} = Y_r + V_r, \; m_r \frac{d^2 z_r}{dt^2} = Z_r + W_r. \qquad (c)$$

Aus (c) folgt (§. 10, I)

$$\frac{dT}{dt} = \Sigma\left(X_r \frac{dx_r}{dt} + Y_r \frac{dy_r}{dt} + Z \frac{dz_r}{dt}\right) + \Sigma\left(U_r \frac{dx_r}{dt} + V_r \frac{dy_r}{dt} + W \frac{dz_r}{dt}\right),$$

d. h. wegen (c):

$$\frac{dT}{dt} = \Sigma\left(X_r \frac{dx_r}{dt} + Y_r \frac{dy_r}{dt} + Z_r \frac{dz_r}{dt}\right). \qquad (d)$$

Aus (d) folgt sofort, dass die Kräfte, welche für sich ein System im Gleichgewichte halten, auf den Werth der lebendigen Kraft, d. h. also auf die etwa vorhandene Bewegung des Punktsystems keinerlei Einfluss üben. Diess war nach I und §. 10, III sofort zu erwarten.

Gleichgewichtsbedingungen in besondern Fällen.

V. Die Gleichung (83) drückt unbedingt den Zustand der Ruhe aus, enthält also die Bedingungen des Gleichgewichts unter dem Einflusse bestimmter Kräfte.

Ist aber $T = 0$, so folgt aus den (31) in §. 5, dass nothwendig auch

$$Q_1 = 0,\ Q_2 = 0,\ \ldots\ldots,\ Q_k = 0, \tag{86}$$

und umgekehrt, wenn die (86) erfüllt sind, ist nothwendig auch (83) erfüllt. Denn dann ist

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_1'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_1} = 0,\ \ldots\ldots,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_k'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_k} = 0, \tag{e}$$

wo T nur

$$\xi_1,\ \ldots,\ \xi_k.\ \xi_1',\ \ldots,\ \xi_k'$$

und kein t enthält.

Multiplizirt man die erste dieser Gleichungen mit ξ_1', ..., die letzte mit ξ_k' und addirt, so ist

$$\xi_1'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_1'}\right) + \ldots + \xi_k'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \xi_k'}\right) - \left[\xi_1'\frac{\partial T}{\partial \xi_1} + \ldots + \xi_k'\frac{\partial T}{\partial \xi_k}\right] = 0,$$

d. h.

$$\frac{d}{dt}\left(\xi_1'\frac{\partial T}{\partial \xi_1'} + \ldots + \xi_k'\frac{\partial T}{\partial \xi_k'}\right) - \left(\xi_1''\frac{\partial T}{\partial \xi_1'} + \ldots + \xi_k''\frac{\partial T}{\partial \xi_k'}\right)$$
$$- \left(\xi_1'\frac{\partial T}{\partial \xi_1} + \ldots + \xi_k'\frac{\partial T}{\partial \xi_k}\right) = 0,$$

oder (§. 5, IX)

$$\frac{d}{dt}(2T) - \frac{dT}{dt} = 0,\ \frac{dT}{dt} = 0,$$

und da auch $T_0 = 0$, indem wir dem System keine Anfangsbewegung mittheilen, so ist (84), also auch (83) erfüllt.

Die (86) sind also nothwendig und hinreichend. Sie leiten sich übrigens sofort aus (84') ab. Denn es lassen sich, ohne weitere Bedingung, alle x, y, z durch

$$\xi_1,\ \ldots\ldots,\ \xi_k$$

ausdrücken (§. 5, I), so dass

$$\Sigma\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)=\Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial \xi_1}+Y\frac{\partial y}{\partial \xi_1}+Z\frac{\partial z}{\partial \xi_1}\right)\frac{d\xi_1}{dt}+\dots$$

$$+\Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial \xi_k}+Y\frac{\partial y}{\partial \xi_k}+Z\frac{\partial z}{\partial \xi_k}\right)\frac{d\xi_k}{dt}=Q_1\frac{d\xi_1}{dt}+\dots+Q_k\frac{d\xi_k}{dt}.$$

Demnach muss

$$Q_1\frac{d\xi_1}{dt}+Q_2\frac{d\xi_2}{dt}+\dots+Q_k\frac{d\xi_k}{dt}=0 \tag{f}$$

sein, was nichts Anderes als die (84′) ist. Soll nun Ruhe herrschen, so muss eine Bestimmung der ξ überhaupt nicht angehen, d. h. die (f) muss identisch erfüllt sein, ohne dass wir annehmen, es seien

$$\frac{d\xi_1}{dt}, \dots, \frac{d\xi_k}{dt}$$

Null. Diess ist aber nur möglich wenn die (86) erfüllt sind. Aber auch nur dann ist unbedingt die (84) erfüllt, da sonst eben

$$\frac{dT}{dt}=Q_1\frac{d\xi_1}{dt}+\dots+Q_k\frac{d\xi_k}{dt}, \tag{g}$$

und also wenn (86) nicht richtig, jedenfalls in (g) auf der zweiten Seite Glieder stehen bleiben, die gedachte Bewegung (III) also wirklich stattfindet.

Die (86) kann man hiernach auch ansehen als die Bedingungsgleichungen, die ausdrücken dass die k bestimmenden Elemente (§. 5, I) unverändert bleiben, also überhaupt der ganze Zustand sich nicht ändert.

Gleichgewicht eines Punktes.

Nach §. 1, I sind also die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen der Ruhe eines einzigen freien Punktes

$$X=0,\ Y=0,\ Z=0, \tag{h}$$

Gleichgewicht eines starren Körpers, der sich um die z Axe drehen kann.

Nach §. 7, I ist die einzige Bedingung

$$\Sigma(xY-yX)=0, \tag{i}$$

und die dortigen (h) und (i), in denen

$$\frac{d\omega}{dt}=0$$

gesetzt wird, geben den Druck auf die feste Axe.

Gleichgewicht eines starren Körpers, der einen festen Punkt enthält.

Nach §. 8, II sind die Gleichgewichtsbedingungen, wenn die dortigen Bezeichnungen gewählt werden:

$$Q_1 = 0, \ Q_2 = 0, \ Q_3 = 0,$$

oder, wie sich leicht daraus findet

$$\Sigma(x'Y' - y'X') = 0, \ \Sigma(z'X' - x'Z') = 0, \ \Sigma(y'Z' - z'Y') = 0, \quad (k)$$

aus welchen Gleichungen sich übrigens auch ergibt

$$\Sigma(xY - yX) = 0, \ \Sigma(zX - xZ) = 0, \ \Sigma(yZ - zX) = 0. \quad (k')$$

Den Druck auf den Punkt bestimmen die dortigen (61), wenn

$$p = q = r = 0$$

gesetzt wird.

Gleichgewicht eines starren völlig freien Körpers.

Aus §. 9, II ergibt sich, wenn man die dortigen sechs Q Null setzt:

$$\Sigma X = 0, \ \Sigma Y = 0, \ \Sigma Z = 0, \ \Sigma(x'Y' - y'X') = 0, \ \Sigma(z'X' - x'Z') = 0,$$
$$\Sigma(y'Z' - z'Y') = 0. \quad (l)$$

Dabei ist allerdings der Schwerpunkt als bestimmter Punkt gewählt und die Hauptaxen als Axen der x', y', z'. Doch hat diess auf die Berechnung der Q keinerlei Einfluss geübt, so dass wir als bestimmten Punkt einen ganz beliebigen mit dem Körper verbundenen Punkt nehmen können und auch die Axen der x', y', z' beliebig sein können, ohne dass die dortigen (a) sich ändern.

Da

$$x' = a_1(x - \xi) + a_2(y - \eta) + a_3(z - \zeta), \ y' = b_1(x - \xi) + b_2(y - \eta) + c_3(z - \zeta),$$

so ist

$$\Sigma(x'Y' - y'X') = \Sigma[(a_1(x - \xi) + a_2(y - \eta) + a_3(z - \zeta))(b_1X + b_2Y + b_3Z)$$
$$- (b_1(x - \xi) + b_2(y - \eta) + b_3(z - \zeta))(a_1X + a_2Y + a_3Z)]$$
$$= c_3\Sigma(xY - yX) + c_2\Sigma(zX - xZ) + c_1\Sigma(yZ - zY)$$
$$- \Sigma(a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta)(b_1X + b_2Y + b_3Z) + \Sigma(b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta)(a_1X + a_2Y + a_3Z),$$

wo die zwei letzten Summen, wegen

$$\Sigma X = 0, \ \Sigma Y = 0, \ \Sigma Z = 0$$

Null sind. Daraus ergibt sich offenbar, dass die Gleichgewichtsbedingungen (l) auch heissen können:

$$\Sigma X = 0, \ \Sigma Y = 0, \ \Sigma Z = 0, \ \Sigma(xY - yX) = 0, \ \Sigma(zX - xZ) = 0,$$
$$\Sigma(yZ - zY) = 0. \quad (l')$$

Gleichgewichtslagen eines bewegten Systems.

VI. Ist ein bewegtes System unter dem Einfluss beliebiger Kräfte und befindet sich dasselbe zur Zeit t in einer Lage, in welcher für den nächsten (unendlich kleinen) Zeitaugenblick Δt die Kräfte keine (Gesammt-) Arbeit verrichten, so befindet sich das System in einer Gleichgewichtslage.

Alsdann ist, aber auch nur für diesen Augenblick,

$$\frac{dT}{dt} = 0. \tag{87}$$

Aus (87) folgt, dass in einer solchen Gleichgewichtslage T ein Maximum oder ein Minimum sein kann; doch ist es auch denkbar, dass keines von beiden stattfindet.

Wir wollen den Fall etwas näher betrachten, da T ein Maximum ist, allerdings unter der Voraussetzung des §. 10, VI, da eine Kräftefunktion V besteht, die t nicht entwickelt enthält, und die Bedingungsgleichungen eben so frei von t sind, also die (76′) besteht.

Schwingungen um die Gleichgewichtslage, für die T ein Maximum.

VII. Es bestehe die Gleichung (76′) des §. 10, nämlich

$$T = T_0 + V - V_0 \tag{m}$$

und es sei für die Werthe der ξ (§. 5, IV) die in (m) vorkommen, V ein Maximum. Alsdann ist für diese Werthe V grösser als für Werthe der ξ, die unmittelbar an denselben liegen. Bringt man also das System in eine Lage, in der die ξ nahezu die Werthe haben, wie sie dem Maximum von V entsprechen, und stellt es dort in den Zustand der Ruhe, so wird es unter dem Einfluss der wirksamen Kräfte nothwendig gegen die Lage sich hinbewegen, in der das Maximum von V stattfindet. Denn jetzt ist $T_0 = 0$, also $T = V - V_0$, mithin da $T > 0$, nothwendig $V > V_0$, d. h. es muss V wachsen, also gegen sein Maximum hin gehen.

Ist dagegen V ein Minimum und man bringt das System in eine unmittelbar nahe Lage, so muss, eben weil V wächst (wenigstens anfänglich), das System sich von jener Gleichgewichtslage entfernen.

Es lässt sich nun aber zeigen, dass im ersten Falle, d. h. da man das System einer Gleichgewichtslage mit Maximum von V sehr nahe brachte, und demselben keine Anfangsgeschwindigkeiten ertheilte, immer die Bewegung um diese Gleichgewichtslage herum stattfinden werde, d. h. dass die ξ überhaupt niemals Werthe erhalten werden, die sich über gewisse Gränzen hinaus von denen entfernen, für die V ein Maximum ist.

Seien

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k$$

(wo

$$k = 3n - m,$$

wenn wir die Bezeichnungen des §. 5 gebrauchen) die Werthe von

$$\xi_1, \ldots, \xi_k,$$

für die V ein Maximum und A der Werth dieses Maximums. Alsdann ist nothwendig für Werthe der ξ, die wenig von den α abweichen, der Werth von

V kleiner als A, so dass für ξ innerhalb der Gränzen $\alpha \pm \delta$, wo δ klein sein kann, immer $V - A < 0$. Werden nun die anfänglichen Werthe der ξ innerhalb der Gränzen genommen, in denen $V - A < 0$, wobei diese ξ sehr wenig von den α verschieden sein sollen, so muss wie wir gesehen das System gegen die Gleichgewichtslage sich hinbewegen. In (m) d. h.

$$T = V - V_0 \tag{n}$$

ist $V_0 < A$ und weil $T > 0$ auch $V > V_0$. Demgemäss wir T anfänglich wachsen, kann aber höchstens den Werth von $A - V_0$ erreichen, da V höchstens $= A$ wird, und wird von da an wieder abnehmen. Es ist dabei auch denkbar, dass der grösste Werth nicht erreicht wird, sondern das Abnehmen schon früher beginnt. Unter V_0 kann aber V nie sinken, da sonst $T < 0$ würde, was unmöglich ist. Da nun V_0 nicht der kleinste Werth sein wird, der in der Nähe des Maximums unter den Werthen von V stattfindet (bis nämlich wieder das Wachsen in V beginnt, also ein Minimum eingetreten ist) so werden also auch die ξ sich nie so weit von den α entfernen können, dass die angedeuteten Gränzen überschritten würden.

Dass dieser Beweis nur für das Maximum gilt, ist klar. Eben so aber lässt er sich auch auf den Fall ausdehnen, da Anfangsgeschwindigkeiten vorkommen, nur muss dann, weil die (m) heisst,

$$T = V - (V_0 - T_0),$$

$V_0 - T_0$ noch über dem kleinsten Werthe sein, den V in der Nähe des Maximus hat (d. h. über dem nächsten Minimum).

§. 13.

Das Prinzip der kleinsten Wirkung.

Dieses so genannte Prinzip ist weiter Nichts als eine Umschreibung der Formeln (33). Nimmt man die Voraussetzungen an, die zu diesen Gleichungen geführt, so ist die Grösse

$$\int_{\tau}^{\tau'} (T + V)\, dt, \tag{88}$$

worin τ und τ' $(> \tau)$ zwei bestimmte Zeitpunkte sind, in denen ξ und $\frac{d\xi}{dt}$ bestimmte unveränderliche Werthe haben, im Allgemeinen ein Maximum oder ein Minimum.

Denn schreibt man nach den Regeln der Variationsrechnung die Bedingungen an, unter denen (88) ein solches Maximum oder Minimum sein kann, so erkält man kurzweg die (33). Doch sind diese Bedingungen dieselben für ein Maximum oder ein Minimum, und es ist also keineswegs entschieden, dass (88) gerade ein Minimum sei, wie dieses „Prinzip" ausspricht.

Als eine blosse Nachhilfe für das Gedächtniss mag man demselben

einen Werth beilegen; für die Mechanik dürfte es füglich der Vergessenheit anheimfallen.

§. 14.

Kleine Schwingungen eines Systems.

I. Angenommen das System materieller Punkte sei in einer gewissen Lage in einer der Gewichtslagen, der es bei der Entfernung aus derselben von selbst wieder zustrebe (§. 12, VI) und es mache um dieselbe nur sehr kleine Schwingungen.

Seien die Werthe der ξ in §. 5, V für die Gleichgewichtslage durch a bezeichnet, und im Zustande der Bewegung zur Zeit t

$$\xi = a + \alpha, \tag{a}$$

wo immer α sehr klein sei. Aus (a) folgt

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

und es ist selbst $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ als klein anzunehmen, da hier überhaupt keine bedeutenden Kräfte auftreten.

Die Grösse T in §. 5 ist

$$\tfrac{1}{2}\Sigma m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = \tfrac{1}{2}\Sigma m\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial \alpha_2}\frac{d\alpha_2}{dt} + \ldots\right)^2 + \ldots\right].$$

Entwickelt man nun x (nach dem Taylor'schen Satze) nach aufsteigenden Potenzen von α, so wird man diejenigen Potenzen, die die erste übersteigen, vernachlässigen können. Diess kommt offenbar darauf hinaus, die Grössen

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial z}{\partial \alpha}$$

als konstant zu behandeln. * Demnach erscheint T unter der Form

$$\Sigma\Sigma A_{i,k}\frac{d\alpha_i}{dt}\frac{d\alpha_k}{dt}, \tag{b}$$

wo die Summenzeichen sich auf i und k beziehen, und diese Grössen alle Werthe durchlaufen von 1 bis m, wo m die Zahl der α ist.

Wir setzen hier eine Kräftefunktion V voraus, welche t nicht entwickelt enthalte, sondern bloss die ξ also $a + \alpha$. Alsdann gilt die (76') in §. 10, da wir auch die Bedingungsgleichungen frei von der Zeit denken. Ueberdiess ist aber für $\alpha = 0$ auch V ein Maximum (§. 12, VI) und also

---

* Sind die ξ selbst die x, y, z, wie diess meistens der Fall ist, so ist die Sache freilich unmittelbar klar, da dann $\frac{\partial x}{\partial \alpha} = 1$ u. s. w.

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = 0 \text{ für } \alpha = 0. \tag{c}$$

Daraus folgt, dass wenn man wieder nach Potenzen von α entwickelt, in dieser Entwicklung für V die ersten Potenzen von α von selbst wegfallen, so dass wenn man sich auf die Glieder zweiter Ordnung einschränkt

$$V = B + \Sigma\Sigma C_{i,k}\alpha_i\alpha_k \tag{d}$$

sein wird. Nach §. 5, V folgt aus (b) und (d), dass die m Gleichungen der Bewegung sein werden:

$$\Sigma A_{i,1}\frac{d^2\alpha_i}{dt^2} - \Sigma C_{i,1}\alpha_i = 0, \; \ldots\ldots, \; \Sigma A_{i,m}\frac{d^2\alpha_i}{dt^2} - \Sigma C_{i,m}\alpha_i = 0, \tag{89}$$

wo das Summenzeichen sich auf i = 1, 2, ..., m erstreckt. * Dabei ist, wie aus der Bildung von (b) und (d) sofort hervorgeht

$$A_{i,k} = A_{k,i}, \; C_{i,k} = C_{k,i}. \tag{e}$$

Die (89) haben einzeln die Form (die h^{te}):

$$A_{1,h}\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + A_{2,h}\frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + \ldots + A_{m,h}\frac{d^2\alpha_m}{dt^2} = C_{1,h}\alpha_1 + C_{2,h}\alpha_2 + \ldots + C_{m,h}\alpha_m. \tag{f}$$

Integration der (89).

II. Diese Gleichungen haben die lineare Form und es wird ihnen genügt durch

---

* Was (b) anbelangt, so ist diese Grösse, wenn $\frac{d\alpha}{dt} = \alpha'$:

$$\begin{aligned} & A_{1,1}\alpha_1'\alpha_1' + A_{1,2}\alpha_1'\alpha_2' + \ldots A_{1,m}\alpha_1'\alpha_m' \\ + & A_{2,1}\alpha_2'\alpha_1' + A_{2,2}\alpha_2'\alpha_2' + \ldots A_{2,m}\alpha_2'\alpha_m' \\ + & \ldots \\ & \vdots \\ + & A_{m,1}\alpha_m'\alpha_1' + A_{m,2}\alpha_m'\alpha_2' + \ldots A_{m,m}\alpha_m'\alpha_m'. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha_h'} = A_{1,h}\alpha_1' + A_{2,h}\alpha_2' + \ldots + A_{m,h}\alpha_m' + A_{h,1}\alpha_1' + A_{h,2}\alpha_2' + \ldots + A_{h,m}\alpha_m',$$

wenn man beachtet, dass α_h' in der h^{ten} Vertikal- und der h^{ten} Horizontalreihe ausschliesslich vorkommt. Wegen der (e) ist diess

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha_h'} = 2\Sigma_i A_{i,h}\alpha_i'.$$

ferner ist $\frac{\partial T}{\partial \alpha_h} = 0$, und ganz eben so

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_h} = 2\Sigma_i C_{i,h}\alpha_i,$$

woraus dann die (89) nach (33) sich ergeben. Es ist übrigens

$$A_{i,h} = \tfrac{1}{2}\Sigma m\left[\frac{\partial x}{\partial \alpha_i}\frac{\partial x}{\partial \alpha_h} + \frac{\partial y}{\partial \alpha_i}\frac{\partial y}{\partial \alpha_h} + \frac{\partial z}{\partial \alpha_i}\frac{\partial z}{\partial \alpha_h}\right], \; C_{i,h} = \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial \xi_i\,\partial \xi_h} \; (\text{für } \xi_i = a_i, \; \xi_h = a_h),$$

woraus sich die (e) sofort als richtig ergeben.

$$\alpha_i = E_i \sin(p\,t + q), \qquad (g)$$

wo p und q Konstanten sind, die sich mit i nicht ändern. Dann muss

$$\Sigma A_{i,1}\, p^2 E_i + \Sigma C_{i,1} E_i = 0, \; \ldots, \; \Sigma A_{i,m}\, p^2 E_i + \Sigma C_{i,m} E_i = 0 \qquad (h)$$

sein. Diese m Gleichungen bestimmen aber, bei ihrer besondern Form, die m Grössen $E_1, \ldots, E_m$ nicht, sondern nur $m-1$ derselben durch die letzte, die ganz willkürlich bleibt. Man kann desshalb allen E einen willkürlichen Faktor beilegen und den andern Faktor als bestimmt ansehen, d. h. setzen

$$\alpha_i\, E\, b_i \sin(p\,t + q), \qquad (g')$$

wo E von i unabhängig, b_i als bestimmt anzusehen ist aus dem Systeme

$$\Sigma A_{i,1}\, p^2 b_i + \Sigma C_{i,1}\, b_i = 0, \; \ldots\ldots, \; \Sigma A_{i,m}\, p^2 b_i + \Sigma C_{i,m}\, b_i = 0, \qquad (h')$$

in welchem ein b als beliebig aber bestimmt angenommen ist.

Die (h) liefern, wenn man die $E_1, \ldots, E_m$ eliminirt, eine Gleichung m^{ten} Grades für p^2, welche in der Form der Determinanten ausgedrückt (vergl. etwa meine Diff.- u. Intglrchg, Anhang, **II**, V) heisst

$$\begin{vmatrix} A_{1,1}\, p^2 + C_{1,1}, & A_{2,1}\, p^2 + C_{2,1}, & \ldots\ldots, & A_{m,1}\, p^2 + C_{m,1} \\ A_{1,2}\, p^2 + C_{1,2}, & A_{2,2}\, p^2 + C_{2,2}, & \ldots\ldots, & A_{m,2}\, p^2 + C_{m,2} \\ \vdots & & & \\ A_{1,m}\, p^2 + C_{1,m}, & A_{2,m}\, p^2 + C_{2,m}, & \ldots\ldots, & A_{m,m}\, p^2 + C_{m,m} \end{vmatrix} = 0. \qquad (i)$$

Diese Gleichung wird, wenn wir von einer Maximums-Gleichgewichtslage (§. 12, VI) ausgiengen, für p^2 nur reelle und positive Werthe liefern, da sonst die p in (g) imaginär wären und die Sinus sich in Exponentialgrössen verwandeln, die mit der Zeit unbegränzt wachsen. Es ist also ein Zeichen, dass wir von einer solchen Gleichgewichtslage ausgiengen, wenn alle p^2 positiv ausfallen.

Die Grösse b_i ist in (g′) als bekannt angesehen und zwar bestimmt mittelst der (h′). Daraus folgt aber sofort, dass dieselbe auch von dem Werthe von p mit abhängt, jedoch vollständig bekannt ist, wenn p bekannt ist. Von E und q kann man dasselbe nicht aussagen, es bleiben vielmehr diese Grössen vorläufig ganz willkürlich. Sind nun

$$p^{(1)},\; p^{(2)},\; \ldots\ldots,\; p^{(m)}$$

die reellen und positiven Werthe von p, die aus (i) folgen, so kann man jeden dieser Werthe in (g) einsetzen, und einen Werth von α_i erhalten, welcher der (89) genügt.

Wegen der l i n e a r e n Form dieser Gleichungen genügt aber dann auch die Summe aller so erhaltenen Werthe. Daraus folgt, dass man haben wird:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= E^{(1)} b_1^{(1)} \sin(p^{(1)} t + q^{(1)}) + E^{(2)} b_1^{(2)} \sin(p^{(2)} t + q^{(2)}) + \ldots \\
&\qquad + E^{(m)} b_1^{(m)} \sin(p^{(m)} t + q^{(m)}), \\
\alpha_2 &= E^{(1)} b_2^{(1)} \sin(p^{(1)} t + q^{(1)}) + E^{(2)} b_2^{(2)} \sin(p^{(2)} t + q^{(2)}) + \ldots \\
&\qquad + E^{(m)} b_2^{(m)} \sin(p^{(m)} t + q^{(m)}), \\
&\;\vdots \\
\alpha_m &= E^{(1)} b_m^{(1)} \sin(p^{(1)} t + q^{(1)}) + E^{(2)} b_m^{(2)} \sin(p^{(2)} t + q^{(2)}) + \ldots \\
&\qquad + E^{(m)} b_m^{(m)} \sin(p^{(m)} t + q^{(m)}),
\end{aligned}\right\} \quad (G)$$

in welchen Gleichungen $E^{(s)}$, $q^{(s)}$ die dem Werthe $p^{(s)}$ zugehörigen (vorläufig noch willkürlichen) Werthe von E, q sind, und wo $b_i^{(s)}$ der bestimmte und bekannte Werth von b_i für $p = p^{(s)}$ ist.

Die Grössen E und q in (G) sind der Zahl nach 2m (wenn die m Werthe von p alle verschieden sind), wie diess die (89) fordern, wenn man das allgemeine Integralsystem derselben will gefunden haben. Ihre wirklichen Werthe bestimmen sich aus dem Anfangszustande des Systems, d. h. aus den (2m) anfänglichen Werthen von α und $\frac{d\alpha}{dt}$.

Wäre der Anfangszustand so, dass selbst bei imaginären p die entsprechenden E aus (G) Null werden, so wären sogar bei dieser Lage, die nicht der Gleichgewichtslage des §. 12, VI zugehört, kleine Schwingungen möglich, doch würde bei geändertem Anfangszustande diess sofort wieder aufhören.

Periodische Schwingungen.

III. Sind alle Werthe von p reell, oder sind aus (G) diejenigen Glieder weggefallen, die imaginären Werthen von p entsprechen würden, so nimmt jedes der betreffenden Glieder seinen vorigen Werth wieder an, wenn t um $\frac{2\pi}{p}$ wächst.

Sind also die Grössen

$$\frac{2\pi}{p^{(1)}}, \quad \frac{2\pi}{p^{(2)}}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{2\pi}{p^{(m)}} \qquad (k)$$

alle in der einen ϱ enthalten, so kehrt je nach Umfluss der Zeit ϱ das System wieder in denselben Zustand zurück. Dann ist ϱ die Dauer einer Schwingung (oder auch mehrerer). Dabei ist selbstverständlich, dass in (k) nur diejenigen p in Betracht kommen, die in den (G) vorkommen.

Gleichzeitigkeit der kleinen Schwingungen.

IV. Für jeden Werth von p gibt es in (g') einen Werth von α_i, der den (89) genügt. Die durch diesen Werth dargestellte Bewegung, die eine

periodische ist, wenn p reell, könnte also ganz allein bestehen und man hätte dann

$$\alpha_1 = E\, b_1 \sin(pt+q),\ \alpha_2 = E\, b_2 \sin(pt+q),\ + \ldots\ldots,$$
$$\alpha_m = E\, b_m \sin(pt+q), \tag{m}$$

oder

$$\frac{\alpha_1}{b_1} = \frac{\alpha_2}{b_2} = \ldots = \frac{\alpha_m}{b_m} = E \sin(pt+q),$$

durch welche Gleichung dieser Bewegungszustand gegeben wäre. Eben so könnte jede durch einen andern der zulässigen Werthe von p bestimmte periodische Bewegung allein bestehen. Aus den (G) folgt, dass die wirkliche Bewegung so beschaffen ist, als wenn alle diese einzelnen Bewegungen zu gleicher Zeit stattfänden, wobei sie also einfach addirt sind. Damit ist aber keineswegs ausgesprochen, dass in Wirklichkeit die Dinge sich so verhalten, d. h. dass die einzelnen Schwingungen gewissermassen einzeln auftreten, also auch die ihnen entsprechenden Töne einzeln wahrnehmbar sein müssen. Diese Möglichkeit, wenn sie besteht, hängt mit dem Anfangszustande zusammen, und es ist sicher eine falsche Auslegung der Ergebnisse in (G), wenn man die einzelnen Glieder kurzweg als vereinzelt auftretende Schwingungen ansieht.

Aus den vorstehenden Untersuchungen ergibt sich sofort, dass das betrachtete System nicht mehr als m verschiedene Schwingungsweisen haben kann, d. h. dass die (k) alle einzeln möglichen Schwingungsdauern ausdrücken.

Prinzip der Uebereinanderlagerung der Bewegungen.

V. Sind Bewegungszustände durch Gleichungen linearer Form, wie die (89) gegeben, gleichviel ob klein oder gross, so lässt sich ein allgemeiner Satz von denselben ausprechen, den wir schliesslich noch darstellen wollen.

Gesetzt für einen durch

$$\alpha_i = K_i,\ \frac{d\alpha_i}{dt} = L_i \text{ (für } t=0) \tag{n}$$

bestimmten Anfangszustand genüge den (89)

$$\alpha_i = Z_i: \tag{p}$$

für einen durch

$$\alpha_i = K_i',\ \frac{d\alpha_i}{dt} = L_i' \text{ für } t=0) \tag{n'}$$

bestimmten Anfangszustand aber

$$\alpha_i = Z_i': \tag{p'}$$

u. s. w., wo Z_i, Z_i', ... bestimmte Funktionen von t sind, so genügt für einen durch

$$\alpha_i = K_i + K_i' + \ldots, \quad \frac{d\alpha_i}{dt} = L_i + L_i' + \ldots \text{ (für } t = 0) \qquad (q)$$

bestimmten Anfangszustand auch

$$\alpha_i = Z_i + Z_i' + \ldots.. \qquad (q')$$

den (89).

Denn da Z_i einzeln den (89) genügen, so genügt auch ihre Summe, wegen der linearen Form dieser Gleichungen. Es ist also nur noch zu zeigen, dass (q′) auch den Anfangszustand ausdrückt, was aber, da

$$K_i = Z_i \,(t = 0), \quad K_i' = Z_i' \,(t = 0), \quad \ldots..$$

$$L_i = \frac{dZ_i}{dt}(t = 0), \quad L_i' = \frac{dZ_i'}{dt}(t = 0), \quad \ldots..,$$

wegen der (q) ganz offenbar der Fall ist.

Werden also in einem Systeme mehrere einzelne Bewegungen erregt, deren Gesetze durch lineare Gleichungen wie (89) ausgesprochen sind, so gehen diese Bewegungen ungestört durch einander fort, und wo sie zusammentreffen, addiren sie sich einfach, ohne sich in ihrem etwaigen Weiterschreiten im Geringsten zu hemmen.

Dieser Satz hat allerdings Aehnlichkeit mit dem in IV, ist aber nicht derselbe. Hier sind die einzelnen Bewegungen durch den Anfangszustand geradezu als gesondert gegeben, während diess in IV nicht der Fall war.

Auf dem hier angegebenen Satze beruht die Möglichkeit, die verschiedenen Töne einer Musik zu gleicher Zeit wahrnehmen zu können, da die Schallwellen durch lineare Gleichungen bestimmt sind und hier die anfänglichen Erregungen vollständig vereinzelt (wenn auch gleichzeitig) auftreten.

Druck der J. B. Metzler'schen Buchdruckerei in Stuttgart.

biges u. umfassendes Handbuch für jeden Kaufmann, insbesondere für Commis u. Lehrlinge. Dritte verbess. Aufl. Imper.-8. 1861. 6 fl. od. 3 Thlr. 10 Sg.

Huber, L. F., der Korrespondent. Anleitg zu e. musterhaften kaufmänn. Briefstil durch systemat. Aufgaben üb. Geschäftsvorfälle jeder Art z. selbstständ. Ausarbeitg, nebst vielen Musterbriefen. M. Eingangs- u. Schlußformeln bei Handelsbriefen u. Erklärg der bei d. Korrespdz am häufigsten vorkom. Fremdwörter u. Kunstausdrücke. gr. 8. 1861. Geh. 1 fl. 45 kr. od. 1 Thlr.

Escher, P., leichtfaßl. Anleitg, durch Raisonnement **Münz-, Wechsel-, Maaß- u. Gewichtsrechnungen**, so wie andere complicirte Aufgaben d. kaufmänn. Arithmetik, sicher u. leichter zu lösen, als nach den bisher üblichen Regeln. gr. 8. 1857. Geh. 56 kr. od. 16 Sg.

Seyerlen, J., Elementarbuch der französ. Sprache, nach Seidenstücker (Ahn)'schen Grundsätzen bearb. Achte Aufl. gr. 8. 1862. (18 Bog.) 48 kr. od. 16 Sg.

Seyerlen, J., Zusammenhäng. **Uebungsstücke** z. Uebersetzen aus d. Deutschen in's Französische. Als Anhang zu seinem Elementarb. gr. 8. 1862. 16 kr. od. 6 Sg.

Seyerlen, J., Materialien z. Uebersetzen aus d. Deutschen in's Französische, mit e. Zusammenstellg sämmtlicher grammat. Regeln u. vollständ. Wörterverz., f. mittl. Classen. gr. 8. 1863. 1 fl. 30 kr. od. 28 Sg.

Gruner, Fr., Schulgrammatik d. **französ. Sprache** für Real- u. gelehrte Schulen. gr. 8. 1863. 1 fl. 48 kr. od. 1 Thlr. 2 Sg.

Gruner u. **Wildermuth**, **französ. Chrestomathie** f. Real- u. Gelehrten-Schulen.
I. Cursus, bearb. von **Fr. Gruner**. Siebente Aufl. gr. 8. 1862. (23 Bog.) 1 fl. 12 kr. od. 24 Sg.
II. Cursus, bearb. von Dr. **Wildermuth**. Vierte verb. Aufl. gr. 8. 1862. (33 Bog.) 1 fl. 48 kr. od. 1 Thlr. 2 Sg.

Eisenmann, Gruner und **Wildermuth, Deutsche Musterstücke** zur Uebung in der französ. (und engl.) Composition. gr. 8.
I. Abthlg, bearb. von **Fr. Gruner**. Fünfte Aufl. 1860. 44 kr. od. 14 Sg. — Anmerkungen für d. französ. Composition zur I. Abthlg. Vierte Aufl. 1863. 24 kr. od. 7½ Sg. — Anmerkungen für d. engl. Compos. zur I. Abthlg. Zweite Aufl. 1857. 36 kr. oder 10 Sg.
II. Abthlg, bearb. v. **W. F. Eisenmann**. Mit Anmerkgn für d. französ. Compos. 1850. 56 kr. od. 18 Sg.
III. Abthlg, bearb v. **Dr. Wildermuth**. Mit Anmerkgn für die französ. Compos. 1854. 1 fl. 45 kr. od. 1 Thlr. 2 Sg.
Die **französische** Uebersetzg kostet von: Abth. I v. **Gérard**, 2. Aufl. 1 fl. 36 kr. 1 Thlr. Abth. II von **Borel** 1 fl. 36 kr. od. 1 Thlr. Abth. III von **Péschier** 2 fl. 54 kr. oder 1 Thlr. 24 Sg.
Die **englische** Uebersetzung der Abth. I von **Thomas** kostet 1 fl. 36 kr. od. 1 Thlr.

Hölder, C. G., Handbuch der älteren u. neueren **französ. Litteratur**, m. biograph. Notizen u. Erläutergn. Dritte Aufl., neu bearb. v. **O. Hölder**. gr. 8. 1863. 1 fl. 36 kr. od. 1 Thlr.

Aspfahl, Carl, Auswahl **französ. Wörter u. Redensarten**, als Uebungsstoff für e method. Behandlg des Vocabelnlernens. Sachlich u. etymologisch geordnet. 8. 1862. 30 kr. od. 10 Sg.

Büchele, C., Leitfaden z. Unterricht in der **französ. Sprache**, mit Materialien z. Uebersetzen. Für Gewerbe- u. Fortbildgsschulen. 8. 1863. 1 fl. 20 kr. od. 24 Sg.

Otto, Dr. **Emil**, neues **deutsch-französ. Gesprächbuch** zum Schulgebrauch bearb. Dritte Aufl. 16. 1861. (8½ Bog.) Cartonirt 36 kr. od. 10 Sg.

Wolff, Charles, tableau synopt. des **Conjugaisons françaises**, conten. les verbes réguliers et les verbes irrégul., avec des remarques sur l'orthographe des verbes. Troisième Edit. augmentée. gr. 8. 1862. 10 kr. od. 3 Sgr.

Gantter, L., prakt. **Schulgrammatik** der **engl. Sprache**. In 2 Abthlgn. gr. 8.
I. Abtheilung. Vierte unver. Aufl. 1858. (15 Bog.) 56 kr. od. 18 Sg.
II. Abtheilung. Zweite verb. Aufl. 1856. (19 Bg.) 1 fl. 20 kr. od. 26 Sg.

Gantter, L., Study and Recreation. **Englische Chrestomathie** für d. Schul- u. Privat-Unterr. In zwei Cursen. gr. 8.
I. Cursus. Siebente Auflage. 1863. (20 Bog.) 1 fl. 12 kr. od. 24 Sg.
II. Cursus. Dritte Auflage. 1860. (29 Bog.) 1 fl. 36 kr. od. 1 Thlr.

Gantter, L., Collection of **English Letters**. Mustersammlung engl. Originalbriefe f. d. Schul- u. Privatgebrauch. gr. 8. 1856. (20 Bog.) 1 fl. 36 kr. od. 28 Sg.

Gantter, L., Lessons of English Conversation. **Englische Sprechschule**, enth. Materialien zu logisch geordneten Sprechübungen im reinen engl. Idiom, für den Schul- und Privatgebrauch bearb. gr. 8. 1859. (26 Bog.) 1 fl. 24 kr. od. 26 Sg.

Robertson, J., Lehrbuch der **englischen Sprache**. Nach dem Französ. bearb. von **W. Oelschläger**. Fünfte, mit der Walker'schen Aussprache versehene u. verb. Aufl. In 2 Thln. gr. 8. 1863.
I. Theil. 36 kr. od. 10 Sg.
II. Theil. 1 fl. 30 kr. od. 28 Sg.

Wiedmayer, D. W., Elementargrammatik d. **engl. Sprache** nach d. stufen-

weise fortschreitenden Methode. gr. 8. 1860. 36 kr. od. 12 Sg.

Wiedmayer, D. W., Schulgrammatik d. **engl. Sprache.** gr. 8. 1861. 1 fl. od. 18 Sg.

Scott, Walter, The Lady of the Lake. A Poem. With Notes and a Glossary. Third Edition. 16. 1861. 40 kr. od. 12 Sg.

Hermann, Dr. H. A., latein. Elementar-Grammatik f. untere Gymnasialclassen, mit zusammenhäng. Expositions- u. Compositionsstoffe, e. Vocabelnsammlg zum Memoriren, e. lat.-deutschen u. e. deutsch-lat. Wörterb. Zweite verm. u. verb. Aufl. gr. 8. 1860. 1 fl. 4 kr. od. 18 Sg.

Livius, Ausgewählte Stücke aus —, mit Anmerkgn z. Schulgebr. v. **Chr. Roller.** 8. 1861. 48 kr. od. 14 Sg.

Cicero, Ausgewählte Stücke aus —, in biograph. Folge, mit Anmerkgn z. Schulgebr. v. **W. Jordan.** 8. 1862. 52 kr. 16 Sg.

Holzer, G. L., Uebungsstücke z. Uebersetzen a. d. Deutschen in's **Latein.**, m. Anmerkgn, für d. mittl. Abthlgn der Gelehrtenschulen, herausgeg. von **C. Holzer.** gr. 8.

I. Abthlg. Sechste verb. u. verm. Aufl. 1862. 52 kr. od. 16 Sg.

II. Abthlg. Fünfte verb. u. verm. Aufl. 1861. 52 kr. od. 16 Sg.

Forbiger, A., u. C. Kärcher, lateinisch-deutsches u. **deutsch-lateinisches Handwörterbuch.** In zwei Theilen. Lexikon-8.

Deutsch-lateinischer Thl., v. **A. Forbiger.** Zweite, völlig umgearb. Aufl. 1856. (86 Bg.) 3 fl. 36 kr. od. 2 Thlr. 4 Sg.

Lateinisch-deutscher Thl., v. **C. Kärcher.** 1842. (60 Bog.) 2 fl. od. 1 Thlr. 4 Sg.

Schulen erhalten je auf 6 Ex. ein siebentes als **Frei-Exemplar.**

Bäumlein, Wilh., griech. Schulgrammatik. Zweite verbesserte Aufl. gr. 8. 1858. 1 fl. 30 kr. od. 26 Sg.

Gaupp, W., u. C. Holzer, Materialien zur Einübung der **griech. Grammatik.** Zweite verb. u. verm. Aufl. gr. 8. 1861. 1 fl. 45 kr. od. 1 Thlr.

Bäumlein, W., C. Holzer u. J. Rieckher, Themata zur **griech. Composition** mit grammat. u. lexikal. Anmerkgn, für obere Classen. gr. 8. 1859. 1 fl. 24 kr. od. 24 Sg.

Vorstehende zwei Schriften auch mit gemeinschaftl. Titeln: „Sammlg v. Aufgaben z. Uebersetzen in's Griechische." I. und II. Theil.

Schmid, K. A., Vorübungen zur griech. Chrestom., in Beispielen zur Einleitg in die griech. Syntax. Zweite durchges. Aufl. gr. 8. 1855. 16 kr. od. 5 Sg.

Mezger, L., u. K. A. Schmid, griech. Chrestom. für d. mittleren Abthlgn der Gymnasien. Zweite verb. Aufl. gr. 8. 1850. 1 fl. 20 kr. od. $22\frac{1}{2}$ Sg.

— — **Wörterbuch** dazu. Zweite verb. Aufl. gr. 8. 1850. 48 kr. od. 15 Sg.

Regeln u. Wörterverzeichniß für die **deutsche Rechtschreibung.** Zum Gebr. in den Württ. Schulanstalten amtl. festgestellt. Zweite Auflage. gr. 8. 1861.

Schulausgabe des **Nibelungenlieds** in d. ältesten Gestalt, herausg. m. Wörterb. v. **Ad. Holtzmann.** Zweite umgearb. Aufl. gr. 8. 1863. 1 fl. 40 kr. od. 1 Thlr.

Nibelungenlied, das, in der ältesten Gestalt, m. d. Verändergn d. gemein. Textes. Herausg. m. Wörterb. v. **Ad. Holtzmann.** gr. 8. 1857. 3 fl. 12 kr. od. 1 Thlr. 26 Sg.

Klage, die, in der ältesten Gestalt, mit den Verändergn des gem. Textes. Als Anhang zu s. Ausg. des Nibelungenl. herausg. m. e. Wörterb. u. Einleitung von **Ad. Holtzmann.** gr. 8. 1859. 1 fl. 20 kr. od. 24 Sg.

Fuchs, Carl, Lehrbuch der **deutschen Metrik,** f. höhere Lehranstalten u. z. Selbstunterr. gr. 8. 1854. 40 kr. od. 12 Sg.

Deutscher **Schul- u. Haus-Homer.** Für die Jugend nach E. Wiedasch's metr. Uebersetzung bearb. und herausg. von **W. Wiedasch.** Mit e. Vorworte v. Fr. Kohlrausch. 3 Theile. gr. 8. 1857. 1 fl. 45 kr. od. 1 Thlr.

Beck, Jos., philosophische Propädeutik. Ein Leitfaden zu Vorträgen an höheren Lehranstalten. Zwei Theile. 8.

I. Thl: Empir. **Psychologie** u. **Logik.** Sechste verb. A. 1860. 1 fl. 8 kr. od. 20 S.

II. Thl: **Encyclop. der Philosophie.** Zweite verb. Aufl. 1851. 1 fl. 12 kr. 20 S.

Koch, Fr., die **Schlangen Deutschlands,** für landw. Fortbildgs- u. Abendschulen, Real-, latein. u. Volksschln. Mit 6 Tafeln Abbildungen in Farbendruck. gr. 4. 1862. Cartonirt 2 fl. 36 kr. od. 1 Thlr. 15 Sg.

Faber, Dr. J. F., allgemeine Weltgeschichte, in zusammenhängender Darstellung für gebildete Leser aller Stände. 3 Theile. (I. Alte, II. Mittlere, III. Neue Gesch.) gr. 8. 1858. 6 fl. 3 Thlr. 18 Sg.

Zeittafeln für d. **Unterricht in der Geschichte** in d. oberen Classen der Gelehrten- u. Realschulen Württembergs. gr. 8. 1862.

Holl, C., die **Erdbeschreibung,** in zwei Lehrstufen für die Schule bearb. 8. 1863. 32 kr. od. 9 Sg.

Kocher, Dr. Conr., Haus-Choralbuch f. Clavierspiel u. Gesang. 179 Choräle, nebst den Liedertexten, den Kern der ev. Gesang- und Choralbücher enthaltend. Imper.-8. 1858. 1 fl. 36 kr. od. 28 Sg.

Wetzel, F., Vorschriften zum **Schönschreiben,** methodisch geordnet. Quer-8. 1858.

I. Heft: 18 Vorlagen für deutsche Schrift. 28 kr. od. 8 Sg.

II. Heft: 15 Vorlagen für lateinische Schrift. 20 kr. od. 6 Sg.

J. B. Metzler'sche Buchhandlung in Stuttgart.

JAHRESBERICHT

des

k. k. Ober-Gymnasiums

IN CZERNOWITZ.

Veröffentlicht

am Schlusse des Schuljahres 1891/92

von

Chr. Würfl,
k. k. Schulrath und Gymnasial-Director.

Inhalt:

CZERNOWITZ, 1892.

Im Selbstverlage der Anstalt. — R. Eckhardt'sche Buchdruckerei.

Didaktische Bemerkungen zur elementaren Mechanik.

Eine Sichtung und Beschränkung des Lehrstoffes in Verbindung mit einer Verbesserung der besonderen Behandlung desselben wird in allen Gegenständen der Mittelschule mit Hinweis auf die Leistungsfähigkeit von Schülern mittlerer Begabung und auf das Erholungsbedürfnis der Jugend in neuerer Zeit immer mehr begehrt. Man ist gerne geneigt, den Lehrern ein abwehrendes Verhalten gegen diese Bestrebungen und ein geringes Maß von Entsagungsfähigkeit in Hinsicht auf den Umfang des Lehrstoffes zuzumuthen, wenn dieselben nicht weiter nachgeben, als es ohne Gefährdung des durch die Schule zu erreichenden Zweckes und des hiedurch bestimmten Unterrichtsbetriebes möglich ist. Leider wird durch die Instruction vom Jahre 1884 für den Unterricht an den Gymnasien das Ausmaß des Lehrstoffes in der Physik bloß nach oben hin schärfer begrenzt, weil „über die untere Grenze, bis zu welcher der Unterricht auf alle Fälle zu führen ist, kein Zweifel bestehen dürfte". Unter ein gewisses Mindestausmaß, das nicht dem Ermessen der einzelnen Lehrer anheimgestellt sein sollte, weil die Ansichten derselben hierüber in der That oft ziemlich weit auseinandergehen, kann eben nicht gegangen werden, wenn die besondere erziehliche Bedeutung jedes Gegenstandes nicht verloren gehen soll.

Es ist nicht zu läugnen, dass die zum Unterrichtsgebrauche zugelassenen Lehrbücher der Physik für die oberen Classen der Gymnasien selbst unter den günstigsten Verhältnissen viel zu umfangreich sind. Ausscheidungen und Verkürzungen sind aber bei der Einrichtung dieser Bücher ohne Störung des Zusammenhanges nicht immer leicht thunlich. In einem dieser Bücher werden die Partien, welche der Lehrer, wenn es ihm an Zeit gebricht, weglassen kann, durch Sternchen bezeichnet; sie umfassen im Ganzen gegen 400 Zeilen oder ungefähr 8 Seiten, während das ganze Buch 318 Seiten hat. Dass man trotzdem im Ausscheiden weiter gehen kann und muss,[1] ist selbstverständlich; leider wird es dann aber auch mitunter unausweichlich, dass der Zusammenhang gestört wird und infolge dessen Änderungen in der Behandlungsweise einzelner Lehren vorgenommen werden müssen.

[1] Vgl. Wittek, die Reduction des physikalischen Lehrstoffes am Gymnasium. Österreichische Mittelschule, 6. J., Wien 1891, S. 306.

Die Bücher sind sowohl für die Bedürfnisse der Gymnasien, wie der Realschulen bestimmt. An der Realschule ist aber dem Gegenstande eine grössere Stundenzahl gewidmet; überdies muss am Gymnasium auch einige Wochen hindurch Chemie betrieben werden, während dieselbe an Realschulen einen besonderen Unterrichtsgegenstand bildet. Ein für die Gymnasien völlig geeignetes Schulbuch müsste die Beschaffenheit haben, dass die das Mindestausmaß bildenden Lehren ein in sich geschlossenes Ganzes ausmachen, welches auch den Schüler, der durch Krankheit oder aus anderer Ursache der Schule längere Zeit ferne bleiben musste, eine eigene Einsicht und zutreffende Vorstellungen gewinnen lässt. Dass es dabei auch dem Lehrer Gelegenheit bieten soll, unter günstigen Verhältnissen an der einen oder der anderen Stelle über dieses Mindestausmaß hinauszugehen, ist natürlich. In stark besuchten Classen und bei minderer durchschnittlicher Begabung der Schüler wird der Unterrichtsbetrieb sich in weit engeren Grenzen halten müssen, als in Classen mit wenigen und vielleicht sogar besser veranlagten Schülern. Ob ein solches Buch auch für Realschulen noch geeignet wäre, bleibt fraglich, denn an diesen kann eben auch unter den ungünstigsten Verhältnissen weiter gegangen werden, als an Gymnasien.[1])

Die geschichtliche Entwicklung der Physik als Unterrichtsgegenstand der Mittelschule bringt es mit sich, dass die schulgemäße Behandlung der einzelnen Lehren derselben noch nicht jene Klärung und jenen relativen Abschluss erlangt hat, dessen sich andere Schulgegenstände erfreuen. Diese Behandlungsweisen bedürfen noch vielfach sowohl in sachlicher Hinsicht, als noch mehr in Rücksicht auf das Fassungsvermögen und den Erfahrungs- und Wissensbereich der Schüler einer sorgsamen Überprüfung und nöthigenfalls Umänderung. Dies zeigt sich auch an den in diesem Gegenstande häufiger, als bei anderen vorkommenden Änderungen und Verbesserungen der Schulbücher von Auflage zu Auflage, sowie an den zahlreichen Aufsätzen in den Schulzeitschriften, die oft gerade die grundlegendsten Lehren behandeln.

Die sachlichen Schwierigkeiten betreffen zumeist die elementare Behandlung solcher Lehren, in welchen stetige Änderungen von einander abhängiger Größen zu erörtern sind. Soweit diese Lehren in den elementaren Unterricht wirklich hineingehören, muss deren Darstellung das Ziel im Auge haben, dieselben so zu gestalten, dass sie durchaus den Eindruck des Naturgemäßen und Ungekünstelten hervorrufen und keineswegs wie Gewächse aus einem fremden Boden aussehen. Es ist ferner unläugbar,

[1]) Auch die Instruction vom Jahre 1879 für den Unterricht in der Physik an Realschulen nimmt einen wesentlich höheren Standpunkt ein, als die für Gymnasien vom Jahre 1884 Ein Lehrbuch, das beiden gleichmäßig Rechnung tragen würde, ist kaum denkbar.

dass einzelne und besondere Erscheinungen, die auf die gleichen Grundsätze hinführen, sich weit besser, als die allgemeinsten Annahmen zur Erzielung des Verständnisses und der Einsicht selbst für den eignen, dem dieser letztere Weg einer höheren wissenschaftlichen Behandlungsweise nicht ungeläufig ist.

Eine besondere Schwierigkeit bereiten jene Lehren, in die ohne mathematische Behandlung sich keine zutreffende Einsicht gewinnen lässt. Die mathematischen Kenntnisse der Schüler sind bei Beginn des physikalischen Unterrichtes noch ganz unfertig und weit entfernt von jener Stufe, die die Schüler erst allmälig später erlangen, die aber in den Schulbüchern der Physik schon von vorneherein als vorhanden vorausgesetzt werden. Selbst bei Aufgaben, die ganz einfach sind, z. B. Anwendungen des Hebelgesetzes sollten die mathematischen Ausdrücke so gestaltet werden, dass selbst der schwächere Schüler sich so leicht als möglich zurechtfinden kann, dass durch die mathematische Behandlung nicht auch noch das unklar werde, was ohne dieselbe als richtig erkannt wurde. Was ohne Formeln überzeugend ins Klare gestellt werden kann, wird man schon deshalb auf diesem Wege besprechen, weil die Schüler ohnehin geneigt sind, nicht so sehr auf die mathematischen Ausgangspunkte und die physikalische Bedeutung der Ergebnisse zu achten, als auf physikalisch belanglose mathematische Umformungen. Die Besprechung besonderer, etwa an Versuch oder Erfahrung sich anschließender Fälle, an Stelle eines allgemeinen wird sich insbesondere dann empfehlen, wenn hiedurch die mathematischen Zurüstungen wesentlich vereinfacht werden. Ist der Lehrer der Physik zugleich Lehrer der Mathematik in derselben Classe, so können in den mathematischen Übungen mancherlei Aufgaben in physikalischer Gewandung, welche längere mathematische Entwicklungen erforderlich machen, vorgenommen werden. In den Physikstunden selbst sollte man sich auf das mathematisch Unumgänglichste und Einfachste beschränken und die Schwierigkeiten, die die Physik stellenweise an sich hat, nicht noch durch mathematische Schwierigkeiten vergrößern. Dem Gegenstande ist ein solches Stundesausmaß ausgesetzt, dass man ohnehin nicht lange genug an den einzelnen Stellen verweilen kann, um mit Beschränkung auf das physikalisch Wichtige und Einfache ein einigermassen dauerhaftes und „verbundenes“ Wissen zu erzielen.

Im Nachstehenden bespreche ich einige Schwierigkeiten der Schulmechanik. Die eingeschalteten Entwicklungen haben nicht die schulmäßige Breite und Ausführlichkeit. In didaktischen Fragen wird jeder erfahrene und überlegte Lehrer auch abweichende Ansichten gelten lassen. Man verzeihe es der Gewohnheit des Lehrers, wenn ich auch in Fragen von dieser Art mich meist bestimmt und entschieden ausgedrückt habe.

1. Differentialquotienten. A. Geschwindigkeit und Beschleunigung. Gleich beim ersten Eintreten in die Bewegungslehre stößt man auf die Schwierigkeit, die Begriffe einer veränderlichen Geschwindigkeit, einer veränderlichen Beschleunigung der Auffassungskraft des Schülers entsprechend zu gestalten. Obzwar dieser schon aus der Erfahrung eine gewisse anschauliche Vorstellung von beschleunigten oder verzögerten Bewegungen, wachsenden oder abnehmenden Geschwindigkeiten bereits besitzt, geht es doch nicht an, es dabei bewenden zu lassen, da eine genaue und bestimmte Erklärung und Auffassung dieser grundlegenden Begriffe für eine richtige Einsicht in alle Bewegungserscheinungen unumgängliche Bedingung ist.

Die Instruction für den Unterricht in der Physik am Obergymnasium spricht sich hierüber in folgender Weise aus: „Ist die Bewegung auch eine ungleichförmige, so können wir sie doch von einem beliebigen Zeitpunkt an verfolgen und annehmen, dass sie von diesem Momente an durch eine unendlich kurze Zeit τ gleichförmig bleibt. Somit können wir auch aus dem während dieser Zeit τ zurückgelegten Wege und τ die Geschwindigkeit für diesen Moment der Bewegung finden." Es mag dahingestellt bleiben, ob eine derartige Umschreibung des ersten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit statthaft ist; jedenfalls wird der Schüler bei seiner mathematischen Reife nicht begreifen können, wie man von dieser Erklärung Gebrauch zu machen vermag und dass man auf diesem Wege zu bestimmten, endlichen Werten für die Geschwindigkeit gelangen kann. Aus diesen Gründen wird eine mathematische Erörterung unvermeidlich sein, dass die von einem gewissen Zeitpunkte an vorhandene durchschnittliche Geschwindigkeit (Beschleunigung) während einer folgenden endlichen Zeit sich, wenn man diese Zeit beliebig klein werden lässt, einer festen Grenze unbeschränkt nähert, welche man Geschwindigkeit (Beschleunigung) in dem betreffenden Zeitpunkte nennt. Hiebei kann man leider von der geometrischen Veranschaulichung dieser Grenze und Darstellung der Geschwindigkeit (Beschleunigung) durch die Tangente der Weg- (Geschwindigkeits-) Curve keinen Gebrauch machen, weil der Schüler dieser Stufe noch ohne jede Kenntnis der Coordinatengeometrie ist. Als besonderes Beispiel, in dem der Weg eine bestimmte Function der Zeit ist, wäre zum mindesten ein im quadratischen Verhältnisse zur Zeit zunehmender Weg $s = kt^2$, [1]) wodurch dann die elementare Integration zur Ableitung der Weg-

[1]) Die kurze und bequeme Darstellung von Proportionalitäten durch Gleichungen von der Form $A = KB$, worin K ein Proportionalitätsfactor ist, hat für den Schüler einige Zeit lang etwas fremdartiges an sich, weil sie in der Schulmathematik leider nicht üblich ist. Ihre Verwendung bei sogenannten Regeldetri-Aufgaben, sowie bei geometrischen Proportionalitäten wäre gewiss auch zweckmäßig und wünschenswert.

formel für eine gleichmäßig veränderliche Bewegung entbehrlich wird, zu behandeln. Zu weit würde es vielleicht führen, wenn man schon an dieser Stelle eine Wegänderung nach der Formel s = m Sin nt mit heranziehen wollte.

Den rein phoronomischen Begriffserklärungen für die Geschwindigkeit und Beschleunigung, deren Auffassung dem Schüler große Schwierigkeiten bereitet, da dieselben noch ganz außerhalb des Bereiches seiner mathematischen Erfahrung liegen, werden häufig, wenn auch nur gelegentlich, andere Erklärungen derselben Begriffe dynamischer Natur an die Seite gesetzt. Geschwindigkeit einer ungleichförmigen Bewegung in einem bestimmten Zeitpunkte ist die Geschwindigkeit jener gleichförmigen Bewegung, die nach Aufhören der Kraft als der Ursache dieser Geschwindigkeitsänderung von diesem Zeitpunkte an eintreten würde. Davon kann bekanntlich auch experimentell an der Atwood'schen Fallmaschine Gebrauch gemacht werden; in neuerer Zeit sind auch Fallrinnen ersonnen worden, welche es gestatten, in jedem Punkt der Bahn die Bewegung aus der geneigten Stellung der Rinne in eine horizontale übergehen zu lassen. Ebenso ist die Beschleunigung (Verzögerung) einer ungleichmäßig veränderlichen Bewegung in einem bestimmten Zeitpunkte die Beschleunigung (Verzögerung) jener gleichmäßig veränderlichen Bewegung, welche von diesem Zeitpunkte an eintreten würde, wenn die Kraft sich nunmehr nicht weiter ändern würde.

Der gewöhnlichen Behandlung der Differentialrechnung haften gewisse Unvollkommenheiten an, die neuerer Zeit besonders scharf von Dühring [1]) hervorgehoben wurden. In einer Darstellung Huebners [2]) der Elemente der höheren Analysis und Mechanik, in welcher von unbeschränkt kleinen Größen gar kein Gebrauch gemacht wird, werden die obigen dynamischen Definitionen der rechnenden Behandlung der Bewegungslehre zu Grunde gelegt. Hier, sowie bei allen geometrischen Anwendungen der Differentialrechnung, muss der Gebrauch der in neuer Weise definierten abgeleiteten Functionen, in manchmal umständlicher Art erst begründet werden. Aus dem Satze, dass nach Aufhören der Kraft der bewegte Punkt sich gleichförmig in der Tangente fortbewegen muss, wird erst gefolgert, dass die Geschwindigkeit der abgeleiteten Function gleich ist; ebenso wird aus dem Satze, dass nach Aufhören der Kraftänderungen eine parabolische Bewegung eintreten wird, die Gleichheit der Beschleunigung und der

[1]) Dr. E. Dühring und U. Dühring, Neue Grundmittel und Erfindungen zur Analysis, Algebra, Functionsrechnung. Leipzig, 1884. Drittes Capitel. Einführung wahrer Begriffe an Stelle des Unendlichkeitsaberglaubens. In der vorliegenden Arbeit ist den Dühring'schen Einwendungen überall Rechnung getragen worden.

[2]) Huebner, Neue Darstellung der Elemente der höheren Analysis, Programm des ev. Gymnasiums zu Schweidnitz. 1885. S. 31 u. 36.

zweiten abgeleiteten Function erwiesen. Damit im Zusammenhange steht die eigenthümliche elementare Behandlung von Bewegungsproblemen in Huebners „Geometrie des Masses“,[1]) welche vielleicht die hervorragendste Veröffentlichung der Gegenwart auf dem Gebiete der Elementarmathematik ist. Diese Bewegungen, die gleichförmige Bewegung in einem Kreise und die Centralbewegung in einer Ellipse, sind durch ihre Geschwindigkeiten definiert, es sind daher bloß Übergänge von Geschwindigkeiten auf Beschleunigungen erforderlich. Zu diesem Zwecke bedient sich Huebner der Überlegung, dass die Beschleunigung ebenso aus der Geschwindigkeit entsteht, wie die Geschwindigkeit aus dem als Function der Zeit dargestellten Wege.[2]) Abgesehen von der bedeutenden mathematischen Schulung, welche Huebners Ableitungen voraussetzen, wird man von dieser Vermeidung unbeschränkt kleiner Größen mit Rücksicht auf die eigenthümlichen Schwierigkeiten, welche mit diesem elementar nicht leicht zu begründenden Kunstgriffe für unsere Schüler verbunden wären, zur mathematischen Analyse von Bewegungen in der Schule wohl nicht Gebrauch machen können.

Da die dynamischen Definitionen der Geschwindigkeit und Beschleunigung erfahrungsgemäß den Schülern weit fasslicher und verständlicher sind, als die rein phoronomischen, so wäre die ausschließliche Verwendung der ersteren im Unterrichte trotzdem nur wünschenswert. Nach dem in unseren Schulbüchern üblichen Lehrgange wird bloß von der phoronomischen Definition der Beschleunigung und nur in zwei Fällen, nämlich bei der mathematischen Analyse der krummlinigen Bewegung und bei der Ableitung des Satzes von der Erhaltung der Bewegungsgröße, thatsächlich Gebrauch gemacht. Es stünde daher wirklich dafür, auch für diese zwei Fälle Ableitungen zu suchen, die unabhängig sind von der Auffassung des Beschleunigungsbegriffes. Was zunächst den Stoss anbelangt, so zeigt Mach,[3]) wie die Vorgänge bei demselben mit Hülfe der Newton'schen Principien und ohne deren Benützung erledigt werden können; Quotienten unbeschränkt kleiner Grössen sind hier stets vermeidlich. Über die krummlinige Bewegung soll noch später besonders gesprochen werden.

B. Parallelogramm der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. Die Parallelogramme der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen werden gewöhnlich bloß für constante Geschwindigkeiten und Beschleunigungen geradliniger resultierender Bewegungen aus den Wege-

[1]) Leipzig, 1888. S. 83, 89, 145.

[2]) Derselbe Gedanke liegt auch eigentlich dem Hamilton'schen Hodographen zugrunde.

[3]) Mach, Mechanik, Leipzig 1883, oder 2. Aufl. 1889. S. 294. Abschn. 6.

parallelogrammen abgeleitet. Zur Erzielung einer richtigen Einsicht in die Bewegungserscheinungen ist es jedoch unumgänglich, zu zeigen, dass bei allen Bewegungen, seien sie krumm- oder geradlinig, und in jedem Punkt der Bahn die jedesmalige Geschwindigkeit (Beschleunigung) durch die Diagonale des betreffenden Parallelogramms ihrer Richtung und Größe nach bestimmt ist. Diese Ableitung müsste auf die Begriffserklärungen der Geschwindigkeit und Beschleunigung zurückgehen.

Es sei zunächst die aus zwei geradlinigen Bewegungen entstehende resultierende Bewegung ebenfalls geradlinig. Nennt man die von demselben Punkt aus in der Richtung der resultierenden und der Seitenbewegungen gleichzeitig zurückgelegten Wege S, s, σ und für eine um τ grössere Zeitstrecke S', s', σ', so ist

$$S:s:\sigma = S':s':\sigma' = \left(\frac{S'-S}{\tau}\right):\left(\frac{s'-s}{\tau}\right):\left(\frac{\Sigma-\sigma}{\tau}\right)$$

Da diese Beziehung auch für ein unbeschränkt kleines τ gilt, so gilt auch für die festen Grenzen, denen sich die obigen Quotienten unbeschränkt nähern, mit beliebiger Annäherung

$$S:s:\sigma = V:v:w$$

wenn mit den letzteren Buchstaben die Geschwindigkeiten in dem nach Zurücklegung von S erreichten Punkte bezeichnet werden. Daraus folgt aber, dass aus V, v, w ein dem aus S, s, σ gezeichneten Parallelogramme ähnliches Parallelogramm construiert werden kann; da die Geschwindigkeitsrichtungen von v, w mit den Wegrichtungen von s, σ zusammenfallen, so wird die resultierende Geschwindigkeit in die resultierende Wegrichtung fallen.

Ist die Bewegung krummlinig und nennt man die zu einem Wegelement, das in der Zeit τ zurückgelegt wird, gehörige Sehne S, die zugehörigen geradlinigen Wegcomponenten s und σ, so hat man

$$S:s:\sigma = \frac{S}{\tau}:\frac{s}{\tau}:\frac{\sigma}{\tau}$$

Je kleiner S wird, desto mehr nähert sich die Sehne dem Bogen und die Diagonale des aus S, s, σ gezeichneten Parallelogramms der Tangente an den Bogen. Für die Grenzen, denen sich die obigen Quotienten beliebig nähern, ergibt sich daher mit unbeschränkter Annäherung, dass ein aus den Geschwindigkeiten in den beiden geradlinigen componierenden Richtungen construiertes Parallelogramm eine mit der Bewegungsrichtung zusammenfallende, also tangentiale Diagonale haben muss, die ihrer Größe nach der resultierenden Geschwindigkeit gleich ist.

In ähnlicher Weise könnte das Beschleunigungsparallelogramm aus dem Geschwindigkeitsparallelogramm abgeleitet werden.

Beschränkt man sich auf die dynamischen Begriffserklärungen der Geschwindigkeit und Beschleunigung, so ist durch das Parallelogramm für constante Geschwindigkeiten und Beschleunigungen geradliniger resultierender Bewegungen auch das Parallelogramm für veränderliche Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, die ja auch durch constante Geschwindigkeiten und Beschleunigungen definiert sind, mitbegründet. Dass die resultierende Geschwindigkeit bei krummliniger Bewegung in die jedesmalige Bewegungsrichtung hineinfallen muss, kann in diesem Falle als selbstverständlich angesehen werden.

Dass hingegen die resultierende Beschleunigung nicht immer mit der Bewegungsrichtung zusammenfällt, kann durch den Hinweis auf solche Bewegungen, bei welchen nur in der einen Richtung eine Beschleunigung vorhanden ist, während in der anderen Richtung gar keine Beschleunigung oder eine Verzögerung statthat, klar gemacht werden. Doch wird es sich vielleicht empfehlen, an dieser Stelle noch nicht so weit zu gehen.

Dem allgemeinen didaktischen Grundsatze, Zusammengehöriges nach Möglichkeit nicht zu trennen, würde es entsprechen, an diese Lehren auch das Kräfteparallelogramm anzuschließen, damit in den Anwendungen auf wirklich vorkommende Bewegungen auch die dynamische Seite derselben erörtert werden kann.

C. Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung. Anstatt bei der Definition von Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen von neuem mit weitläufigen Grenzerörterungen zu operieren, wäre es sehr zu empfehlen, dieselben als die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen eines Punktes im starren Körper zu erklären, welcher den Abstand 1 von der Drehungsachse hat.[1]) Sollte durch diese Ausdrücke ein philologisches Gefühl verletzt sein, so könnte auf den Begriffswandel der Worte verwiesen werden. Da die gleichzeitig zurückgelegten Wege der verschiedenen Punkte des starren Körpers, also auch die gleichzeitigen Wegänderungen, Geschwindigkeiten, Geschwindigkeitsänderungen, sich wie die Abstände der Punkte von der Drehungsachse verhalten so ergeben sich die bekannten Formeln für die Geschwindigkeiten und Be-

[1]) Die Messung von Winkeln in Einheiten, von denen die Anzahl π einen gestreckten Winkel bildet, ist dem Schüler nicht nur nicht geläufig und auch von keinem besonderen Nutzen, sondern erschwert ihm noch mitunter das Verständnis. Davon sollte lieber gar keine Erwähnung gemacht werden. Gehören zu dem Centralwinkel α in einem Kreise mit dem Radius r der Bogen b, in einem Kreise mit dem Radius 1 der Bogen β, so ist $b = r\beta$ und Sin α nähert sich bei unbeschränkt klein werdendem α immer mehr dem β. In anderen Fällen wäre die Formel $b = k\,r\,\alpha$, worin der Proportionalitätsfactor $k = \frac{\pi}{180}$ ist, wenn α in Graden gemessen ist, zu benützen.

schleunigungen dieser Punkte aus der Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung ohne weiteres.

Hat man bloß die dynamischen Definitionen der Geschwindigkeit und Beschleunigung besprochen, so wird man den um die Drehungsachse rotierenden starren Körper durch eine lose Vereinigung seiner Massenpunkte von stets gleichem Bewegungszustand, wie der starre Körper sich ersetzt denken müssen; hiezu ist es nöthig, in jedem einzelnen Massenpunkte eine tangentiale Kraft anzunehmen, welche den betreffenden Punkt entsprechend beschleunigt. Da das Verhältnis der Wege der einzelnem Punkte für alle möglichen gleichen Zeiten dasselbe ist, so muss auch das Verhältnis der fictiven Kräfte stets dasselbe sein; es müssen also auch die jeweiligen Beschleunigungen und die durch deren Summierung entstehenden jeweiligen Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte dasselbe Verhältnis, nämlich das der Abstände der betreffenden Punkte von der Drehungsachse haben.

Macht man von der drehenden Bewegung nur bescheidenen Gebrauch, untersucht man z. B. — wie dies gewöhnlich geschieht — bloß die Drehung eines starren Körpers unter der Wirkung seines Gewichtes (das physische Pendel), so kann man die Begriffe Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung, sowie die damit zusammenhängende Formel für das Drehmoment der resultierenden Kraft auch ganz vermeiden.

2. Integrationen. Die elementaren Integrationen, deren Ausführung mitunter unausweichlich ist, erscheinen dem Schüler, wenn auch nicht leicht, so doch verständlicher, als die Differentialquotienten, weil er von der Entstehung endlicher Größen durch Summation einer unbeschränkt großen Anzahl beliebig kleiner Größen eine anschauliche Vorstellung hat. Neu ist ihm nur, dass man sich hiedurch einer b e s t i m m t e n endlichen Summe unbeschränkt nähert. Die Integrationen sind, insbesondere wenn einer größeren Genauigkeit zuliebe die sogenannte Exhaustionsmethode des Archimedes mit ihren Ungleichungen angewendet wird, sehr weitläufig und zeitraubend. Der Schüler wird gerne geneigt sein, denselben eine größere Bedeutung zuzuschreiben, als ihnen zukommt, und leicht den Blick für das physikalisch Wichtige verlieren. Man sollte daher auch populäre, aber sachlich richtige Integrationen nicht ganz verschmähen oder dieselben, wenn es angeht, zu umgehen suchen, wie das bei den Flächen- und Rauminhaltsberechnungen in der elementaren Geometrie zu geschehen pflegt. Integrationen, die ganz von dem physikalischen Problem, dem sie dienen sollen, abführen, können dem Zwecke des Unterrichtes nur schaden. Von der letzteren Art sind z. B. alle elementaren Ableitungen der Schwingungsdauer des mathematischen Pendels, welche aus der Pendelbewegung selbst entwickelt werden.[1]

[1] Die in der Instruction für den physikalischen Unterricht am Obergymnasium für diese Behandlung angeführten Gründe als entscheidend anzuerkennen, wird mansich

Hat man bereits bei der Erklärung des Geschwindigkeitsbegriffes gezeigt, dass einer Wegformel $s = kt^2$ eine Geschwindigkeitsformel $v = 2kt$ entspricht, so kann davon bei der Bestimmung eines in gleichmäßig veränderlicher Bewegung (nach der Galilei'schen Definition der letzteren) zurückgelegten Weges sofort Gebrauch gemacht werden. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so kann die erforderliche Integration nach Art der Galilei'schen Überlegung[1]) umgangen werden.

Die Schwingungsdauer eines Punktes, dessen jeweilige Beschleunigung dem Abstande von der Ruhelage proportional ist, findet man ohne Integration einfach dadurch, dass jede gleichförmige Bewegung in einem Kreise aus zwei derartigen schwingenden Bewegungen von aufeinander senkrechten Richtungen entstanden gedacht werden kann. Die erforderlichen Ableitungen[2]) entsprechen durchaus der Fassungskraft des Schülers dieser Stufe. So wie der freie Fall, der Fall an der Fallmaschine und in der Fallrinne, der Wurf nach aufwärts besondere in der Natur vorkommende Beispiele gleichmäßig veränderlicher Bewegungen sind, so sind die schwingende Bewegung eines elastischen Punktes und die eines mathematischen Pendels von kleiner Schwingungsweite besondere in der Natur vorkommende Beispiele für eine schwingende Bewegung von der obigen Art.

Die elementare Integration, durch welche sich der Druck einer Flüssigkeit infolge ihres eigenen Gewichtes bestimmt, [3]) ist überaus einfach. Statt diesen Druck sofort für den ganzen, eben und horizontal gedachten Boden des Gefäßes abzuleiten, wäre es zweckmässiger, denselben für ein beliebig geneigtes, ebenes Flächenelement irgendwo in der Flüssigkeit oder an der Gefäßwand zu bestimmen. Der Boden-, Seitendruck und Druck im Flüssigkeitsinneren folgen daraus sofort.[4])

Die Integration für den Auftrieb, den ein Körper im Inneren einer Flüssigkeit durch ihre Drücke erfährt, wird insbesondere in den älteren

nur schwer entschließen können. Den Eindruck, den solche Ableitungen auf den Schüler machen, kann man mit der Überzeugungskraft vergleichen, welche die Ergebnisse mancher analytisch mechanischer Probleme, bei denen man mitunter den Zusammenhang zwischen den Differentialgleichungen und den gewonnenen Integralen gar nicht mehr übersehen kann, begleitet.

[1]) Mach (Mechanik. S. 120) nennt die Galileische Ableitung einfach, anschaulich und vollkommen correct. Auch Wallentin gebraucht dieselbe in seinem Lehrbuche von der 5. Auflage an.

[2]) Z. B. Handl, Lehrb. d. Physik, 4. Aufl. § 66 und 241.

[3]) Wallentin, Lehrbuch der Physik, 5. Aufl. Mechanik, § 47.

[4]) Die Formel für den Gesammtdruck auf ein beliebig großes Stück einer und derselben ebenen Seitenwand ist für die Schule von geringem Nutzen. Wird diese Formel auf den gesammten Seitendruck angewendet, so enthält sie eine bloß mathematische Summation von Drücken verschiedener Richtung.

Büchern [1]) ganz populär und leichtverständlich durch Zerlegung des Körpers in lauter Stäbchen von rechteckigem Querschnitt durchgeführt. Auch die in der 4. Auflage des Wallentin'schen Lehrbuches [2]) vorkommende Integration, die schon vollkommener ist, ist auch nicht schwer, erfordert aber schon etwas mehr mathematische Vorkenntnisse. Die völlige Vermeidung dieser Integration mittelst des geistvollen Stevin'schen Gedankens befriedigt nicht ganz, weil derselbe den Zusammenhang mit den Flüssigkeitsdrücken nicht auch klarstellt. Im Anschlusse daran wäre es auch zweckmässig, zu zeigen, dass die Resultierende aller Seitendrücke einer Flüssigkeit auf die Gefäßwände dem Gewichte eines Flüssigkeitskörpers, dessen Volumen der Differenz des gesammten Flüssigkeitsvolumens und des über der Bodenfläche construiert gedachten senkrechten Flüssigkeitscylinders oder Prismas gleich ist und vertical abwärts oder aufwärts gerichtet ist, je nachdem diese Differenz positiv oder negativ ist. Es wäre dies die durchsichtigste Begründung des sogenannten hydrostatischen Paradoxons.[3]) Den Beweis konnte man, wie oben, entweder durch Zerlegung der Neigungen und Krümmungen der Seitenwände in kleine Treppen mit senkrechten und wagrechten Wänden, oder durch mathematische Bestimmung der verticalen Druckscomponenten in den einzelnen Flächenelementen der Gefäßwand oder endlich dadurch, dass man sich den durch die obige Differenz bestimmten Flüssigkeitskörper in der Weise Stevins ohne Volumsänderung erstarrt denkt, führen.*

Alle sonst noch etwa in den Schulbüchern vorkommenden Integrationen sind schon von geringerem Belang.

Dass ein Punkt, der längs einer verticalen krummen Linie in Folge seiner Schwere sich herabbewegt, immer dieselbe Geschwindigkeit hat, als wenn er um ein entsprechendes lothrechtes Stück frei herabgefallen wäre, wird häufig mittelst des Satzes begründet, dass der infolge einer unbeschränkt kleinen Richtungsänderung eintretende Geschwindigkeitsverlust

[1]) Auch in Handls Lehrbuch, 4. Aufl. § 97.

[2]) Mechanik § 49. Auch in einem älteren Bande der Zeitschrift für das Realschulwesen.

[3]) Auch die Thatsache, dass eine Flüssigkeit, in welche ein aufgehängter Körper eintaucht, um denselben Betrag, um den der Körper leichter erscheint, scheinbar schwerer wird, erklärt sich aus diesem Satze sofort. Dieses Schwererwerden der Flüssigkeit mittelst des Principes der gleichen Action und Reaction dadurch zu erklären, dass der Körper einen seinem Auftrieb gleichen Gegendruck auf die Flüssigkeit nach abwärts erzeugt, geht nicht an, weil man die Drücke des Körpers auf die Flüssigkeit nicht auch ohne weiteres in eine Resultierende vereinigen kann. Und wäre es auch gestattet, so müsste sich dieser Gegendruck in der Flüssigkeit nach allen Seiten fortpflanzen. Die durch die Gegendrücke bewirkte Hebung der Flüssigkeit darf eben nicht außer Betracht bleiben. Der gesammte verticale Druck wächst um das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit.

beliebig klein ist.[1]) Dieser Beweis könnte den Anschein besonderer Strenge erwecken, aber der unbeschränkt kleine Geschwindigkeitsverlust in jedem einzelnen Punkt der Bahn hat deshalb auch im Ganzen einen unbeschränkt kleinen Geschwindigkeitsverlust zur Folge, weil er eine sogenannte unbeschränkt kleine Größe von der zweiten Ordnung ist; diese Ergänzung sollte daher niemals fehlen. Wollte man an dessen statt eine elementare Integration, die sehr weitläufig und unübersichtlich sich gestalten müsste,[2]) anwenden, so würde man der Sache eher schaden. Da man mit diesem Satze das Gebiet der Lehre von den Flächen gleicher Arbeit streift, so könnte vielleicht auch in dieses ein Seitenblick geworfen werden.

Bei der Untersuchung der Standfestigkeit eines Körpers verwendet man häufig zur Definition derselben die Größe der Arbeit bei der Hebung des Schwerpunktes bis über die Kante, um die der Körper geworfen werden soll. Hat man gezeigt, dass die Arbeit bei geradliniger Bewegung eines Punktes, auf den eine constante Kraft in einer von der Bewegungsrichtung verschiedenen unveränderlichen Richtung wirkt, nicht nur durch das Product aus dem Wege und der Projection der Kraft auf die Wegrichtung, sondern auch durch das Product aus der Kraft und der Projection des Weges auf die Richtung der Kraft gemessen werden kann, so kann die Arbeit für eine krummlinige Bahn des Punktes und eine Kraft von unveränderlicher Größe und Richtung durch eine recht einfache Integration mittelst der Projectionen der Bahnelemente auf die Richtung der Kraft bestimmt werden. Ist ein gewisser Einblick in die Lehre von den Flächen gleicher Arbeit, wenn auch nur für den besonderen Fall der Schwerkraft, gewährt worden, so wäre auch diese Integration entbehrlich.

3. Kraft und Masse. Ein klarer Begriff von der Masse eines Körpers kann nur im Anschlusse an die Eigenschaft des Beharrungsvermögens und Beharrungswiderstandes der Körper gewonnen werden. Damit soll nicht gemeint sein, dass die anschauliche Vorstellung, die jedermann aus Tast-, Muskel- und Gesichtsempfindungen von der Masse der Körper erfahrungsmäßig gewonnen hat, ganz unberücksichtigt zu bleiben hat. Gleiche Beharrungswiderstände wären daher als gleichen Massen proportional, aber nicht als diese Massen selbst aufzufassen. Die Masse als einen Quotienten aus der Kraft und der erzeugten Beschleunigung rein mathematisch zu definieren,

[1]) Ein so allgemeiner phoronomischer Lehrsatz, der eine richtige Einsicht in jede krummlinige Bewegung nur fördern kann, sollte vielleicht nicht bloß so nebenher angeführt werden.

[2]) Eine solche Integration veröffentlicht Fegerl in der Zeitschrift für das Realschulwesen, 1891. Heft 4. ohne Angabe des Zweckes.

weil ein Proportionalitätsfactor durch ein bloßes Übereinkommen der Einheit gleichgesetzt wird, widerstrebt einer natürlichen Auffassung.[1])

Gegen die übliche experimentelle Begründung der Sätze, dass eine n-fache Kraft in derselben Masse eine n-fache Beschleunigung erzeugt und dass dieselbe Kraft nur den n-ten Theil der Beschleunigung hervorruft, wenn die Masse n-mal so groß ist, mittelst der Fallmaschine wird manchmal eingewendet, dass sie die Kenntnis der damit zu beweisenden Beziehung $p = ma$ eigentlich schon voraussetze. Die Vergleichung von Massen mittelst ihrer Gewichte an derselben Stelle der Erdoberfläche ergebe sich daraus, dass die Gleichheit der Fallbeschleunigung aller Körper an demselben Orte der Erde bereits gegeben sei und die obige Beziehung zum mindesten für Gewichte gelte. Man setze eben eine Kraft 2-, 3mal so groß, die demselben Bewegten eine 2-, 3mal so große Beschleunigung ertheile, man schreibe dem Körper eine ebensogrosse, 2, 3mal so grosse Masse zu, der durch dieselbe Kraft eine ebensogroße, die Hälfte, ein Drittel der Beschleunigung erhalte, es sei das eben die natürlichste Annahme und von einem Beweise aus der Erfahrung könne keine Rede sein.

Dagegen muss eingewendet werden, dass die statische Vergleichung von Kräften eine natürlichere und ursprünglichere ist, als die dynamische. Ein ebensogroßes, ein doppelt so großes Gewicht an derselben Stelle der Erdoberfläche, eine doppelt so stark gespannte Feder kann ich mittelst eines gleicharmigen Hebels oder einer Federwage herstellen. Ebenso ist es auch durchaus natürlich, einem Körper, der von der Erde an derselben Stelle ihrer Oberfläche gleichstark, doppelt so stark angezogen wird, auch dieselbe oder die doppelte Masse zuzuschreiben; dies wird man zum mindesten für solche Körper gelten lassen müssen, die dabei denselben oder einen doppelt so großen Rauminhalt haben.[2]) Es ist sehr wohl denkbar, dass die in solcher Art verglichenen Kräfte und Massen in Bewegungsversuchen eine durch eine andere Gleichung, als $p = kma$ bestimmte Änderung der Beschleunigung ergeben würden, wobei nur überhaupt mit einem Zunehmen der Kraft oder einem Abnehmen der Masse ein Größerwerden der Beschleunigung verbunden sein müsste.

Die Thatsache, dass, wie man sich früher unnöthigerweise ziemlich paradox auszudrücken pflegte, „alle Körper gleich schwer sind", wird im Anschlusse hieran leicht verständlich zu machen sein. Geht man von der Annahme aus, dass zu einem zwei-, dreimal so großen Gewicht auf der-

[1]) Man vergleiche damit die Gleichheit des Winkels und des zugehörigen Bogens. Der Tag, die Stunde, die Secunde werden mittelst bestimmter Bogen des täglichen Sonnenkreises gemessen, sind aber nicht diese Bogen selbst.

[2]) In früherer Zeit pflegte man zu sagen, es fehle für die gegentheilige Behauptung der zureichende Grund.

selben Stelle der Erdoberfläche eine zwei-, dreimal so große Masse gehört, und davon, dass gleiche Massen an demselben Orte durch ihre Gewichte gleich beschleunigt werden, so ist begreiflich, dass zwei solche Massen vereint, also die doppelte Masse durch ihre Gewichte, also das doppelte Gewicht in derselben Weise beschleunigt werden müssen.

4. Masseinheiten. Schon bei der Besprechung der Masseinheiten des C G S - Systems sollte dahin gewirkt werden, dass der Schüler über das Gewicht eines Körpers zutreffende Vorstellungen erlange, was ohne ein gewisses Eingehen in die Lehre von der allgemeinen Schwere nicht möglich sein wird.

Da der Schüler nur über Zeit- und Streckenmessungen bestimmte Vorstellungen bereits besitzt, so ist bei dieser Gelegenheit auch die Art und Weise der Vergleichung und Messung von Massen zu besprechen, wodurch ebenfalls die richtige Auffassung und Unterscheidung von Massen und Gewichten nur gefördert werden kann. Auch die Anführung einiger Zahlenbeispiele würden demselben Zwecke gewiss dienlich sein. Auf der Erdoberfläche hat ungefähr eine Masse von 1 mg, auf der Massoberfläche von 2 mg, auf dem Monde von 6 mg, auf der Sonne von 0·04 mg dasselbe Gewicht von e i n e m Dyn. Auch auf der Erdoberfläche ist das Gewicht eigentlich nicht überall gleich; am Pole haben 1·017 mg, in mittleren Breiten 1·02 mg, am Äquator erst 1·022 mg das Gewicht eines Dyns.

Die im gewöhnlichen Leben und in der technischen Praxis übliche Ausdrucksweise „Körper von p kg Gewicht" erklärt man wohl am besten als kürzeren Ausdruck für „durchschnittliches Gewicht eines auf der Erdoberfläche befindlichen Körpers von p kg Masse". Spricht man dann etwa bei Zahlenbeispielen in der Statik aus alter Gewohnheit von einer Kraft von p kg so wird man wenigstens nicht missverstanden werden.

Auch das Kilogrammeter ist dem entsprechend als eine eigentlich nicht für alle Punkte der Erde ganz gleiche Arbeit anzusehen; da diese Verschiedenheiten jedoch ausserhalb der Genauigkeitsgrenzen technischer Arbeitsmessungen liegen, so wird von denselben in der gewöhnlichen Praxis ganz abgesehen.

Die Veränderlichkeit des sogenannten specifischen Gewichtes könnte wohl Grund genug sein, diesen Ausdruck ganz zu vermeiden, da die für dasselbe angegebenen Zahlen eigentlich die specifische Masse[1]) vorstellen;

[1]) Bei dieser Gelegenheit sei die Bemerkung gestattet, dass der Unterschied zwischen unbenannten Verhältniszahlen und benannten Zahlen nicht in den D i n g e n s e l b s t, sondern nur in u n s e r e r B e t r a c h t u n g s w e i s e derselben seinen Grund hat. Auch die benannten Zahlen sind nichts als Verhältniszahlen. Die Ausdrücke a b s o l u t e und r e l a t i v e Dichte sind daher nicht besonders glücklich gewählt; die Bestimmung beider beruht auf derselben Massenvergleichung, welche mittelst einer Gewichtsvergleichung an demselben Orte ausgeführt wird.

es würde aber nur Verwirrung anrichten, wollte man die specifischen Massen specifische Gewichte nennen.

Den in der chemischen Literatur üblichen Namen Atomgewicht sollte man ebenfalls in den Schulbüchern durch den sachgemäßeren Ausdruck Atommasse ersetzen.

Bei Gelegenheit von quantitativen Experimenten und numerischen Ausrechnungen könnte auch von den Dimensionen der physikalischen Größen Gebrauch gemacht werden, wenn man es nicht vorzieht, ohne ausdrückliche Erwähnung derselben, z. B. bei der Schwingungsdauer eines Pendels zu zeigen, wie beim Ausziehen der Quadratwurzel aus einem Quotienten, dessen Dividend ein Trägheitsmoment, dessen Divisor das Product aus einer Kraft und einer Strecke ist, eine Zeit [1]) sich ergeben könne.

Zum Schluße sei hier noch eine allgemeine Bemerkung angefügt. Die historische Entwickelung der Mechanik zeigt, dass die Schwereerscheinungen gleichsam die Ausgangspunkte für allgemein mechanische Untersuchungen waren und auch in der Schulmechanik wird man die ersteren als die besonderen Beispiele zu den letzteren mit ihnen zugleich behandeln müssen. Das kann aber leicht zur Folge haben, dass diese Schwereerscheinungen bei der Auffassung allgemeiner Probleme sich störend in den Gedankenverlauf des Schülers eindrängen, wenn er nicht von vorneherein gewöhnt wird, sich die Körper bei solchen allgemeinen Untersuchungen ganz außerhalb des Wirkungsbereiches eines anziehenden Weltkörpers zu denken. Dass man nur in gewissen derartigen Fällen diese Forderung zu stellen pflegt, indem man von einem mathematischen Hebel spricht (das mathematische Pendel verlangt wieder eine andere Abstraction), kann diesem Zwecke nur hinderlich sein. Es würde der guten Sache auch nicht schaden, wenn ausnahmsweise auch andere, als Schwereerscheinungen, als Beispiele herangezogen würden.

5. Angriffspunkt einer Kraft. Es hat wohl keinen Zweck, schon bei der Bewegung von materiellen Punkten auch von dem Angriffspunkte der Kraft zu sprechen. Bei starren Körpern kann jeder in der Richtung der Kraft liegende Punkt eines solchen Körpers als Angriffspunkt angesehen werden. Der Angriffspunkt ist daher kein bestimmter Punkt, sondern nur durch seinen geometrischen Ort vieldeutig bestimmt. Da dies zu mancherlei Missverständnissen Veranlassung gibt, so ist Vorsicht bei Gebrauch dieses Ausdruckes geboten.

Die Lage der Resultierenden zweier auf einen starren Körper wirkenden Kräfte ist dadurch bestimmt, dass die Abstände eines jeden in ihrer Richtung gelegenen Punktes von den beiden Seitenkräften dasselbe Verhältnis, und zwar das reciproke Verhältnis der entsprechenden Seitenkräfte haben. Die Lage der Resultierenden zweier paralleler Kräfte

[1]) Vgl. Mach, Mechanik, Leipzig, S. 160. Abschn. 5.

bestimmt sich dadurch, dass dieselbe jede zwischen diesen Kräften gezogene Gerade so theilt, dass sich die beiden Theile umgekehrt wie die angrenzenden Componenten verhalten.

Da der Hebel nicht nothwendig eine Stange zu sein braucht, so werden auch der zwei- und einarmige Hebel besser als solche Hebel erklärt werden, bei denen die Drehungsachse zwischen den beiden Kraftrichtungen oder außerhalb derselben gelegen ist, wenn überhaupt auf diese Unterscheidungen der technischen Physik ein Wert gelegt wird. Der Begriff „Hebelarm“ ist eigentlich ganz unbestimmt, wenn man nicht etwa das jeweilige Loth vom Drehpunkte auf die Kraftrichtung, das man auch Dreharm nennt, so bezeichnen will.

Der Schwerpunkt wird als Angriffspunkt der Resultierenden aller Schwerkräfte eines Körpers bezeichnet, während er der einzige Punkt ist, durch welchen diese Resultierende bei jeder Lage des Körpers hindurchgehen muss. Der Satz, auf welchem die Bestimmung der Lage des Schwerpunktes beruht, könnte auch leicht missverstanden werden; er enthält das sogenannte statische Moment einer Kraft bezüglich einer Ebene, welches als das Product aus dieser Kraft und dem Abstande ihres Angriffspunktes von dieser Ebene erklärt wird. Mit der Unbestimmtheit des Angriffspunktes wird aber auch dieser Abstand unbestimmt. Wenn hier nicht schon von vorneherein von solchen Angriffspunkten der einzelnen parallelen Seitenkräfte, durch welche diese bei jeder Lage des Körpers hindurchgehen, also von den Schwerpunkten der kleinsten Theilchen des Körpers ausgegangen wird, so gibt der Satz in der That nicht den Schwerpunkt, sondern überhaupt einen Punkt in der Resultierenden für die angenommene Lage des Körpers. Der sogenannte Mittelpunkt paralleler Kräfte kann, wenn er ein bestimmter Punkt sein soll, auch nur der Schwerpunkt sein.

6. Schwerpunkt. Während nach der üblichen Darstellung in der elementaren Mechanik die allgemeinen Sätze vorausgehen und ihre Anwendung auf Schwereerscheinungen nachfolgt, wird die allgemeine Bedeutung des Schwerpunktes erst hinterher oft nur nebenbei erwähnt oder gar nicht zur Sprache gebracht. Die allgemeine Bedeutung dieses Punktes ist aber nicht weniger von grundlegender Wichtigkeit, als die besondere, der er den Namen verdankt.

Da man anfänglich die Bewegung bloßer materieller Punkte besprochen hat, so ist es unumgänglich nothwendig, jene Bewegung eines frei beweglichen starren Körpers, bei welcher durch die Bewegung irgend eines einzelnen Punktes desselben auch die Bewegung des ganzen Körpers vollständig bestimmt ist, zu untersuchen. Die die Lehre von der Bewegung des Punktes begleitenden Versuche sind ja doch nur mit Körpern ausgeführt worden. Die Untersuchung der Bedingungen, unter welchem das

auf den Körper wirkende System von Kräften oder deren Resultierende bloß eine sogenannte fortschreitende Bewegung hervorruft, ist daher ganz unentbehrlich.

Wird aber bloß von der Resultierenden der elementaren Schwerkräfte eines Körpers gesprochen, so denkt man an Bewegungserscheinungen zunächst gar nicht. Die betreffende besondere Untersuchung ist zwar deshalb leichter aufzufassen, weil sich die Wirkung der Erde auf den ganzen Körper aus ihren Wirkungen auf die einzelnen Massenpunkte zusammensetzt, während die Zerlegung der Resultierenden aller auf einen starren Körper wirkenden Kräfte ohne Rücksicht darauf, von welcher speciellen Art diese Kräfte sind, in Elementarkräfte, welche in den einzelnen Massenpunkten wirksam sind, schon eine bedeutendere Abstraction erfordert. Diese fingirten Kräfte erscheinen dem Schüler leicht als etwas Mystisches, wenn er nicht schon früher gewöhnt wird, die Zerlegungen von Kräften als reine Gedankenoperationen und wissenschaftliche Untersuchungsmittel anzusehen, ohne welche ein richtiger Einblick in gewisse Naturvorgänge nicht gewonnen werden kann. Auf den Körper auf der schiefen Ebene wirkt nur die Schwerkraft in Wirklichkeit, ihre Componenten sind reine Fictionen.[1])

In der Regel wird die Untersuchung über den Schwerpunkt mit Hilfe des Satzes von der Momentenebene bis zu den Formeln, durch welche die Lage desselben gegen eine solche Ebene bestimmt ist, fortgeführt. Zu Integrationen pflegt man diese Formeln wohl nie zu benützen, da man in ausreichender Weise auf andere Art Schwerpunkte homogener Körper theoretisch bestimmen kann; man macht jedoch von denselben bei der Ableitung des Satzes, dass das Trägheitsmoment eines Körpers für irgend eine Achse aus dem für eine parallele, durch den Schwerpunkt gehende Achse bestimmt werden kann, ferner zur Auffindung des Druckes einer Flüssigkeit auf ein beliebig großes, ebenes Stück der Seitenwand, manchmal auch zur Berechnung von Trägheitsmomenten in der Art und Weise des Huyghens[2]) Gebrauch.

Wo der Unterricht nur in einem bescheidenen Umfange ertheilt werden kann, wird es genügen, zu zeigen, dass in jedem starren Körper ein bloß von seiner Form und Größe, so wie von der Vertheilung der Massen in demselben abhängiger Punkt vorhanden ist, durch welchen die Resultierende

[1]) Dass auch die Schwerkraft vielleicht eine bloße Fiction und einer rationelleren Erklärung fähig ist, wird wohl nicht Anlass zu einem Missverständnis über die obige Darlegung sein. Das Princip der Erhaltung der Energie führt schließlich dahin, alle Kräfte als bloße Producte von Massen und Beschleunigungen rein mathematisch aufzufassen und alle Naturvorgänge auf die Umwandlung von Energie in andere Formen zurückzuführen. „Im physischen Weltall gibt es nur zwei Classen von Dingen, Materie und Energie.“ (Tait, die Eigenschaften der Materie. Wien, 1888. S. 1.)

[2]) Mach, Mechanik, S. 167, Abschn. 22.

aller Kräfte hindurchgehen muss, wenn eine fortschreitende Bewegung eintreten soll. Dass dieser Punkt zugleich die Resultierende aller Schwerkräfte enthält, ergibt sich dann sofort.

Sind m_1 und m_2 zwei einzelne Massenpunkte und sollen dieselben stets parallele und gleiche Wege in gleichen Zeiten zurücklegen, so müssen auf dieselben in der jedesmaligen Bewegungsrichtung Kräfte wirken, die ihnen immer gleiche Beschleunigungen ertheilen. Diese Kräfte müssen also den Massen proportional sein. Denkt man sich dann die beiden Massen zu einem starren System vereinigt, so können diese Kräfte zu einer Resultierenden zusammengesezt werden, welche dieselbe Richtung hat und ihrer Summe gleich ist. Die Resultierende muss die Verbindungslinie der beiden Massentheilchen in einem Punkte schneiden, dessen Abstände von denselben den Componenten, folglich auch den Massen verkehrt proportioniert sind. Dieser Durchschnittspunkt ist daher ganz unabhängig von der Richtung und Beschleunigung der progressiven Bewegung, durch ihn muss die Resultierende immer durchgehen, wenn eine fortschreitende Bewegung dieses einfachsten, aus zwei Massenpunkten bestehenden starren Körpers eintreten soll, er ist der sogenannte Schwerpunkt dieses Körpers. Da man sich in diesem Punkte gleichsam beide Massen vereinigt denken kann, so genügt es, die Ausdehnung dieser Betrachtung auf drei und mehrere Punkte mehr anzudeuten, als mathematisch durchzuführen.

7. Maschinen. Da die Statik und Dynamik gegenwärtig nicht mehr getrennt werden, so würde es sich auch empfehlen, die Gleichgewichtssätze für die sogenannten Maschinen, die ohnehin meist viel zu weit ausgesponnen werden, nicht in einen besonderen Abschnitt zusammenzufassen, sondern an passenden Stellen eizufügen. Ob man sich hiebei auf solche Fälle, die auch für die theoretische Auffassung der Grundlehren der Mechanik bedeutungsvoll sind, beschränken, oder auch solche, die mit Rücksicht auf ihre häufige Verwendung in der Praxis von Interesse sind, heranziehen soll, sei dahingestellt. Jedenfalls wären aber praktisch unmögliche oder wertlose, dabei auch vielleicht theoretisch bedeutungslose Verallgemeinerungen und Annahmen ganz auszuschliessen. Die Bewegung und das Gleichgewicht an der schiefen Ebene könnten unmittelbar hintereinander besprochen werden, da die zu überwindende Last immer als Gewicht des betreffenden Körpers specialisiert wird. Der Hebel [1]) hingegen wäre als Ausgangspunkt der Lehre von der drehenden Bewegung starrer Körper zu wählen, weil er hier seiner großen Bedeutung entsprechend in das rechte Licht gestellt wird.

[1]) Bei der Untersuchung des Gleichgewichtes am Hebel ist auf den Umstand nicht zu vergessen, dass die Resultierende zweier auf einen starren Körper wirkenden Kräfte nur für den Fall bestimmt wurde, dass die Richtungen dieser Kräfte in einer Ebene liegen. Die nothwendigen Ergänzungen wird der Schüler kaum selbst herausfinden.

Die Aufnahme von Erörterungen der Mechanik in ihrer rein mathematischen Gestaltung sollten, wenn sie schon in den Schulunterricht aufgenommen werden, möglichst jenen Ausdruck erhalten, durch welchen sie sich an Beobachtung und Erfahrung am besten anschliessen. Ist das sogenannte Princip der virtuellen Verschiebungen als Grundlage der schulmäßigen Darstellung der Statik viel zu abstract und spitzfindig, so ist ebenso dessen nachträgliche Begründung bei einzelnen Maschinen in der Beschränkung auf beliebig kleine Verschiebungen einer richtigen Auffassung der sogenannten goldenen Regel der Mechanik eher abträglich, als förderlich. Es sollte dasselbe nur an Beispielen ohne Störung des Gleichgewichtes wirklich vollziehbarer Verschiebungen, also an Fällen indifferenten Gleichgewichtes, an denen ja kein Mangel ist, besprochen werden.

Auch in der Darstellung des Begriffes der Arbeit findet man in den Schulbüchern einen gewissen Dualismus. Der Begriff wird bald rein mathematisch, wie in der analytischen Mechanik, als ein Product, bald im Sinne der Auffassung des gemeinen Lebens und der technischen Mechanik mit Bezugnahme auf eine Bewegung, welcher eine Kraft entgegenwirkt, entwickelt. Diese letztere Auffassung schließt sich dem Gesetz von der Erhaltung der Energie auf das natürlichste an, denn das Charakteristische derselben liegt eben darin, dass an ein Überwinden und an ein Überwundenwerden einer Kraft immer gleichzeitig gedacht wird. Mit derselben wäre es im Einklange, wenn man bei einer Bewegung in der Richtung der Kraft von einem Arbeitsverbrauch sprechen würde, weil man die Kraft überwinden müsste, um den Körper an die frühere Stelle zurückzuführen.

8. Hebel. Wirken an einem um eine Achse drehbaren Körper Kräfte, so kann zunächst jede von ihnen in zwei Componenten zerlegt werden, von denen die eine in einer zur Achse senkrechten Ebene wirksam und die andere der Achse parallel ist. Die der Drehungsachse parallelen Kräfte sind immer unwirksam. Die in Ebenen senkrecht zur Achse wirksamen Kräfte können immer in eine und dieselbe Ebene verlegt gedacht werden. Man kann nämlich immer die eine Kraft in die Ebene der anderen verlegen, wenn man ein unwirksam bleibendes Kräftepaar hinzufügt, welches etwa an einer zur Achse parallelen Geraden angreift. Es ist daher gestattet, bloß Kräfte, die in derselben zur Achse senkrechten Ebene wirken, in Betrachtung zu ziehen.

Hat man zunächst zwei solche Kräfte, so kann ihre Resultierende nur dann durch die Drehungsachse gehen, wenn sie den Körper in verschiedenem Sinn um diese Achse zu drehen suchen. Dieses Gleichgewicht wird eintreten, wenn ihre Drehmomente in Bezug auf die Drehachse einander gleich sind.

Daraus folgt aber auch andererseits, dass Kräfte von gleichem Dreh-

moment und gleichem Drehungssinn einander ersetzen können. Es ist also auch die Ersetzung mehrerer Kräfte von gleichem Drehungssinn durch eine einzige Kraft, deren Drehmoment der Summe der Drehmomente dieser Kräfte gleich ist und die den Körper in demselben Sinn zu drehen sucht, statthaft.

Wirken nun viele Kräfte an einem um eine Achse drehbaren Körper, so tritt Gleichgewicht ein, wenn die Kräfte, die den Körper in dem einen Sinn, und die Kräfte, die ihn im entgegengesetzten Sinne zu drehen suchen, gleiche Summen von Drehmomenten haben.[1])

Bei der drehenden Bewegung eines Körpers um eine Achse kommt es also nicht so sehr darauf an, wie groß eine an demselben wirksame Kraft ist, sondern wie groß deren Drehmoment ist.

Eine Vereinbarung, wie weit der physikalische Elementarunterricht Messungsinstrumente, die Beschreibung ihrer feineren Einrichtung, die Prüfung ihrer Richtigkeit, die Entwicklung der Bedingungen für eine entsprechende Empfindlichkeit derselben zu berücksichtigen habe, wäre sehr wünschenswert. Bei den verschiedenen Hebelwagen ist in dieser Hinsicht eine eingehendere Behandlung als bei anderen Messungsinstrumenten üblich geworden.

Bei der Wage wird es häufig gleichsam als selbstverständlich hingestellt, dass die verglichenen Gewichte bei h o r i z o n t a l e r Stellung des Wagebalkens gleich sind. Wenn dann bei der Darstellung des Verfahrens zur Prüfung der Richtigkeit einer Wage eine Figur benützt wird, in welcher je zwei Punkte von einem zwischengelegenen fünften, die alle in einer Geraden liegen, gleichweit entfernt sind, und in welcher diese Punkte die Aufhängungspunkte der Wageschalen, die Schwerpunkte der beiden Hälften des Wagebalkens und die Drehungsachse vorstellen, so befindet sich die Wage im indifferenten Gleichgewichte, soferne die Bedingungen der Richtigkeit erfüllt sind; diese Wage müsste daher in jeder anderen Lage, als der horizontalen, unter den gleichen Bedingungen im Gleichgewichte sein. Die Ersetzung des einen Schwerpunktes des ganzen Wagebalkens durch die zwei seiner Hälften ist hier nicht nur überflüssig, sondern auch schädlich. Wenn nur von einem, nicht in der Drehungsachse liegenden Schwerpunkt die Rede ist, erkennt man sofort, dass der Wagebalken allein nur dann kein Drehmoment gibt, wenn die vom Schwer-

[1]) Durch die Lehre von der Ersetzbarkeit von Kräften an einem Hebel kann daher das Gleichgewicht an demselben mittelst der Formel $Pp = Qq$ in der allgemeinsten Weise begründet werden. Die Ableitung der Formeln $Rr = Pp + Qq$ und $Rr = \Sigma(Pp)$ für die Resultierende zweier oder mehrerer in derselben Ebene an einem Körper wirksamen Kräfte ist ganz entbehrlich. Die Formel $Pp = Qq$ ist bloß eine für physikalische Zwecke geeignete Umformung des auf das Kräfteparallelogramm angewendeten Sinussatzes.

punkte auf die Drehungsachse gefällte Senkrechte, deren Lage durch die sogenannte Zunge gekennzeichnet ist, sich vertical stellt.

Bei der Besprechung der Empfindlichkeit der Wage wird es sich vielleicht empfehlen zu bemerken, dass bei den Wagen je nach dem Zwecke, dem sie zu dienen haben, oft eine geringere Empfindlichkeit geradezu nothwendig ist und dass die Richtigkeit einer Wage nur innerhalb der Grenzen ihrer Empfindlichkeit erfüllt sein kann.

Mittelst der Lehre von der Ersetzbarkeit von Kräften an einem Hebel könnte man die Erscheinung, dass die auf einer Brückenwage angebrachte Last genau so wirkt, als wenn sie an der die Brücke tragenden Zugstange befestigt wäre, fast ohne Aufwand von Formeln sofort klar machen.

9. Krummlinige Bewegung. Die bisher üblichen elementaren Ableitungen für die centripetale Beschleunigung einer krummlinigen Bewegung sind in neuerer Zeit wiederholt in Bezug auf ihre Stichhältigkeit Gegenstand der Besprechung und Untersuchung in den Schulzeitschriften[1]) gewesen.

Alle diese Ableitungen lassen sich auf zwei wesentlich verschiedene Anschauungen zurückführen. Nach der einen derselben wird die krummlinige Bahn als gegeben angenommen und in der bei der Behandlung der Wurfbewegung üblichen Weise die Bewegung aus einer tangentialen und radialen entstanden gedacht. Gegen dieselbe wird eingewendet, dass eine unbeschränkt kleine Wegänderung und eine unbeschränkt kleine Richtungsänderung von derselben Ordnung in Rechnung gezogen werden, so dass bei einem G r e n z ü b e r g a n g e beide zugleich verschwinden. Dieses Bedenken entfällt, wenn man bloß eine unbeschränkte Annäherung an eine Grenze mathematisch für zulässig erachtet. Dem wirklichen Grenzübergange weicht auch Höfler in seiner Ergänzung des Beweises durch den Hinweis aus, dass für ein unbeschränkt kleines Bogenstück Krümmungskreis und Parabel sich nur um eine unbeschränkt kleine Größe der zweiten Ordnung unterscheiden, dass daher für ein solches Bogenstück die Gesetze der Wurfparabel Geltung behalten.

Nach der anderen Anschauungsweise wird die krummlinige Bahn, ähnlich wie bei der Centralbewegung, durch unbeschränkte Grenzannäherung aus einer gebrochenen Linie und die continuirliche Kraft durch eine Grenzannäherung aus aufeinanderfolgenden Impulsen entstanden gedacht.

[1]) Maiß, Zur Lehre von der Centralbewegung. Zeitschrift f. d. Realschulwesen. 13. J., Wien, 1888. S. 201.

Voss, Die Schwungkraft. Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterricht. 2. J., Berlin, 18 9. S. 17.

Mach, Über die Schwungkraft. Ebenda. S. 103.

Höfler, Zur vergleichenden Analyse der Ableitungen für Begriff und Größe der centripetalen Beschleunigung. Ebenda. S. 277.

Um diese Betrachtungsweise einwurfsfrei zu machen, müsste man diesen Impulsen selbst eine gewisse Zeitdauer bis zur Erlangung ihrer jedesmaligen Größe zuschreiben, wodurch dieselbe an Übersichtlichkeit allerdings verlieren würde.

Aus diesem Anlasse wurde auf die Vorzüge der Hamilton'schen Vectoren, welche die Geschwindigkeitsänderungen ihrer Größe und Richtung nach zugleich in Berücksichtigung ziehen, für die hieher gehörigen Ableitungen verweisen. Der sogenannte Hodograph, d. i. der Ort des Endpunktes der von einem festen Punkt aus sowohl der Größe, als der Richtung nach aufgetragenen Geschwindigkeit, durch welchen die Beschleunigungsänderungen sowohl ihrer Größe, als ihrer Richtung nach sich sofort übersehen lassen, gestattet eine überaus einfache Ableitung für die centripetale Beschleunigung einer kreisförmigen Bewegung.[1]) Auch die Giltigkeit des Newton'schen Gravitationsgesetzes für einen und denselben Planeten in seinen verschiedenen Abständen von der Sonne wird mittelst des Hodographen durch einen besonders kurzen und elementaren Beweis, der sich auf die Constanz des Productes der von den beiden Brennpunkten einer Ellipse auf eine Tangente gefällten Lothe stützt, aus den beiden ersten Kepler'schen Gesetzen von Maxwell abgeleitet.[2]) Um die weitere Verwendbarkeit des Hodographen für einen elementaren Unterricht zu zeigen, wird auch darauf verwiesen, dass der Aberrationsbahn eines Sternes der Hodograph der Bewegung der Erde zugrunde liegt.[3])

Hiezu ist in sachlicher Hinsicht zu bemerken, dass ohne eingehendere Heranziehung des Zusammenhanges mit dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten und ohne Grenzerörterungen ein genauerer Nachweis für die centripetale Beschleunigung auf diesem Wege auch nicht möglich ist. Gegen die Verwendung der Vectoren der Geschwindigkeit in der Schule wird mit Recht eingewendet, dass in einem elementaren Unterrichte, der durch klare Vorstellungen Einsicht und Überzeugung gewähren soll, die Richtung und Größe der Geschwindigkeiten wohl auseinandergehalten werden müssen. Für die besonderen Verhältnisse der österreichischen Mittelschulen kommt noch hiezu, dass der Hodograph, der gewissermassen eine Geschwindigkeitscurve in Polarcoordinaten, und zwar als Bahn eines fictiven Punktes vorstellt, weit über das mathematische Fassungsvermögen des Schülers dieser Stufe hinausgeht. Kann man diesem schon die Veran-

[1]) Diese Ableitung gibt auch Wallentins Physik von der 5. Auflage an.

[2]) Maxwell, Substanz und Bewegung. Braunschweig. 1881. S. 123 bis 127. Der Beweis findet sich auch in Tait's, die Eigenschaften der Materie. Wien, 1888. Seite 120.

[3]) M. K. (Koppe), die elementare Herleitung des Newton'schen Anziehungsgesetzes aus den Kepler'schen Gesetzen. Zeitschrift f. phys. u. chem. Unterricht. 1. J. Berlin, 1888. Seite 129.

schaulichung einer von der Zeit abhängigen Beschleunigung durch die Geschwindigkeitscurve in rechtwinkeligen Coordinaten nicht recht zumuthen, so muss es ihn geradezu verwirren, bei dem Hodographen an die Geschwindigkeiten (und zwar ihrer Größe und Richtigkeit nach) des in der Geschwindigkeitscurve sich bewegenden fictiven Punktes denken zu sollen, ohne dabei die Bewegung des Punktes, um die es sich eigentlich handelt, aus den Augen zu verlieren.

Ein anderer Gedanke liegt den in der analytischen Mechanik üblichen Ableitungen der centripetalen Beschleunigung zugrunde. „Hat man einmal die Galilei'sche Erkenntnis, dass die Kraft eine Beschleunigung bestimmt, so ist es unvermeidlich, jede Abänderung einer Geschwindigkeit und folglich auch jede Abänderung einer Bewegungsrichtung (weil diese durch drei zu einander senkrechte Geschwindigkeitscomponenten bestimmt ist) auf eine Kraft zurückzuführen." [1]) Diese durchaus verständliche und einfache Anschauung übertrifft wohl auch für die Zwecke des Elementarunterrichtes alle anderen an Klarheit.

Bewegt sich ein Punkt in einer krummen Linie gleichförmig mit der Geschwindigkeit c und ist s ein Bahnelement, dessen Endnormalen einen Winkel δ einschließen, zu welchem im Abstande 1 vom Schnittpunkte der Kreisbogen β gehört, so kann die Bewegung aus zwei geradlinigen entstanden gedacht werden, von denen die constante Richtung der einen mit der ersten Normale den Winkel α, mit der zweiten Normale den Winkel α^1 einschließt, während die andere Bewegung eine dazu senkrechte Richtung hat. Dann ist $\alpha^1 - \alpha = \delta$. Wird das Bahnelement in der Zeit τ durchlaufen und ist ρ der Krümmungsradius desselben, so ist

$$s = c\,\tau \text{ und unbeschränkt nahe } = ..\rho\,\beta$$

Die Geschwindigkeiten in den beiden Richtungen sind

$$v_1 = c \operatorname{Sin} \alpha \text{ und } v_2 = c \operatorname{Cos} \alpha$$

daher die Beschleunigungen die Grenzen, denen sich die Ausdrücke

$$\frac{c}{\tau}\left(\operatorname{Sin} \alpha^1 - \operatorname{Sin} \alpha\right) \text{ und } \frac{c}{\tau}\left(\operatorname{Cos} \alpha^1 - \operatorname{Cos} \alpha\right)$$

unbeschränkt nähern. Setzt man demnach, was mit unbeschränkter Annäherung gilt

$$\operatorname{Sin} \frac{\alpha^1 - \alpha}{2} = \operatorname{Sin} \frac{\delta}{2} = \cdot\cdot \frac{1}{2}\beta \;;\; \tau = \cdot\cdot \frac{\rho}{c}\beta$$

$$\operatorname{Cos} \frac{\alpha^1 + \alpha}{2} = \cdot\cdot \operatorname{Cos} \alpha \text{ und } \operatorname{Sin} \frac{\alpha^1 + \alpha}{2} = ... \operatorname{Sin} \alpha$$

so findet man für diese Beschleunigungen

$$\frac{c^2}{\rho} \operatorname{Cos} \alpha \text{ und } -\frac{c^2}{\rho} \operatorname{Sin} \alpha$$

[1]) Mach, Mechanik. S. 146.

Die Bewegung in der ersten Richtung ist also ungleichmäßig beschleunigt, in der zweiten Richtung ungleichmäßig verzögert.

Will man beide Beschleunigungen aus einer einzigen sich entstanden denken, so muss man das Parallelogramm so zeichnen, dass die positive Beschleunigung in der Bewegungsrichtung, die negative der Bewegungsrichtung entgegen aufgetragen wird. Die resultierende Beschleunigung ist nach dem Pythagoräischen Satze: $\frac{c^2}{\rho}$. Ist der Neigungswinkel derselben gegen die erstere Bewegungsrichtung φ, so findet man denselben aus $Tg\,\varphi = \frac{c^2}{\rho} Sin\,\alpha : \frac{c^2}{\rho} Cos\,\alpha = Tg\,\alpha$. Die resultierende Beschleunigung fällt also in die Richtung der Normale oder gegen den Krümmungsmittelpunkt des Bahnelementes. Eine krummlinige gleichförmige Bewegung kann daher so entstehen, dass der bewegte Punkt, der in Folge seines Beharrungsvermögens sich tangential gleichförmig fortbewegen würde, durch eine Kraft $\frac{mc^2}{\rho}$ gegen den jedesmaligen Krümmungsmittelpunkt hingezogen wird. Es ist daher auch die bloße Krümmung der Bahn als eine Geschwindigkeitsänderung, somit als Wirkung einer Kraft von allerdings stets anderer Richtung aufzufassen.

Da die bloße Krümmung der Bahn nur eine Geschwindigkeitsänderung in der Richtung der Normale hervorruft, so kann eine ungleichförmige Bewegung in krummliniger Bahn nur so entstehen, dass neben der die beständige Richtungsänderung hervorrufenden Centripetalkraft eine tangentiale Kraft die Änderungen der Bahngeschwindigkeit veranlasst; die Resultierende dieser beiden Kräfte hat dann eine zwischen der Normale und Tangente liegende Richtung.

Da man an unseren Mittelschulen auf der betreffenden Unterrichtsstufe den Begriff des Krümmungsradius nicht wissenschaftlich feststellen kann, so wird man die centripetale Beschleunigung zunächst für eine kreisförmige Bewegung ableiten müssen und erst hinterher in mehr populärer Weise die krummlinige Bewegung im allgemeinen in Kürze berühren.

Für die kreisförmige Bewegung wird hiebei eine Figur der Betrachtung zugrunde gelegt, welche in der elementaren Mechanik auch sonst von besonderer Bedeutung ist, denn nicht allein die gleichförmige Bewegung im Kreise, sondern auch die geradlinige schwingende Bewegung unter der Wirkung einer dem jedesmaligen Abstande von der Ruhelage proportionalen Kraft wird auf diesem Wege auf das fasslichste erklärt. Man denkt sich nämlich die kreisförmige Bewegung durch zwei aufeinander senkrechte geradlinige Bewegungen entweder längs zweier Durchmesser (entsprechend der Mittelpunktsgleichung) oder längs eines Durchmessers

und der in seinem Endpunkte errichteten Tangente (entsprechend der Scheitelgleichung des Kreises) entstanden.

Die Untersuchung wird zunächst der näheren Erörterung dieser schwingenden Bewegungen sich zuzuwenden haben. Zeichnet man etwa den einen Durchmesser horizontal, den anderen vertical und denkt sich den Punkt bei Beginn der Bewegung in dem einen Endpunkt des horizontalen Durchmessers, so hat derselbe nach der Zeit t, wenn der zu ihm gezogene Radius mit dem horizontalen Durchmesser den Winkel α bildet, vermöge seiner horizontalen Bewegung vom Mittelpunkte des Kreises den Abstand $r \operatorname{Cos} \alpha$, vermöge seiner verticalen Bewegung den Abstand $r \operatorname{Sin} \alpha$, oder mit Benützung der Beziehungen $ct = \frac{\pi}{180} r \alpha^0$ und $c \Theta = 2r\pi$, wenn Θ die Umlaufzeit des Punktes ist

$$s_1 = r \operatorname{Cos} \frac{360^0}{\Theta} t \text{ und } s_2 = r \operatorname{Sin} \frac{360^0}{\Theta} t$$

Die zugehörigen Geschwindigkeiten findet man durch Zerlegung der tangentialen Geschwindigkeit c in ihre beiden Componenten

$$v_1 = c \operatorname{Sin} \frac{360^0}{\Theta} t \text{ und } v_2 = c \operatorname{Cos} \frac{360^0}{\Theta} t$$

Durch eine Grenzerörterung, die ganz der früher auseinandergesetzten entspricht, ergeben sich sodann die Beschleunigungen

$$b_1 = \frac{c^2}{r} \operatorname{Cos} \frac{360^0}{\Theta} t \text{ und } b_2 = -\frac{c^2}{r} \operatorname{Sin} \frac{360^0}{\Theta} t$$

oder

$$b_1 = \left(\frac{c}{r}\right)^2 s_1 = k\, s_1 \text{ und } b_2 = -\left(\frac{c}{r}\right)^2 s_2 = -k\, s_2$$

woran sich die bekannten Discussionen knüpfen. Die Schwingungsdauer jeder der beiden geradlinigen Schwingungen ist der Umlaufszeit des Kreispunktes gleich. Daher ist

$$\Theta = 2\pi . \frac{r}{c} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{k}}$$

Hat man von diesen Betrachtungen die im elementaren Unterrichte erforderlichen Anwendungen gemacht und die entsprechenden Versuche daran geknüpft, so wird man sie umgekehrt dazu benützen, um zu zeigen, wie durch eine einzige Kraft eine kreisförmige Bewegung entstehen kann. An die Formeln $b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ und $\operatorname{Tg} \varphi = \operatorname{Tg} \alpha$ knüpfen sich ganz dieselben Folgerungen, wie in der früheren Auseinandersetzung. Da übrigens die componierenden Beschleunigungen stets gegen den Kreismittelpunkt gerichtet sind, so folgt auch ohne alle Formeln, dass auch deren Resultierende nur gegen diesen Mittelpunkt gerichtet sein kann.

Will man Quotienten unbeschränkt kleiner Größen vermeiden, um mit den dynamischen Begriffserklärungen der Geschwindigkeit und Beschleunigung das Auslangen zu finden, so wird man wohl die Ableitung der kreisförmigen Bewegung aus einer gleichzeitigen tangentialen und radicalen benützen müssen. Die folgende Behandlungsweise würde vielleicht dem Zwecke entsprechen.

Beschreibt der sich bewegende Punkt in den Zeittheilchen τ den zu einem Centralwinkel α, dem im Abstande 1 der Bogen β entspricht, gehörigen Bogen $r\beta$ eines Kreises und ist die constante Geschwindigkeit des Punktes c, so ist zunächst $\beta = \frac{c}{r}\tau$. Diesen Bogen $r\beta$ kann man sich nun so entstanden denken, dass der Punkt vermöge seiner Trägheit sich tangential gleichförmig und gleichzeitig vermöge der Wirksamkeit einer vom Mittelpunkte ausgehenden Kraft stets gegen den Mittelpunkt hin bewegt. Hätte also der Punkt in der Zeit τ sich in Folge der gleichförmigen Bewegung um ein Stück σ in der Verlängerung des zweiten Schenkels des Winkels α von dem Kreisumfange entfernt, so ist diese Abweichung eine Folge der centripetalen Kraft. Für ein unbeschränkt kleines α ist auch die Richtungsänderung unbeschränkt klein, es ist dann auch das Stück σ unbeschränkt nahe als der der äußerst kurzen Wirksamkeit der Kraft entsprechende Weg anzusehen. Nun ist

$$\sigma = \frac{r}{\operatorname{Cos}\alpha} - r = \frac{2r}{\operatorname{Cos}\alpha}\operatorname{Sin}^2\frac{\alpha}{2}$$

für ein unbeschränkt kleines α ist auch unbeschränkt nahe

$$\operatorname{Cos}\alpha =\cdot\cdot 1\ ;\ \operatorname{Sin}^2\frac{\alpha}{2} =\cdot\cdot \frac{\beta^2}{4} =\cdot\cdot \frac{c^2}{4r^2}\tau^2$$

$$\sigma =\cdot\cdot \frac{1}{2}\frac{c^2}{r}\tau^2$$

Verglichen mit der Formel $s = \frac{1}{2}bt^2$ für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung, stellt auch $\frac{c^2}{r}$ die Beschleunigung einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung vor. Jedes unbeschränkt kleine, aber von 0 noch verschiedene σ ist daher unbeschränkt nahe als ein in gleichmäßig beschleunigter Bewegung zurückgelegter Weg anzusehen. Die kreisförmige gleichförmige Bewegung entsteht also durch eine fortwährende Anziehung gegen den Mittelpunkt, die in der jedesmaligen Richtung unbeschränkt kurz währt. Der Größe nach ist diese Anziehung, die sogenannte Centripetalkraft, unbeschränkt nahe stets dieselbe, nämlich $\frac{mc^2}{r}$.

Hat man diese oder eine ähnliche Ableitungsart für die centripetale Beschleunigung gewählt, so müsste die Untersuchung der durch Projection

der kreisförmigen Bewegung auf einen Durchmesser entstehenden geradlinigen schwingenden Bewegung erst nachher durchgeführt werden. Die Zerlegung der centripetalen Beschleunigung gibt als Componente längs des Durchmessers

$$b = \frac{c^2}{r} \operatorname{Cos} \alpha = \left(\frac{c}{r}\right)^2 . s$$

wenn α der Winkel ist, den dieser Durchmesser mit dem Radius einschließt, welcher dem betreffenden Orte des Kreispunktes zur Zeit t entspricht, und wenn s der Abstand des zugehörigen Projectionspunktes vom Mittelpunkte ist.

10. Fliehkraft. Bei Gelegenheit der Besprechung der centripetalen Beschleunigung wurde auch die eigentliche Bedeutung der Fliehkraft von Maiß und Voss an den genannten Orten näher untersucht. Da die analytische Mechanik auf die krummlinige Bewegung bezügliche Fragen ohne Einführung einer Fliehkraft erledigt, so muss ihr Auftreten in der elementaren Mechanik befremden. Während Maiß in einigen Fällen eine Fliehkraft noch zuläßt, erklärt Voss dieselbe in allen Fällen als eine bloße mathematische Fiction. „Statt zu sagen: Die Kräfte müssen eine bestimmte Resultante ergeben, kann man sagen: Die auf den Körper wirkenden Kräfte müssen mit einer der vorigen gleichen, aber entgegengesetzt gerichteten Kraft im Gleichgewichte sein." „Diese hinzugefügte entgegengesetzt gerichtete Kraft pflegt man Centrifugalkraft zu nennen, man darf sich dieselbe aber nicht als eine wirklich auf den Körper wirkende Kraft vorstellen." [1]) In diesem Sinne ist nach Voss die Spannung des Fadens bei einem an einem elastischen Faden im Kreise bewegten Körper, die Resultierende aus der Anziehungskraft der Erde und dem von der Erdoberfläche gegen den Körper ausgeübten, entgegengesetzt gerichteten Druck bei der Bewegung eines Punktes auf dem Erdäquator, u. s. w. die centripetale Kraft.

Diese Auseinandersetzung befriedigt aber unser Erklärungsbedürfnis nicht vollständig. Was spannt den Faden? Was erzeugt einen Unterschied zwischen der Anziehung der Erde und dem von ihr ausgeübten Gegendrucke? sehen wir uns noch weiter zu fragen veranlasst. Hierauf antwortet Voss bei dem gespannten Faden: „Die ganze der Masse mitgetheilte lebendige Kraft zerlegt sich also in die Ausdehnungsarbeit und in die lebendige Kraft der Kreisbewegung."

[1]) Voss, am angeführten Orte, S. 20.

[2]) Auch an einem mathematischen Pendel ist die Spannung des Fadens während der Bewegung nicht der in die Verlängerung des Fadens fallenden Componente der Schwerkraft gleich, sondern um einen Betrag $\frac{m v^2}{l}$ je nach der augenblicklichen Bahngeschwindigkeit v größer, als diese Componente.

Solange die Betrachtungsweise Galilei-Newtons in der elementaren Mechanik der Schule überwiegt, wird man aber ebensowohl sagen können: Bei der krummlinigen Bewegung tritt stets eine der centripetalen Kraft entgegengesetzte centrifugale Kraft auf, sie spannt den Faden, sie erzeugt den Unterschied zwischen der Anziehung der Erde und dem von der Erde ausgeübten Gegendruck.

Diese Kraft kann man unbedenklich in der üblichen Weise aus dem Principe der gleichen Action und Reaction erklären. Denkt man sich auch die Kraft von dem Körper A ausgehend und auf B wirkend, die Gegenkraft von B ausgehend und auf A wirkend, so können sie doch zu einer Resultierenden vereinigt, also auch in einen gemeinsamen Angriffspunkt verlegt werden. Im Falle des gespannten Fadens könnte dieser Punkt etwa der Befestigungspunkt des an dem Faden angebrachten Körpers sein.

Will man das Princip der gleichen Action und Reaction vermeiden, so könnte man in folgender Weise überlegen. Wirkt an einem sich krummlinig bewegenden Körper eine centripetale Kraft, so kann dieselbe, wenn der Körper in Ruhe wäre, durch eine gleiche, entgegengesetzte Kraft aufgehoben gedacht werden. Diese letztere Kraft muss nun während der Bewegung, da sie jetzt nicht der centripetalen Kraft das Gleichgewicht hält, sich in anderer Weise wirksam erweisen. Die Fliehkraft ist daher allerdings fictiv, aber doch auch nicht fictiver, als manche andere Kräfte, z. B. die Reibung, der Widerstand des Mittels, die wir als reale Kräfte zu behandeln gewöhnt sind.

Beim erstmaligen Lesen der Maiß'schen Auseinandersetzungen fiel mir ein analoger Fall sofort ein. Fällt ein Körper unfrei, so wirkt nur ein Theil seines Gewichtes beschleunigend, der andere Theil muss als Druck oder Zug wirksam sein. Man könnte hier entweder mit Maiß sagen: Die den Fall beschleunigende Kraft wird dem Gewichte entnommen, oder mit Voss: Die beschleunigende Kraft ist die Resultante der Kräfte, man könnte aber auch, um das Erklärungsbedürfnis, das in dem letzten Falle noch zurückbleibt, zu befriedigen, sagen: Dem Gewichte wirkt eine Kraft entgegen. Um diese Überlegungen weiter auszuführen, denke man sich ein horizontales Brettchen in einer verticalen Führung durch eine passende Maschinerie beschleunigt oder verzögert beweglich, an dem Brettchen sei mittelst einer empfindlichen Federwage ein Gewicht befestigt. Ist die Bewegung des Brettchens verzögert, gleichförmig, oder beschleunigt, jedoch weniger wie beim freien Fall, so wird die Feder mit einer größeren Kraft, als das Gewicht, einer gleichen, oder kleineren gespannt. Ist die Bewegung dieselbe, wie beim freien Fall, so bleibt die Feder ungespannt; wird die Bewegung mehr beschleunigt, als beim freien Fall, so wird die Feder sogar zusammengedrückt. Hier bleibt also nichts übrig, als entweder nur von

einer resultierenden, beschleunigenden Kraft zu sprechen und die Spannungsverschiedenheiten der Feder aus dem Satze von der Erhaltung der lebendigen Kraft zu erklären, oder Kräfte, man mag sie fictive nennen, mit dem Gewichte gleichzeitig wirkend und die Spannungsverschiedenheiten hervorrufend anzunehmen.

Ganz von der eben geschilderten Art ist die Bewegung einer Flüssigkeit durch ein verticales Rohr mit verschieden weiten Querschnitten. Die hydrostatischen Drücke ändern sich während der Bewegung in die hydrodynamischen. In engeren Querschnitten ist infolge der zunehmenden Stromgeschwindigkeit der hydrodynamische Druck kleiner, als der hydrostatische, in weiteren Querschnitten ist infolge der abnehmenden Stromgeschwindigkeit der hydrodynamische Druck größer als der hydrostatische. Die analytische Mechanik erklärt diese Erscheinung durch Integration der Differentialgleichung für die lebendige Kraft eines Flüssigkeitselementes. Mach [1]) fügt eine populäre Erklärung ohne Rechnung hinzu, in welcher sofort fictive Kräfte auffallen. „Denken wir uns einen Augenblick in dem weiteren und in dem darauffolgenden engeren Querschnitt den Druck gleich, so findet die Beschleunigung der Elemente in dem engeren Querschnitt nicht statt. Die Elemente entweichen nicht schnell genug, drängen sich vor dem engeren Querschnitt zusammen und es entsteht vor diesem sofort eine entsprechende Druckerhöhung."

11. Änderung der Schwere infolge der Achsendrehung der Erde. Die zur Erklärung der Abnahme der Schwere von den Polen gegen den Äquator übliche Ableitung unter Zugrundelegung einer vollkommenen Kugelgestalt der Erde ließe sich mit Rücksicht darauf, dass die Endformel ohnehin nur auf einen idealen Fall sich bezieht, für mathematisch weniger geübte Schüler in folgender Weise vereinfachen.

Zerlegt man die Schwerebeschleunigung g bei ruhend gedachter Erde unter der geogr. Breite φ in eine gegen den Mittelpunkt des betreffenden Parallelkreises gerichtete Componente $\gamma = g \operatorname{Cos.} \varphi$ und in eine dazu senkrechte γ^1, so erfährt die erstere wegen der Achsendrehung der Erde eine Verminderung um die centripetale Beschleunigung

$$\beta = \frac{4 \rho \pi^2}{\vartheta^2} = \frac{4 r \pi^2}{\vartheta^2} \operatorname{Cos} \varphi = \frac{4 r \pi^2}{g \vartheta^2} \cdot \gamma = \frac{1}{290} \gamma$$

worin ρ der Halbmesser des Parallelkreises, r der Halbmesser der Erdkugel und ϑ ihre Umlaufszeit ist. Setzt man nunmehr die restliche Beschleunigung $\gamma - \beta = \frac{289}{290} \gamma$ mit γ^1 abermals zu einer Resultierenden g^1 zusammen, so wird diese nur um einen sehr kleinen $\angle \delta$ gegen die Richtung zum

[1]) Mechanik, S. 391.

Erdmittelpunkte abweichen, weil $\gamma - \beta$ gegen γ nur um wenig verschieden ist. In dem Dreieck, welches die Beschleunigung g bei ruhend gedachter Erde und die infolge der Achsendrehung geänderte Beschleunigung g' enthält, schließen g und g' den $\angle \delta$ ein, der Seite g' liegt der $\angle \varphi$, also ein spitzer Winkel gegenüber, daher ist der dritte Winkel von $\angle (180^\circ - \varphi)$ nur um wenig verschieden, oder ein stumpfer Winkel. Somit ist auch die diesem gegenüberliegende Seite $g > g'$, die Beschleunigung erfährt also durch die Achsendrehung eine Verminderung. Aus der Figur ist auch mittelst der gewöhnlichsten planimetrischen Lehrsätze sofort klar zu machen, dass in diesem Dreieck mit zunehmendem $\angle \varphi$ sowohl wegen dieser Zunahme, als auch wegen der gleichzeitigen Abnahme von β die dritte Seite g' fortwährend wächst und sich immer mehr der Seite g nähert.

12. Newtons Anziehungsgesetz. Gegen die in der elementaren Mechanik übliche Ableitung des Newton'schen Anziehungsgesetzes aus den Kepler'schen Gesetzen wurde neuerer Zeit immer öfter geltend gemacht, dass die angewendeten Annäherungen denn doch zu weit gehen. Wenn es auch zugelassen werden könnte, die Planetenbahnen als Kreise zu betrachten, so dürfe man doch die Sonne nicht in den Mittelpunkt dieser Kreise verlegen und die Planetenbewegungen als gleichförmig ansehen; damit entfalle dann auch die Berechtigung der Anwendung der Formel für die centripetale Kraft auf die Anziehungskraft der Sonne.[1]) Es sind auch bereits zahlreiche elementare Herleitungen des Newton'schen Gesetzes zunächst für einen und denselben Planeten in seinen verschiedenen Lagen in der Ellipse aus den beiden ersten Kepler'schen Gesetzen[2]), sowie für zwei Planeten unter Heranziehung des dritten Gesetzes bekannt. Die mathematischen Zurüstungen sind jedoch in allen diesen Fällen zu umfangreich und in keinem Verhältnis mit dem hiedurch in physikalischer Hinsicht erlangten Gewinn. Bei der dem Gegenstande knapp zugemessenen Zeit wären derartige Erweiterungen mit einer Einbuße in anderer Hinsicht verbunden.[3]) Zudem fehlen an unseren Mittelschulen auf dieser Stufe die nothwendigen Voraussetzungen

[1]) H. Vogt, Die elementare Herleitung des Newton'schen Anziehungsgesetzes aus den Kepler'schen Gesetzen. Zeitschr. f. math.-naturw. Unterricht. Leipzig, 1887, S. 481. Maiß, Zur Lehre von der Centralbewegung. Zeitschrift für das Realschulwesen. Wien, 1891, S. 337.

[2]) Für den besonderen Fall der Lage des Planeten in den beiden Endpunkten der großen Achse der Ellipse ist diese Ableitung mit den allereinfachsten Mitteln ausführbar. Vgl. Zeitschrift für den phys. u. chem. Unterricht. Höfler, Zur Ableitung des Newton'schen Gesetzes aus den Kepler'schen Gesetzen. 5. J. Berlin, 1891. S. 72.

[3]) Eine Methode der Dichtenbestimmung der Erde, die auch den eingeschlagenen Weg verständlich macht, die Bestimmung der Masse der Sonne und der Planeten, die Beschreibung parallaktischer Erscheinungen, auch solcher irdischer Art u. dgl. wären vom physikalischen Standpunkte weit wünschenswertere und nothwendigere Erweiterungen.

zu einer solchen Erweiterung, nämlich einige Kenntnis der Kegelschnittslinien.

Befindet sich aber der mathematische und physikalische Unterricht in der Hand desselben Lehrers, so werden, wie bei sonstiger Gelegenheit, auch bei dem späteren Unterrichte in den Kegelschnittslinien physikalische Anwendungen, wozu auch die Ableitung des Newton'schen Anziehungsgesetzes gehört, durchaus passend sein. An unseren Mittelschulen werden die Kegelschnittslinien in analytischer Behandlung besprochen. Hat man an der Geraden und dem Kreise die analytische Methode auseinandergesetzt und eingeübt, so wäre es ein Missgriff, auch die Kegelschnittslinien aus diesem Gesichtspunkte zu behandeln. Diese wollen um ihrer selbst willen vorgenommen sein, wozu neben ihren bedeutungsvollen Eigenschaften auch ihr Auftreten in Naturerscheinungen gehört. Aufgaben von derselben Art, wie bei der analytischen Behandlung der Geraden und des Kreises oder gar die Discussion der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades würden mit dieser Auffassung nicht übereinstimmen.

13. Die drehende Bewegung und das physische Pendel. Die drehende Bewegung wird in den Schulbüchern in allgemein theoretischer Hinsicht meist recht ausführlich besprochen. Die karge Anwendung dieser Lehren bloß auf das physische Pendel steht damit nicht recht im Einklange. Drehende Bewegungen gehören ja fast noch mehr, wie fortschreitende, zu den alltäglichsten Erscheinungen, deren zutreffende Auffassung seitens der Schüler gewiss anzustreben ist. Ohne eine Besprechung besonderer, möglichst einfacher Beispiele von verschiedener Art ist aber auch hier, u. zwar hier besonders eine genügende Einsicht und subjective Überzeugung nicht zu erzielen. Hat man die erforderliche Zeit, so wird daher gerade an dieser Stelle ein längeres Verweilen durchaus zu billigen sein.

Schon die Grundbegriffe einer Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung werden erst in ihrer Anwendung auf besondere Fälle verständlich. Die Bewegung der Zeiger einer Uhr als Beispiel für eine gleichförmige, des Rädchens der Fallmaschine [1]) für eine gleichmäßig beschleunigte, des schweren Punktes eines mathematischen Pendels für eine ungleichmäßig veränderliche Drehung dürften diesem Zwecke besonders entsprechen.

Nach dieser Vorbereitung und nach erlangter Einsicht, dass es bei der drehenden Bewegung nicht so sehr auf die Kräfte, als auf ihre Drehmomente ankommt, wird auch die Ableitung der Formel $D = T\gamma$ keine Schwierigkeiten mehr machen. Hat der Schüler schon bei Gelegenheit der Besprechung des Schwerpunktes den Sinn der in die einzelnen Massenpunkte

[1]) Geeigneter wäre eine eigens zu dem Zwecke quantitativer Versuche über die gleichmäßig beschleunigte Drehung zusammengestellte Vorrichtung. Vgl. M. Koppe, Das Trägheitsmoment. Zeitschrift f. d. phys. u. chem. Unterricht. 5. J. Heft 1. Berlin, 1891.

zu verlegenden Elementarkräfte als eines bloß wissenschaftlichen Untersuchungsmittels richtig erkannt, so wird es ihm sofort klar, dass das Drehmoment der Resultierenden aller Kräfte der Gesammtsumme der Drehmomente dieser fictiven Elementarkräfte gleich sein müsse.

Nunmehr wird auch ein anderer wesentlicher Unterschied im Vergleiche zu den fortschreitenden Bewegungen sich verständlich machen lassen. Sinkt bei dem gleichen Drehmoment die Winkelbeschleunigung auf die Hälfte, ein Drittel ihres Wertes, wenn die Summe T zweimal, dreimal größer wird, so ist hier offenbar T ein Maß des Beharrungswiderstandes. Dieser hängt also bei der drehenden Bewegung nicht allein von der Masse des Körpers, sondern auch von dessen Gestalt und von der Lage der Drehungsachse in demselben ab.

Da die Summe T keine Änderung erfährt, wenn irgend ein Summenglied $m r^2$ durch $\mu \rho^2 = m r^2$ ersetzt wird, so könnte jeder Massenpunkt m eines um eine Achse drehbaren Körpers durch eine in einer anderen Entfernung anzubringende Masse μ ersetzt werden, wenn sich diese Massen umgekehrt wie die Quadrate ihrer Abstände von der Drehungsachse verhalten. Das Trägheitsmoment T ist daher jene Masse, welche im Abstand 1 von der Drehungsachse alle Massenpunkte des Körpers ersetzen würde. Denkt man sich daher an einem massenlosen Stabe, der um seinen Endpunkt drehbar ist, im Abstande 1 von diesem Endpunkte eine Masse T angebracht und wirkt an diesem Stabe eine Kraft von stets demselben Drehmoment, wie an dem Körper, so wird dieser fictive Stab immer in dem gleichen Bewegungszustand sein, wie der Körper. Hat der Schüler sich gewöhnt, bei allgemeinen Untersuchungen sich die Körper außerhalb des Wirkungsbereiches eines anziehenden Weltkörpers zu denken, so wird er diese Fiction richtig begreifen. Man wird ausdrücklich hinzufügen, dass die Masse T von der Gesammtmasse M des Körpers verschieden ist, dass man sich aber auch diese Gesammtmasse M an dessen statt an dem Stabe angebracht denken kann, wenn sie in eine solche Entfernung s vom Drehpunkte verlegt wird, dass $M s^2 = T$ ist, und dass man auch, wenn man will, die Kraft ebendahin verlegen kann, wenn sie nur das bestimmte Drehmoment hat.

Die besonderen Beispiele, die man hieran anschließen könnte, würden zunächst solche Fälle behandeln, bei denen einzelne größere Massen mit Vernachlässigung der vergleichsweise geringeren übrigen Masse des betreffenden Körpers allein berücksichtigt werden. Ein fester, leichter Stab, auf den schwere Kugeln oder Linsen aufgeschoben gedacht werden, wird durch ein Kräftepaar, das man sich etwa durch einen Druck der Hände hervorgerufen denken kann, um seine Mitte gedreht. Das Rädchen an der Fallmaschine, an dem man die Masse der Speichen gegen die des Rad-

umfanges vernachlässigen kann, wird durch das Übergewicht mitbewegt und verringert die Fallbeschleunigung. Ein dünner Reifen oder eine dünnwandige Röhre rollt über eine schiefe Ebene und dreht sich um die jedesmalige Berührungslinie. Ein dünner Stab, an dessen Enden gleiche Schwungräder angebracht sind, wobei die in dem Umfange dieser Räder vorhandenen verhältnismäßig größeren Massen allein berücksichtigt werden, rollt über ein schräges, schmales Brett so herab, dass die Schwungräder beiderseits des Brettes frei herabhängen. [1])

In allen diesen Fällen ist die Bildung der Ausdrücke für die Trägheitsmomente ohne irgendwelche Kenntnis von Reihensummen leicht durchführbar. Aber auch Integrationen ohne alle Vernachlässigung für einige besonders einfache Fälle lassen sich mit sehr einfachen Mitteln durchführen. [2]) Die Bewegung eines Stabes um seine Mitte, wenn auf denselben ein Kräftepaar wirkt, die Drehung einer Thüre infolge eines Händedruckes oder Windstosses, das Rollen einer kreisförmigen Scheibe über eine schiefe Ebene sind von dieser Art.

Mit bloßer Benützung des Begriffes des Trägheitsmomentes könnte die Balancierstange des Seiltänzers, das Springen des Turners mittelst einer Stützstange, die Drehung einer Kette von Eisläufern um einen Endpunkt u. dgl. besprochen werden.

In diesem Zusammenhange würde die Bewegung des physischen Pendels zur bloßen Schüleraufgabe. Wie groß ist das Drehmoment des Gewichtes des Pendels bei der Ausweichung α? Wie groß ist also die Winkelbeschleunigung bei dieser Ausweichung? Wie groß ist die gleichzeitige lineare Beschleunigung des Massenmittelpunktes des Pendels, wenn sein Abstand von der Drehungsachse l ist? Da dieser Punkt für sich allein ebenso schwingen würde, wie er im Körper schwingt, so ist dies auch die Beschleunigung eines mathematischen Pendels von der Länge l bei der Ausweichung α.

Nicht zu vergessen wäre auf die Frage, ob die Gesetze des mathematischen Pendels, zumal das von der Unabhängigkeit der Schwingungsdauer von der Masse auch für das physische Pendel Geltung haben. Diese Unabhängigkeit besteht nur dann, wenn der pendelnde schwere Körper gleichartig ist. Ein hölzernes und ein eisernes Lineal von gleicher Gestalt

[1]) Vgl. M. Koppe, Aufgaben über Trägheitsmomente. Zeitschrift f. phys. u. chem. Unterricht. 1. J. Berlin, 1888. S. 161.

[2]) Dass die Summe $\Sigma (n^2)$ mittelst der Beziehung $n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$ sich sehr einfach bestimmen lässt, scheint nicht hinreichend bekannt zu sein; es könnte vielleicht auch in den Schulbüchern in einer Fußnote darauf aufmerksam gemacht werden. Die ganz abstracte Berechnung von Trägheitsmomenten, ohne Beziehung auf besondere Beispiele, ist überflüssig.

und Größe, sowie gleicher Lage der Drehungsachse vollführen übereinstimmende Schwingungen.

Beabsichtigt man bloß mittelst der Lehren von der drehenden Bewegung das physische Pendel ins Klare zu stellen, wie das auch bei der knapp zugemessenen Zeit häufig geschehen muss, so könnte vielleicht folgender Weg eingeschlagen werden.

An einem Stab, der um seinen Endpunkt drehbar ist, sei im Abstande r vom Drehpunkte eine Masse m angebracht und es wirke an dem Stabe eine Kraft vom Drehmomente D. Es sei zunächst die Masse m groß genug, dass dagegen die des Stabes vernachlässigt werden kann. Die Kraft kann durch eine andere tangential wirkende K, welche in die Masse selbst verlegt wird, ersetzt werden, wenn

$$D = K r$$

ist. Diese Kraft ertheile der Masse m eine Beschleunigung b, so besteht die Gleichung

$$K = \frac{D}{r} = mb$$

Denkt man sich die Masse m vom Stabe entfernt und durch eine Masse m' ersetzt, während die Kraft das Drehmoment D behält, so hat man ebenso

$$\frac{D}{r'} = m' b'$$

Man erhält daher

$$m r b = m' r' b'$$

Soll der Stab sich in beiden Fällen in gleicher Weise drehen, so müssen die in gleichen Zeiten von den bewegten Massen zurückgelegten Bogen zu demselben Mittelpunktswinkel gehören, sich also wie die Abstände der Massen vom Drehpunkte verhalten. Da sich aber die Beschleunigungen wie die gleichzeitig beschriebenen Bogen verhalten, so muss

$$\frac{b}{b'} = \frac{r}{r'}$$

und also

$$m r^2 = m' r'^2$$

sein. Wirkt somit an einem Stabe eine Kraft von dem Drehmomente D, so kann ohne Änderung des Bewegungszustandes eine Masse m im Abstande r durch eine Masse m' im Abstande r' ersetzt werden, wenn $m r^2 = m' r'^2$ ist. Dies gilt auch, wenn die Masse des Stabes nicht außer Betracht bleiben darf; denn die Kraft würde in diesem Falle, weil sie auch den Stab zu bewegen hat, bloß der Masse m eine geringere Beschleunigung ertheilen.

Hieran könnte sich ohne vorgängige Feststellung der reducierten Pendellänge sofort folgender Versuch anschließen. Zwei hölzerne Linealpendel von ganz gleicher Art und Größe, an denen an derselben Stelle gleiche schwere Massen unten angebracht sind, schwingen das eine vor dem andern, wie nicht anders zu erwarten, in völlig übereinstimmender

Weise. Zeigt man nun, dass gleiche Massen, ober- und unterhalb der Drehungsachse eines solchen Pendels in gleichem Abstande angebracht, das Drehmoment des Pendelgewichtes in jeder beliebigen Lage des Pendels nicht ändern, so braucht man bloß an dem einen dieser Linealpendel je eine Masse m im Abstande 2 r, an dem anderen je eine Masse 4 m im Abstande r ober- und unterhalb der Drehungsachse hinzuzufügen und die beiden Pendel werden auch dann in vollständig übereinstimmender Weise schwingen.

Es ist daher statthaft, sich jeden drehbaren starren Körper durch einen masselosen Stab ersetzt zu denken, der irgendwo eine einzige Masse trägt, die alle einzelnen Massentheilchen des Körpers so ersetzt, dass eine an dem Stab wirkende Kraft von demselben Drehmoment wie an dem starren Körper den Stab in genau dieselbe Drehung wie den Körper versetzt. Hätte der Körper die Massen $m_1, m_2, m_3 \ldots$ in den Abständen $r_1, r_2, r_3 \ldots$ von der Drehungsachse, so müsste man an dem masselosen Stabe im Abstande 1 eine Masse T anbringen, welche

$$T = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots$$

ist. In einem anderen Abstande s hingegen müsste eine Masse Θ angebracht werden, so dass

$$\Theta s^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots = T$$

oder

$$\Theta = \frac{T}{s^2}$$

ist.

Hat man daher ein physisches Pendel, dessen Schwerpunkt den Abstand s von der Drehungsachse hat, und will man dasselbe durch einen masselosen Stab ersetzen, auf den im Abstande s von der Drehungsachse eine dem Gewichte P des Pendels gleiche verticale Kraft wirkt, so braucht man nur in demselben Abstand s die einzige Masse $\frac{T}{s^2}$ anzubringen. Soll dieser Stab ein mathematisches Pendel sein, so denkt man ihn sich auf der Oberfläche eines fingierten Planeten schwingend, auf welchem die Masse $\frac{T}{s^2}$ genau das Gewicht P hat. Sei die Fallbeschleunigung auf diesem Planeten γ, so ist

$$P = \frac{T}{s^2}\gamma \text{ oder } \gamma = \frac{Ps^2}{T}$$

Werden daher in der Formel $t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ für das mathematische Pendel die entsprechenden Werte eingesetzt, so ist

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{s}{\gamma}} = 2\pi\sqrt{\frac{T}{Ps}}$$

Auch bei dieser abgekürzten Behandlung wird man sich mit der Ableitung dieser Formel nicht begnügen dürfen. Man muss im Anschlusse an einen Versuch zeigen, wie die vorkommenden Größen etwa für einen Draht, der um einen Endpunkt schwingt, oder doch für ein Lineal, an welchem mehrere schwere Linsen sich befestigen lassen, gegen welche die Masse des Lineals vernachlässigt werden kann, zu bestimmen sind.

14. Erscheinungen, die in genügender Weise sich elementar nicht erklären lassen. Zu denjenigen Erscheinungen, deren Erklärung zu den schwierigsten nicht nur für den Schüler gehören, sind insbesondere auch jene zu zählen, die in der Achsendrehung der Erde ihren Grund haben, wie das Foucault'sche Pendel, die Abweichung fallender Körper von der Lothlinie, die Drehung der Winde, die somit umgekehrt einen Beweis für diese Achsendrehung bilden. Eine theoretische Besprechung dieser Erscheinungen sollte daher in der Schule besser ganz unterbleiben, denn mit der Zerlegung der Achsendrehung der Erde in eine Drehung des betreffenden Horizontes um die Zenitlinie und in eine solche um die Mittagslinie, deren schulmäßige Erörterung übrigens schwierig genug ist, ist auch das Foucault'sche Pendel, auf dessen Erklärung man sich gewöhnlich beschränkt, noch lange nicht abgethan. Das Gleiche gilt von der Präcessionsbewegung des Kreisels und der Präcession der Äquinoctien auf der Ekliptik. Noch im Juniheft 1889 der Zeitschrift für phys. u. chem. Unterricht S. 259 sagt M. Koppe: „Übrigens sind bis jetzt alle Versuche, den Grund der Kreiselbewegung physikalisch durchsichtig darzustellen, misslungen. . . Wir glauben nicht, dass die Herbeiziehung derartig gelöster Probleme dem Studium der Elemente förderlich sein kann. Eine unklare Auffassung der Begriffe muss die Fähigkeit beeinträchtigen, sie innerhalb ihres Geltungsbereiches mit Sicherheit zu verwenden.“ Man lese dann die eigene Behandlung Koppe's dieses Problems im Decemberheft 1890 dieser Zeitschrift, welche eine tiefere Ausgestaltung der bekannten Poggendorff'schen Erklärung ist und man wird zugeben, dass es sich hier um eine Reihe schwieriger Schlüsse handelt, die schon eine gereiftere physikalische Auffassung voraussetzen.

Man wird sich daher in den angeführten Fällen, soweit deren Aufnahme in den elementaren Unterricht wegen der damit zusammenhängenden wichtigen Folgerungen nicht unterlassen werden kann, entweder auf eine bloße Begründung durch den Versuch beschränken dürfen oder dieselben einfach als Erfahrungsthatsachen, die sich mit elementaren Mitteln in zutreffender Weise nicht erklären lassen, mittheilen.

15. Versuch einer Abgrenzung des Lehrstoffes aus der Geomechanik nach dem Mindestausmasse für Gymnasien in zweckmässiger Aufeinanderfolge. *A*) Der materielle Punkt. 1. Geradlinige Bewegung

im Allgemeinen. (Gleichförmige Bewegung. Beharrungsvermögen. Geschwindigkeit. — Ungleichförmige Bewegung. Kraft. Veränderliche Geschwindigkeit. Beschleunigte und verzögerte Bewegung. — Gleichmäßig veränderliche Bewegung. Constante Kraft. Beschleunigung. — Ungleichmäßig veränderliche Bewegung. Veränderliche Kraft. Veränderliche Beschleunigung.) 2. Die gleichförmige Bewegung. Mittlere Geschwindigkeit. 3. Die gleichmäßig veränderliche Bewegung. 4. Der freie Fall. Die Fallmaschine Der verticale Wurf. 5. Messen von Kräften und Massen. Gewicht. Specifische Masse. Dichte. 6. Das Bewegungsparallelogramm. 7. Das Geschwindigkeits- und Beschleunigungsparallelogramm. 8. Das Kräfteparallelogramm. $P p = Q q$. 9. Der Fall und das Gleichgewicht auf der schiefen Ebene. 10. Der horizontale und schiefe Wurf. 11. Die krummlinige Bewegung im Allgemeinen. 12. Die schwingende Bewegung und das mathematische Pendel. 13. Die Centralbewegung und das Flächengesetz. 14. Die Kepler'schen Gesetze und das Newton'sche Attractionsgesetz. Fallbeschleunigung und Mondbewegung. 15. Arbeit einer Kraft. 16. Princip der Erhaltung der Energie.

B. Der starre Körper. 1. Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften, die in einerlei Ebene an einem starren Körper angreifen. 2. Zusammensetzung und Zerlegung von parallelen und antiparallelen Kräften an einem starren Körper. 3. Kräftepaare. 4. Bedingungen der Entstehung einer fortschreitenden Bewegung. 5. Schwerpunkt. 6. Arten des Gleichgewichtes. Standfestigkeit. 7. Der Hebel. 8. Die Hebelwagen. 9. Zweck der Maschinen und Grundsatz der Erhaltung der Arbeit. 10. Die drehende Bewegung. 11. Das physische Pendel. 12. Die Fliehkraft. Freie Achsen. 13. Änderungen der Schwerebeschleunigung vom Äquator gegen den Pol. 14. Das Pendel in seiner Anwendung zum Studium der Schwerkraft und zur Bestimmung der mittleren Dichte der Erde. 15. Der Stoß. 16. Die Bewegungshindernisse.

V. Faustmann.

Schulnachrichten.

I. Stand des Lehrkörpers am Schlusse des Schuljahres und Fächervertheilung.

a) **Director:**

1. Würfl Christoph, k. k. Schulrath, Mitglied des k. k. Landesschulrathes, lehrte Geographie und Geschichte in IV. B (4), Deutsch in V. B (3), zusammen wöch. 7 Stunden.

b) **Professoren und wirkliche Lehrer:**

2. Szankowski Ambros, gr.-kath. Weltpriester, Consistorialrath, Ehrenbürger der Stadt Kolomea, k. k. Professor der VIII. Rangsclasse, Ordinarius in III. A, lehrte Lat. (6) und Griech. (5) in III. A, Griech. in VII. A (4), zus. wöch. 15 St.

3. Schmid Josef, erster Custos der Lehrerbibliothek, k. k. Professor, Ordinarius in IV. B, lehrte Lat. (6) und Griech. (4) in IV. B und Lat. in VII. B (5), zus. wöch. 15 St.

4. v. Mor Gabriel, k. k. Professor der VIII. Rangsclasse, Ordinarius in V. B, lehrte Lat. in V. A (6) und V. B (6), Griech. in VII. B (4), zus. wöch. 16 St.

5. v. Repta Stephan, k. k. Professor der VIII. Rangsclasse, Ordinarius in VII. A, lehrte Lat. in VII. A (5), Griech. in V. A (5), Deutsch in VII. A (3) und VIII. (3), zus. wöch. 16 St.

6. Mikulicz Adalbert, k. k. Professor der VIII. Rangsclasse, Ordinarius in VII. B, lehrte Deutsch in VI. B (3), VII. B (3), Geogr. u. Gesch. in VI. B (4), VII. A (3) und VII. B (3), zus. wöch. 16 St.

7. Faustmann Vincenz, k. k. Professor. Custos des physik. Cabinets, Ordinarius in VIII., lehrte Math. in V. A (4), Phys. in VII. A (3), VII. B (3), VIII. (3). Propäd. in VII. A (2), VII. B (2), VIII. (2), zus. wöch. 19 St.

8. Bumbacu Johann, k. k. Professor, lehrte die rumän. Sprache in I.–VIII. (je 2 St.), Gesch. u. Geogr. in III. A (3), zus. wöch. 19 St.

9. Wolf Karl, k. k. Professor, Ordinarius in III. B, lehrte Lat. (6) u. Griech. (5) in III. B, Griech. in VIII. (5), zus. wöch. 16 St.

10. Stefanelli Juvenal, Archimandrit, Docent an der k. k. Universität, k. k. Professor, lehrte die gr.-or. Religion in rumänischer Sprache in I.–VIII. (je 2 St.), zus. wöch. 16 St.

11. Lewandowski Alfred, k. k. Professor, lehrte Deutsch in V. A (3), VI. A (3), Geogr. und Gesch. in I. B (3), I. C (3), II. B (4), V. B (3), zus. wöch. 19 St.

12. Dr. Frank Josef, k. k. Professor, Custos des naturhistorischen Cabinets, Ordinarius in VI. B, lehrte Math. in I. C (3), II. B (3), Naturgeschichte in I. C (2), II. B (2), III. A (2), III. B (2), V. B (2) und VI. B (2), zus. wöch. 18 St.

13. Kozak Cornel, k. k. Professor, Ordinarius in V. A, lehrte Deutsch in III. B (3), IV. A (3), Geogr. u. Gesch. in II. A (4), III. B (3), V. A (3) u. VIII. (3), zus. wöch. 19 St.

14. Bujor Theodor, k. k. Professor, Ordinarius in I. B, lehrte Lat. (8) und Deutsch (4) in I. B, Lat. in VI. B (6), zus. wöch. 18 St.

15. v. Tarnowiecki Epiphanias, Custos der Schülerbibliothek. k. k. Professor, Ordinarius in VI. A, lehrte Math. in I. B (3), III. A (3), IV. B (3), VI. A (3), VIII. (2), Phys. in IV. B (3), zus. wöch. 17 St.

16. Polaschek Anton, Custos der Programmsammlung, k. k. Professor, Ordinarius in I. A, lehrte Lat. (8) und Deutsch (4) in I. A, Lat. in VI. A (6), zus. wöch. 18 St.

17. Iwanowicz Eusebius, zweiter Custos der Lehrerbibliothek, wirklicher k. k. Gymnasiallehrer, lehrte die gr.-or. Religion in ruth. Sprache in der I.—VIII. Cl. (je 2 St.), zus. wöch. 16 St.

18. Skobielski Johann, wirklicher k. k. Gymnasiallehrer, lehrte Lat. (6) und Griech. (4) in IV. A, Lat. in VIII. (5), zus. wöch. 15 St.

19. Schweiger Leopold, wirklicher k. k. Gymnasiallehrer, lehrte die röm.-kath. Religion in der I.—VIII. Cl. (je 2 St.), zus. wöch. 16 St.

20. Prelicz Victor, k. k. Professor, zur Dienstleistung zugewiesen, lehrte Deutsch in III. A (3), IV. B (3), Geogr. und Gesch. in I. A (3), IV. A (4), VI. A (4), zus. wöch. 17 St.

c) Supplenten (Hilfslehrer):

21. Mayer Otto, Ordinarius in IV. A, lehrte Math. in I. A (3), II. A (3), IV. A (3), Naturgesch. in I. A (2), I. B (2), II. A (2), V. A (2), VI. A (2), zus. wöch. 19 St.

22. Mock Andreas, Ordinarius in II. A, lehrte Lat. (8) und Deutsch (4) in II. A, Griech. in VI. A (5), zus. wöch. 17 St.

23. Nussbaum Victor, Ordinarius in I. C, lehrte Lat. (8) und Deutsch in I. C (4), Griech. in V. B (5), zus. wöch. 17 St.

24. Kobylański Julian, Ordinarius in II. B, lehrte Lat. (8) und Deutsch (4) in II. B, Griech. in VI. B (5), zus. wöch. 17 St.

25. Mader David, lehrte Math. in V. B (4), VI. B (3), VII. A (3), VII. B (3), Phys. in IV. A (3), zus. 16 St. und seit 1. Mai die mosaische Religion in I.—VIII. in 9 Abtheilungen (je 1 St.), zus. 9 St. wöch.

26. Porajko Johann, gr.-kath. Pfarrcooperator, lehrte die gr.-kath. Religion in I.—VIII. Cl. (je 2 St.), zus. wöch. 16 St.

27. Szpoynarowski Sergius, lehrte die ruth. Sprache in I.—VIII. (je 2 St.), zus. wöch. 16 St.

28. Gwiazdomorski Ladislaus, (s. unten Nr. 37), lehrte Math. in III. B (3).

29. Fronius Josef, evang. Pfarrer, Mitglied des k. k. Landesschulrathes, lehrte die evang. Religion in 3 Abth., zus. wöch. 4 St.

d) Nebenlehrer:

30. Skobielski Johann (s. oben Nr. 18) lehrte die poln. Sprache in 2 Abth. (je 2 St.), zus. wöch. 4 St.

31. Romanovsky Anton, Professor an der gr.-or. Oberrealschule, lehrte die franz. Sprache in 1 Abth. in 3 St. wöch.

32. v. Mor Gabriel (s. oben Nr. 4) lehrte die Stenographie in 2 Abth., zus. wöch. 3 Stunden.

33. Pihuliak Justin, Professor an der gr.-or. Oberrealschule, lehrte das Freihandzeichnen in 2 Abth. (je 2 St.), zus. wöch. 4 St.

34. Worobkiewicz Isidor, k. k. Professor des Gesangs an der theologischen Facultät, lehrte den Gesang bei den gr.-or. Schülern in 2 Abth., zus. wöch. 3 St.

35. Żukowski Otto, Aushilfslehrer an der Übungsschule der hierortigen k. k. Lehrerbildungsanstalt, lehrte den Gesang bei den kath. und mos. Schülern in 2 Abth., zus. wöch. 3 St.

36. v. Tarnowiecki Epiphanias (s. oben Nr. 15) lehrte Kalligraphie in der I. Cl., wöch. 3 St.

37. Gwiazdomorski Ladislaus, Turnlehrer an der gr.-or. Oberrealschule, ertheilte im I. Sem. den Turnunterricht in I.—VIII. in 18 St., im II. Sem. in I.—III. in 12 St. wöch.

38. Grillitsch Franz, Turnlehrer an der k. k. Lehrer- und Lehrerinnen-Bildungsanstalt, ertheilte im II. Sem. den Turnunterricht in IV.—VIII. in 8 St. wöch.

c) **Probecandidat:**

39. Dr. Kaindl Raimund Friedrich, lehrbefähigt für Geographie und Geschichte am Obergymnasium, der fachmännischen Leitung des Berichterstatters zugewiesen, betheiligte sich am Unterrichte in der Geogr. und Gesch. in der III. B, IV. B und V. B Classe.

II. Lehr- und Lectionsplan

(für die obligaten Lehrgegenstände auf Grund der hohen Ministerial-Verordnungen vom 26. Mai 1884, Z. 10128, 2. Mai 1887, Z. 8752, 14. Jänner 1890, Z. 370, 30. September 1891, Z. 1786 C. U. M).

I. Classe.

Religionslehre (2 St.): *a*) Für die röm.-kath. und *b*) für die gr.-kath. Schüler: Die Glaubens- und Sittenlehre. *c*) Für die gr.-or. Schüler: Biblische Geschichte.

Latein (8 St.): Regelmäßige Formenlehre, einige wichtige Präpositionen und Conjunctionen. Allwöchentlich eine halbstündige Schularbeit und später auch kleinere Hausarbeiten.

Deutsch (4 St.): Formenlehre in der durch den lateinischen Unterricht erforderlichen Aufeinanderfolge, Syntax des einfachen Satzes, Elemente des zusammengezogenen und zusammengesetzten Satzes. Lectüre mit sachlichen und sprachlichen Erklärungen. Memorieren und Vortragen poetischer und prosaischer Stücke. Übungen in der Orthographie, im 2. Semester jede zweite Woche; Aufsätze monatlich zwei, abwechselnd Schul- und Hausarbeiten.

Rumänisch (2 St.): Lautlehre, Declination der Substantiva und die regelmäßige Conjugation. Orthographische Übungen. Lectüre mit sachlicher und sprachlicher Erklärung. Übersetzung. Memorieren, Nacherzählen.

Ruthenisch (2 St.): Lautlehre, Orthographie, Declination der Substantiva. Lectüre mit sachlichen und sprachlichen Erklärungen. Orthographische Übungen.

Geographie (3 St.): Vorbegriffe aus der allgemeinen Geographie. Übersicht über die Hauptformen des Festen und Flüssigen in ihrer Vertheilung auf der Erde. Lage der bedeutendsten Staaten und Städte, in steter Übung im Kartenlesen und im Entwerfen einfacher Kartenbilder. Elemente der mathematischen Geographie.

Mathematik (3 St.): 1. Arithmetik: Das dekadische Zahlensystem. Die vier Rechnungsarten mit unbenannten und einnamigen Zahlen. Maß und Gewicht. Theilbarkeit der Zahlen. Größtes Maß und kleinstes Vielfaches. Die gemeinen Brüche. Die Decimalbrüche. Das Rechnen mit mehrnamigen Zahlen. 2. Geometr. Anschauungslehre: Gerade, Kreis, Winkel, Parallele, Dreieck, Constructionsaufgaben.

Naturgeschichte (2 St.): Thierreich. Säugethiere und wirbellose Thiere.

II. Classe.

Religionslehre (2 St.): *a)* Für die röm.-kath. und *b)* für die gr.-kath. Schüler: Biblische Geschichte des alten Bundes. *c)* Für die gr.-or. Schüler: Das Leben und Wirken Jesu Christi.

Latein (8 St.): Ergänzung der regelmäßigen Formenlehre, Pronomina und Numeralia, die wichtigsten Unregelmäßigkeiten in Declination, Genus und Conjugation; Acc. cum. inf. und Abl. abs. Monatlich drei Compositionen mit halb- bis dreiviertelstündiger Arbeitszeit und ein Pensum.

Deutsch (4 St.): Der zusammengezogene und zusammengesetzte Satz. Praktische Übungen in der Interpunction. Lectüre nach dem Lesebuche mit sachlichen und sprachlichen Erklärungen. Memorieren und Vortragen poetischer und prosaischer Stücke. Dictate zu orthographischen Zwecken. Monatlich drei schriftliche Arbeiten, abwechselnd Schul- und Hausaufgaben.

Rumänisch (2 St.): Adjectiva, Numeralia und Pronomina. Einübung der neuen Orthographie. Lectüre mit sachlicher und sprachlicher Erklärung. Memorieren und Vortrag poetischer und prosaischer Stücke. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit.

Ruthenisch (2 St.): Adjectiva, Numeralia, Pronomina und Conjugation. Lectüre mit sachlichen und sprachlichen Erklärungen. Alle drei Wochen eine schriftliche Arbeit.

Geographie und Geschichte (4 St.): *a)* Geographie: Fortführung der mathematischen Geographie. Specielle Geographie Asiens und Afrikas. Horizontale und verticale Gliederung von Europa. Specielle Geographie von Süd- und Westeuropa. *b)* Geschichte: Übersichtliche Darstellung der Geschichte des Alterthums.

Mathematik (3 St.): 1. Arithmetik: Wiederholung der Lehre von den gemeinen Brüchen. Abgekürzte Multiplication und Division. Verhältnisse und Proportionen mit ihren Anwendungen. Einfache Regeldetri und Procentrechnung. 2. Geometr. Anschauungslehre: Congruenz der Dreiecke und Anwendungen. Kreislehre. Vierecke und Vielecke.

Naturgeschichte (2 St.): 1. Semester: Thierreich. Vögel, Reptilien, Amphibien, Fische. 2. Semester: Pflanzenreich.

III. Classe.

Religionslehre (2 St.): *a)* Für die röm.-kath. und *b)* für die gr.-kath. Schüler: Biblische Geschichte des neuen Bundes. *c)* Für die gr.-or. Schüler: Liturgik.

Latein (6 St.): Lehre von der Congruenz, die Casuslehre, Präpositionen. Lectüre: Cornelius Nepos: Miltiades, Themistocles, Aristides, Cimon, Epaminondas, Pelopidas. Alle 14 Tage eine Composition, alle drei Wochen ein Pensum.

Griechisch (5 St.): Die Formenlehre bis zu den Verben auf μι. Von der 2. Hälfte des 1. Semesters angefangen alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit, abwechselnd Compositionen und Pensa.

Deutsch (3 St.): Systematischer Unterricht in der Formen- und Casuslehre. Lectüre mit sprachlichen und sachlichen Erklärungen. Memorieren und Vortragen. Im Monate zwei Aufsätze, abwechselnd Schul- und Hausarbeiten.

Rumänisch (2 St.): Das abgekürzte Pronomen, die unregelmäßigen Verba. Lectüre mit sachlicher und sprachlicher Erklärung. Memorieren und Vortragen poetischer Stücke, Übersetzungen. Alle zwei Wochen eine schriftliche Arbeit.

Ruthenisch (2 St.): Ergänzung der Flexion des Verbums, Congruenzlehre. Lectüre mit sachlichen und sprachlichen Erklärungen. Alle drei Wochen eine schriftliche Arbeit.

Geographie und Geschichte (3 St.): *a)* Geographie: Übersichtliche Darstellung der mathematischen Geographie im Zusammenhange. Vergleichende specielle Geographie von Mittel-, Nord- und Osteuropa, mit Ausschluss der österreichisch-ungarischen Monarchie. Specielle Geographie Amerikas und Australiens. *b)* Geschichte: Gedrängte Übersicht der Geschichte des Mittelalters mit Hervorhebung der Hauptereignisse aus der Geschichte Österreich-Ungarns.

Mathematik (3 St.): 1. Arithmetik: Das Rechnen mit unvollständigen Zahlen. Die vier Grundrechnungsarten mit allgemeinen Zahlen. Quadrieren, Cubieren, Quadrat- und Cubikwurzel. 2. Geom. Anschauungslehre: Flächeninhalt, Verwandlung und Theilung ebener Figuren. Pythagoräischer Lehrsatz und Anwendungen. Ähnlichkeit geradliniger Figuren, Ellipse, Hyperbel und Parabel.

Naturwissenschaften (2 St.): 1. Semester: Mineralreich. 2. Semester: Physik. Allg. Eigenschaften der Körper. Wärmelehre. Chemische Grundbegriffe.

IV. Classe.

Religionslehre (2 St.): *a)* Für die röm.-kath. und *b)* für die gr.-kath. Schüler: Die Erklärung der Ceremonien. *c)* Für die gr.-or. Schüler: Der Katechismus.

Latein (6 St.): Grammatik (2 St.): Eigenthümlichkeiten im Gebrauch der Nomina und Pronomina, Tempus- und Moduslehre, das Wichtigste von der Prosodie und Metrik. Lectüre (4 St.): Caesar b. g. I., IV., VI. Ovid (Auswahl). Privatlectüre: Caesar b. g. II., III., V. Alle 14 Tage eine Composition, alle drei Wochen ein Pensum.

Griechisch (4 St.): Die Verba auf μι, die Verba mit verstärktem Präsensstamme; das Wichtigste aus der Syntax. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit, abwechselnd Compositionen und Pensa.

Deutsch (3 St.): Syntax des zusammengesetzten Satzes. Periodenlehre. Lectüre mit sprachlichen und sachlichen Erklärungen. Grundzüge der Prosodie und Metrik. Tropen und Figuren. Memorieren und Vortragen. Im Monate zwei Aufsätze, abwechselnd Haus- und Schularbeiten.

Rumänisch (2 St.): Wiederholung der ganzen Formenlehre, die Metrik, Lectüre mit sachlicher und sprachlicher Erklärung. Vortrag poetischer Stücke. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit.

Ruthenisch (2 St.): Wiederholung und Ergänzung der Formenlehre, Casuslehre, Prosodie. Lectüre mit sachlichen und sprachlichen Erklärungen. Alle drei Wochen eine schriftliche Arbeit.

Geographie und Geschichte (4 St.): 1. Semester: Übersichtliche Darstellung der Geschichte der Neuzeit mit Hervorhebung der für den habsburgischen Gesammtstaat wichtigsten Personen und Begebenheiten. 2. Semester: Specielle Geographie der österreichisch-ungarischen Monarchie nach den Hauptpunkten ihres gegenwärtigen Zustandes unter Hervorhebung des engeren Heimatlandes.

Mathematik (3 St.): Arithmetik: Gleichungen des 1. Grades mit einer und mehreren Unbekannten, zusammengesetzte Regeldetri, Gesellschafts- und Zinseszinsenrechnung. 2. Stereometrische Anschauungslehre, Hauptarten der Körper, Oberflächen- und Volumensberechnung.

Physik (3 St.): Mechanik, Magnetismus, Elektricität, Wellenlehre, Akustik und Optik.

V. Classe.

Religionslehre (2 St.): *a)* Für die röm.-kath. Schüler und *b)* für die gr.-kath. Schüler: Einleitung in die Schriften des alten und des neuen Bundes und die allg. Dogmatik. c) Für die gr.-or. Schüler: Derselbe Lehrstoff.

Latein (6 St.): Lectüre: Livius I., XXI. Ovid. Auswahl aus den Metam., Fast. und Trist. Grammatisch-stilistische Übungen. Im Semester 5 Schularbeiten, darunter eine Übersetzung aus dem Lateinischen ins Deutsche.

Griechisch (5 St.): Lectüre: Xenophon-Chrestomathie (Auswahl). Hom. Il. I. und VI. Privatlectüre. Syntax: Die Lehre vom Numerus, Genus, Artikel, von den Casus und Präpositionen. Im Semester 4 Schularbeiten, darunter eine Übersetzung aus dem Griechischen ins Deutsche.

Deutsch (3 St.): Grammatik: Wortbildung, Lehnwörter, Fremdwörter, Volksetymologie. Lectüre mit besonderer Rücksicht auf die Charakteristik der epischen, lyrischen und rein didaktischen Dichtungsgattungen. Ausgewählte Partien aus Wielands Oberon und Klopstocks Messias. Memorieren und Vortragen. Im Monate zwei Aufsätze, abwechselnd Haus- und Schularbeiten.

Rumänisch (2 St.): Grundzüge der Metrik und Poetik, Lectüre mit den erforderlichen Erläuterungen der entsprechenden Perioden der Literaturgeschichte. Alle 4 Wochen eine schriftliche Arbeit.

Ruthenisch (2 St.): Lectüre altruth. Texte. Altruth. Declination und Conjugation. Literaturgeschichte des 10., 11. u. 12. Jahrh. Alle 4 Wochen eine schriftliche Arbeit.

Geographie und Geschichte (3 St.): Geschichte des Alterthums, vornehmlich der Griechen und Römer bis zu den punischen Kriegen mit besonderer Hervorhebung der culturhistorischen Momente und mit fortwährender Berücksichtigung der Geographie.

Mathematik (4 St.): 1. Arithmetik: Die vier Grundoperationen, Brüche, Verhältnisse und Proportionen und deren Anwendung, Gleichungen des ersten Grades. 2. Geometrie: Planimetrie.

Naturgeschichte (2 St.): 1. Semester: Mineralogie und die wichtigsten Lehren aus der Geologie. 2. Semester: Botanik.

VI. Classe.

Religionslehre (2 St.): *a)* Für die röm.-kath. und *b)* für die gr.-kath. Schüler: Specielle Dogmatik. *c)* Für die gr.-or. Schüler: Derselbe Lehrstoff.

Latein (6 St.): Lectüre: Sall. Jugurtha, Cic. or. in Cat. I., Verg. Aen. I., II. Ecl. I. und V. Caes. bell. civ. (Auswahl). Privatlectüre: Caes. b. g. VII., Cic. in Cat. II.—IV. Wiederholung der Syntax. Stilistische Übungen. Schularbeiten wie in der V. Classe.

Griechisch (5 St.): Lectüre: Hom. Il. VI., XII., XVI., XVIII., XXII., Herodots Perserkriege VII. Xenoph. Memorab. (Auswahl). Privatlectüre. Grammatik: Die Präpositionen, die Tempus- und Moduslehre. Schularbeiten wie in der V. Classe.

Deutsch (3 St.): Genealogie der germanischen Sprachen. Übersicht der deutschen Literaturgeschichte von den ältesten Zeiten bis zu den Stürmern und Drängern mit näherem Eingehen dort, wo Lectüre sich anschließt. Auswahl aus dem Nibelungenliede und aus Walther von der Vogelweide; Klopstock, Lessing. Lectüre der „Minna von Barnhelm". Privatlectüre. Aufsätze von 3 zu 3 Wochen, abwechselnd eine Schul- und eine Hausarbeit.

Rumänisch (2 St.): Die Literaturgeschichte des 16. und 17. Jahrhunderts mit der entsprechenden Lectüre. Alle 4 Wochen eine schriftliche Arbeit.

Ruthenisch (2 St.): Lectüre altruth. Texte. Literaturgeschichte des 12.—18. Jahrh. Alle 4 Wochen eine schriftliche Arbeit.

Geographie und Geschichte (4 St.): Schluss der Geschichte des Alterthums. Geschichte des Mittelalters. Stete Berücksichtigung der Culturgeschichte und Geographie.

Mathematik (3 St.): 1. Arithmetik: Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten. 2. Geometrie: Stereometrie. Ebene Trigonometrie.

Naturgeschichte (2 St.): Zoologie.

VII. Classe.

Religionslehre (2 St.): *a)* Für die röm.-kath. und *b)* für die gr.-kath. Schüler: Die katholische Sittenlehre. *c)* Für die gr.-or. Schüler: Derselbe Lehrstoff.

Latein (5 St.): Lectüre: Cic. or. de imperio Cn. Pompei. pro Archia; Laelius. Verg. Aen. VI., VII. und IX. Privatlectüre. Stilübungen. Schularbeiten wie in der V. Cl.

Griechisch (4 St.): Demosth. Phil. I., II. Hom. Odyssee V.—VIII. Privatlectüre. Wiederholung und Ergänzung der Syntax. Schularbeiten wie in der V. Classe.

Deutsch (3 St.): Geschichte der deutschen Literatur seit der Epoche des Sturmes und Dranges bis zu Schillers Tode. Lectüre: Herder, Goethe, Schiller. Lectüre und Erklärung von Goethes Iphigenie (in Abth. A u. B), Schillers Maria Stuart, Wilhelm Tell (Abth. A) und Wallenstein (Abth. B). Redeübungen. Memorieren. Aufsätze wie in der VI. Cl.

Rumänisch (2 St.): Literaturgeschichte des 17. und 18. Jahrhunderts mit entsprechender Lectüre. Alle 4 Wochen eine schriftliche Arbeit.

Ruthenisch (2 St.): Literaturgeschichte des 19. Jahrhunderts. Lectüre mit ästhetisch-kritischen Erläuterungen. Alle 4 Wochen eine schriftliche Arbeit.

Geographie und Geschichte (3 St.): Geschichte der Neuzeit mit besonderer Hervorhebung der durch die religiösen, politischen und wirtschaftlichen Umwälzungen hervorgerufenen Veränderungen im Bildungsgange der Culturvölker und mit fortwährender Berücksichtigung der Geographie.

Mathematik (3 St.): 1. Arithmetik: Gleichungen zweiten Grades mit mehreren Unbekannten. Einige höhere Gleichungen. Progressionen. Zinseszinsen- und Rentenrechnung. Kettenbrüche. Diophantische Gleichungen. Binomischer Satz. 2. Geometrie: Anwendung der Trigonometrie. Analytische Geometrie.

Physik (3 St.): Einleitung, Mechanik, Wärmelehre, Chemie.

Philosophische Propädeutik (2 St.): Logik.

VIII. Classe.

Religionslehre (2 St.): *a)* Für die röm.-kath. und *b)* für die gr.-kath. Schüler: Kirchengeschichte. *c)* Für die gr.-or. Schüler: Derselbe Lehrstoff.

Latein (5 St.): Lectüre: Horaz, Auswahl aus den Oden, Epod., Sat., Epist. Tacit. Germ. c. 1—27; Annal. (in Auswahl). Privatlectüre. Grammatisch-stilistische Übungen. Schularbeiten wie in der V. Classe.

Griechisch (5 St.): Plato: Apologie, Kriton, Euthyphron. Sophokles: Aias. Hom. Od. XIII., XIV. Privatlectüre: Elektra, Hom. Od. XV., XVI. Demosth. Olynth. III. Schularbeiten wie in der V. Classe.

Deutsch (3 St.): Lectüre: Goethe, Schiller. Lessings Laokoon und Auswahl aus der hamburgischen Dramaturgie. Literaturgeschichte bis zu Goethes Tod. Überblick über die Entwicklung der deutschen Literatur in Österreich im XIX. Jahrhundert mit besonderer Berücksichtigung Grillparzers. Redeübungen. Aufsätze wie in der VI. Classe.

Rumänisch (2 St.): Literaturgeschichte des 19. Jahrhunderts mit entsprechender Lectüre. Alle 4 Wochen eine schriftliche Arbeit.

Ruthenisch (2 St.): Literaturgeschichte des 19. Jahrhunderts (Fortsetzung) mit entsprechender Lectüre. Alle 4 Wochen eine schriftliche Arbeit.

Geographie und Geschichte (3 St.): 1. Sem.: Geschichte der österreichisch-ungarischen Monarchie in ihrer weltgeschichtlichen Stellung: übersichtliche Darstellung der bedeutendsten Thatsachen aus der innern Entwickelung des Kaiserstaates. 2. Sem. (2 St.): Österreichische Vaterlandskunde. (1 St.) Recapitulation der wichtigeren Partien der griechischen und römischen Geschichte.

Mathematik (2 St.): Wiederholung der Elementarmathematik mit zahlreichen einschlägigen Aufgaben.

Physik (3 St.): Magnetismus und Elektricität. Wellenlehre, Akustik, Optik und Astronomie.

Philosophische Propädeutik (2 St.): Empirische Psychologie.

Evangelische Religion.

Der evangelische Religionsunterricht wurde den Schülern des Gymnasiums gemeinsam mit den Schülern der griech.-orient. Oberrealschule und der k. k. Lehrerbildungsanstalt in 3 Abtheilungen mit zusammen 4 Stunden wöchentlich ertheilt.

I. Abtheilung (2 St.): Biblische Geschichten des alten und neuen Testamentes. nach Wangemann.

II. Abtheilung (1 St.): Kirchengeschichte bis zur Reformation nach Heinrich Palmer.

III. Abtheilung (1 St.): Christliche Glaubenslehre, II.–IV. Theil, nach Heinrich Palmer.

Mosaische Religion.

Der mos. Religionsunterricht wurde in 8 Classenabtheilungen zu je 1 Stunde wöchentlich ertheilt, u. zw.:

I. Classe: Urgeschichte der Menschheit, die Patriarchen, Moses bis Josua. Hebräisch: Gewählte Gebetstücke.

II. Classe: Von Josua bis zur Theilung des Reiches. Fortsetzung der Gebete.

III. Classe: Von der Theilung des Reiches bis zur Geschichte Judäas unter Alexander dem Großen. Erstes Buch Moses (gewählte Capitel).

IV. Classe: Die nachbiblische Geschichte bis incl. Moses Mendelssohn. Zweites Buch Moses.

In den vier unteren Classen wurde das Buch: Geschichte Israels von Dr. G. Wolf gebraucht.

V. Classe: Glaubensartikel, Gottesverehrung, Ritualgesetze nach der Glaubens- und Pflichtenlehre von L. Breuer. Ausgewählte Capitel aus dem III. u. IV. Buche Moses.

VI. Classe: Sittenlehre, nach L. Breuer. Das V. Buch Moses.

VII. Classe: Ausführliche Sittenlehre nach der israel. Religionslehre von Dr. L. Philippson. Gewählte Capitel aus den Propheten.

VIII. Classe: Ausführliche Erkenntnislehre von Dr. L. Philippson. Gewählte Capitel aus den Hagiographen.

Unterrichtssprache.

Die Unterrichtssprache ist die deutsche. Bei dem gr.-or. Religionsunterrichte und den gr.-or. Exhorten ist für die rum. Schüler die rum., für die ruth. Schüler aber und ebenso für die gr.-kath. Schüler die ruth. Sprache die Unterrichtssprache. Der relativ obligate rum. und ruth. Sprachunterricht wird gleichfalls in rum., beziehungsweise ruth. Sprache ertheilt.

III. Übersicht
über die im Schuljahre 1891/92 gebrauchten Lehrbücher.

Religionslehre: *A*) Für die röm.-kath. Schüler. I. Classe: Schuster, Katholische Glaubens- und Sittenlehre. II. Classe: Geschichte des alten Bundes nach Schumacher. III. Classe: Biblische Geschichte des neuen Bundes nach Schumacher. IV. Classe: Frenzel, Liturgik. V. Classe: Martin, Allgemeine Dogmatik. VI. Classe: Martin, Specielle Dogmatik. VII. Classe: Martin, Morallehre. VIII. Classe: Robitsch, Kirchengeschichte. — *B*) Für die gr.-or. Schüler. *a*) Rum. Abth. I. Classe: C. Coca, Biblische Geschichte des alten Bundes. II. Classe: C. Coca, Biblische Geschichte des neuen Bundes. III. Classe: J. Stefanelli, Liturgik. IV. Classe: C. Andrievici, Glaubens- und Sittenlehre. V. Classe: S. Andrievici, Allgemeine Dogmatik. VI. Classe: S. Andrievici, Spec. Dogmatik. VII. Classe: S. Andrievici, Morallehre. VIII. Classe: Kirchengeschichte, in Ermanglung eines geeigneten Lehrbuches nach Vorträgen. *b*) Ruth. Abth. I. Classe: Schuster, Biblische Geschichte des alten Bundes (ruth. Übersetzung). II. Classe: Schuster, Biblische Geschichte des neuen Bundes. III. Classe: Liturgik nach eigenen Schriften. IV. Classe: Glaubens- und Sittenlehre, im allgemeinen nach Guszalewicz. V. Classe: Fedorowicz, Allgemeine Dogmatik. VI. Classe: Andrijczuk, Spec. Dogmatik. VII. Classe: Fedorowicz, Morallehre. VIII. Classe: Kirchengeschichte nach eigenen Schriften. *C*) Für die gr.-kath. Schüler. I. Classe: Toroński, Christlich-katholischer Katechismus. II. Classe: Biblische Geschichte des alten Bundes nach Schuster, in ruth. Übersetzung. III. Classe: Biblische Geschichte des neuen Bundes nach Schuster, in ruth. Übersetzung. IV. Classe: Toroński, Liturgik. V. Classe: Wappler-Pelesz, Allgemeine Dogmatik. VI. Classe: Wappler-Pelesz, Specielle Dogmatik. VII. Classe: Wappler-Piurko, Morallehre. VIII. Classe: Kirchengeschichte von Wappler-Stefanowicz.

Lateinische Sprache: I. Classe: August Scheindler, Lateinische Grammatik; J. Steiner und A. Scheindler, Lateinisches Lese- und Übungsbuch für die I. Classe. —

II. Classe: Grammatik wie in der I. Classe; Steiner und Scheindler, Lateinisches Lese- und Übungsbuch für die II. Classe. — III. Classe: Schultz, Grammatik, 20. Aufl.; Rożek, Übungsbuch, I. Theil; Cornelius Nepos von Weidner-Schmidt. — IV. Classe: Schultz, Grammatik, 20. Aufl.; Rożek, Übungsbuch II. Theil; Caesar, Comm. de bell. gall. ed. Prammer; Ovidii carmina selecta, Grysar-Ziwsa. — V. Classe: Schultz, Grammatik; Hauler, Lat. Stilübungen I. Theil: Livius ed. Zingerle, Ovidii carmina selecta. wie in d. IV. Cl. — VI. Classe: Schultz, Grammatik; Hauler, Lat. Stilübungen I. Theil; Vergili Aen. ed. Hoffmann; Sallust, Jugurtha ed. Scheindler; Ciceronis in L. Catilinam orationes IV. ed. Nohl. — VII. Classe: Schultz, Grammatik; Hauler, Lat. Stilübungen II. Theil; Verg. ed. Hoffmann; Cic. or. ed. Nohl. — VIII. Classe: Schultz, Grammatik; Hauler, Lat. Stilübungen II. Theil; Horatius ed. Keller et Häusner; Tacitus ed. Müller.

Griechische Sprache: III. und IV. Classe: Curtius-Hartel, Griech. Grammatik. 19. Auflage; Schenkl, Griech. Elementarbuch, 14. Auflage. — V. Classe: Curtius-Hartel, Griech. Grammatik; Schenkl, Griech. Elementarbuch; Schenkl, Chrestomathie aus Xenophon; Hom. Ilias von Christ. — VI. Classe: Curtius, Grammatik; Schenkl, Griech. Elementarbuch; Homer, Ilias ed. Christ; Herodot ed. Hintner; Xenophon wie in der V. Cl. — VII. Classe: Curtius, Grammatik; Schenkl, Griech. Übungsbuch; Homer, Odyssee ed. Pauly-Wotke; Demosth. or. ed. Wotke. — VIII. Classe: Curtius, Grammatik; Schenkl, Griech. Übungsbuch; Plato, Apologie, Kriton und Eutyphron, von Christ; Soph., Aiax von Schubert.

Deutsche Sprache: I. Classe: Willomitzer, Deutsche Grammatik, 5. Aufl.; Kummer und Stejskal, Lesebuch I. Bd. f. U. G., 3. Aufl. — II. Classe: Willomitzer, Deutsche Grammatik, 5. Aufl.; Lesebuch von Kummer und Stejskal II. Bd., 3. Aufl. — III. Classe: Gramm. wie in II. Cl. (4. Aufl.); Lesebuch von Kummer und Stejskal III. Bd., 2. Aufl. — IV. Classe: Gramm. wie in III. Cl.; Lesebuch von Kummer und Stejskal IV. Bd., 2. Aufl. — V. Classe: Kummer und Stejskal, Lesebuch V. Bd., 5. Aufl. — VI. Classe: Kummer und Stejskal, Lesebuch VI. Bd., 3. Aufl. — VII. Classe: Kummer und Stejskal, Lesebuch VII. Bd., 2. Aufl. — VIII. Classe: Kummer und Stejskal, Lesebuch VIII. Bd., 2. Aufl.

Rumänische Sprache: I. und II. Classe: Pumnul-Isopescul, Rum. Grammatik; Pumnul, Rum. Lesebuch I. Th. — III. Classe: Grammatik wie in I.: Pumnul, Rum. Lesebuch II. 1. — IV. Classe: Grammatik wie in I.; Pumnul, Rum. Lesebuch II. 2. — V. und VI. Classe: Grammatik wie in I.; Pumnul, Rum. Lesebuch III. Th. — VII. Classe: Pumnul, Rum. Lesebuch IV. 1. — VIII. Classe: Pumnul, Rum. Lesebuch IV. 2.

Ruthenische Sprache: I.—IV. Classe: Ogonowski, Ruth. Grammatik; I. und II. Classe: Ruth. Lesebuch von Romanczuk, 1. Th.; III. und IV. Classe: Ruth. Lesebuch für U. G. von Partycki, II. Th. — V. und VI. Classe: Altruth. Chrestomathie von Ogonowski. — VII. und VIII. Classe: Lesebuch von A. Barwiński, II. und III. Theil.

Geographie und Geschichte: Umlauft, Lehrbuch der Geographie, I. Cursus, 3. Aufl.; Trampler, Atlas, 3. Aufl. — II. Classe: Umlauft, Geographie, II. Cursus, 3. Aufl.; Loserth, Alterthum für U. G., 3. Aufl.; Hannak und Umlauft, Hist. Atlas, Alterth. 3. Aufl. — III. Classe: Umlauft, wie in der II. Cl.; Loserth, Mittelalter für U. G., 2. Aufl.; Hannak und Umlauft, Histor. Atlas, Mittelalter und Neuzeit. — IV. Classe: Loserth, III. Th., Neuzeit für U. G., 2. Aufl.; Atlas wie in III. Cl.; Hannak, Vaterlandskunde, 9. Aufl.; Trampler, Atlas. — V. Classe: Loserth, Alterthum für

O. G., 5. Aufl.; Jausz, Histor. Schulatlas, 1. Abth. — VI. Classe: Loserth, Mittelalter für O. G., 2. Aufl.; Atlas wie in V. Cl., 2. Abth. — VII. Classe: Loserth, Neuzeit für O. G., 2. Aufl.; Atlas wie in V. Cl., 3. Abth. — VIII. Classe: Hannak, Vaterlandskunde (obere Stufe), 9. Aufl.; Trampler, Atlas.

Mathematik: I. Classe: Schram und Schüßler, Vorschule der Mathematik; Schram und Schüßler, Übungsstoff zur Vorschule. 1. Heft. — II. Classe: Močnik, Lehrbuch der Arithmetik für Untergymnasien, I. Th. 30. Aufl.; Močnik, Geom. Anschauungslehre, I. Abth., 21. Aufl. — III. Classe: Močnik, Arithmetik II. Th., 23. Aufl.; Močnik, Geom. Anschauungslehre II. Th., 17. Aufl. — IV. Classe: Močnik, wie in d. III. Cl. — V. Classe: Wallentin, Lehrbuch der Arithmetik für die oberen Classen, 2. Aufl.: Aufgabensammlung von demselben Verf.; Močnik, Geometrie für die oberen Classen, 20. Aufl. — VI.—VIII. Classe: Močnik, Arithmetik und Algebra für die oberen Classen, 22. Aufl.; Heis, Sammlung von Beispielen und Aufgaben, 78. Aufl.; Močnik, Geometrie für die oberen Classen der Mittelschulen, 20. Aufl.

Naturgeschichte und Physik: I. Classe: Pokorny, Thierreich, 21. Aufl. — II. Classe: Pokorny, Thierreich, 21. Aufl.; Pokorny, Botanik, 17. Aufl. — III. Classe: Pokorny, Mineralogie, 15. Aufl.; Mach und Odstrčil, Grundriss der Naturlehre für die unteren Classen. — IV. Classe: Mach und Odstrčil, wie in III. — V. Classe: Hochstetter-Bisching, Mineralogie, 9. Aufl.; Wettstein, Leitfaden der Botanik für die oberen Classen. — VI. Classe: Woldřich, Zoologie, 6. Aufl. — VII. und VIII. Classe: Wallentin, Physik für die oberen Classen der Mittelschulen, 7. Aufl.

Philosophische Propädeutik: VII. Classe: Drbal, Logik, 4. Aufl. — VIII. Classe: Lindner, Psychologie, 9. Aufl.

IV. Themen

zu den schriftlichen Aufsätzen in den oberen Classen.

a) In deutscher Sprache:

V. Classe, Abth. A: 1. Meine Ferien. — 2. Gang der Handlung in Schillers Ballade „Die Kraniche des Ibykus“. (Sch. A.) — 3. Welche Gaben empfangen wir aus dem Schoße der Erde? — 4. Gedankengang in Schillers „Klage der Ceres“. (Sch. A.) — 5. Pflug und Schwert. — 6. Der Königshof zu Worms. (Sch. A.) — 7. Gudrun. Inhaltsangabe. (Sch. A.) — 8. Die Freuden des Winters. — 9. Wohlthätig ist des Feuers Macht. (Sch. A.) — 10. Welche Bedeutung haben die Flüsse für die menschliche Cultur? (Sch. A.) — 11. Der Frühling. — 12. Mit welchem Rechte nennt man unser Jahrhundert das eiserne? (Sch. A.) — 13. Eintracht macht stark. — 14. Über den Wert der Zeit. (Sch. A.) — 15. Wie die Saat, so die Ernte. — 16. Die Fortschritte des 19. Jahrhundertes. (Sch. A.)

V. Classe, Abth. B: 1. Welche Erscheinungen in der Natur künden die Ankunft des Herbstes an? (Sch. A.) — 2. Welchen Einblick in das Leben der alten Griechen erhalten wir durch das Schiller'sche Gedicht: „Die Kraniche des Ibykus“? — 3. Wie sind die Worte Kassandras: „Nur der Irrthum ist das Leben, Und das Wissen ist der Tod“, zu verstehen? (Sch. A.) — 4. Wie fülle ich meine Muße-

stunden am besten aus? — 5. Elternliebe ist das reichste Weihnachtsgeschenk des Kindes. (Sch. A.) — 6. Mit welchen Tugenden erscheinen die Helden des deutschen Volksepos besonders geschmückt? — 7. Ein Nachmittag auf dem Eisplatze. (Sch. A.) — 8. Ein Wochentag *a)* im Bauernhause, *b)* im Bürgerhause. — 9. Ein Sonntag *a)* auf dem Lande, *b)* in der Stadt. (Sch. A.) — 10. Auf welche Weise hat sich Hüon das Lob verdient, das in den Worten Karls des Großen liegt: „Nie fehl' es unserm Reiche an einem Fürstensohn, der Dir an Tugend gleiche!" Oberon. — 11. Lass uns die Götter bitten um ein einfach Herz, Gar leicht erträgt sich dann ein einfach Los (Grillparzer, Medea). [Sch. A.] — 12. Die Jugend ist die Maienzeit des Lebens. — 13. Helfen ja, so weit die Kraft, die Mittel reichen, ist des Mannes schönste Pflicht (Sophokles, König Ödipus). [Sch. A.] — 14. Rundblick von der Habsburgshöhe. — 15. Welche Gestalt *a)* der griechischen, *b)* der römischen Geschichte erfüllt mich besonders mit Bewunderung? (Sch. A.) — 16. Ein Gang durchs Feld in der ersten Sommerszeit.

VI. Classe, Abth. A: 1. Der Mensch als Beherrscher der Naturkräfte. — 2. Die Gestalten Siegfrieds und Brunhildens im Nibelungenliede und in der nordischen Sage. (Sch. A.) — 3. Der hat nach Rechtem nicht getrachtet, Der nicht die eigene Arbeit achtet. — 4. Österreichs Antheil an der Entwicklung der deutschen Sprache und Literatur im Mittelalter. (Sch. A.) — 5. Noth und Gefahr sind oft eine große Wohlthat für die Völker. — 6. Rüdigers Kampf und Tod. (Sch. A.) — 7. Walther von der Vogelweide und der Hof der Babenberger. (Sch. A.) — 8. Jüngling, sei dem Fleiße hold; Fleiß verwandelt Staub in Gold. (Sch. A.) — 9. Der Mensch ist sich selbst sein größter Feind. — 10. Nur Beharrung führt zum Ziel. (Sch. A.) — 11. Was Du ererbt von Deinen Vätern hast, erwirb es, um es zu besitzen. — 12. Aus kleiner Hütte gieng manch' großer Mann hervor. (Sch. A.) — 13. Ans Vaterland, ans theure, schließ' Dich an, Das halte fest mit deinem ganzen Herzen. — 14. Begeisterung ist die Quelle großer Thaten. (Sch. A.)

VI. Classe, Abth. B: 1. Welchen Nutzen gewähren uns Reisen? — 2. Heldenmuth und Größe der Römer in Zeiten der Gefahr und des Unglücks. (Sch. A.) — 3. Empfang und Aufenthalt der Burgunden in Bechlarn. — 4. Gedankengang der Elegie Walthers von der Vogelweide und ihre Beziehungen zum Leben des Dichters. (Sch. A.) — 5. Die Wissenschaften haben bittere Wurzeln, aber süße Früchte. (Isokrates). — 6. Worauf beruht die Anhänglichkeit des Menschen an seine Heimat? (Sch. A.) — 7. Ferro nocentius aurum (Ovid). — 8. Welche Verdienste hat sich Karl der Große um die Cultur der Deutschen erworben? (Sch. A.) — 9. Worin besteht das wahre Glück nach den Anschauungen A. v. Hallers? — 10. Krieg und Frieden. Nach E. v. Kleists Frühling. (Sch. A.) — 11. Die Unsterblichkeit ist ein großer Gedanke, Ist des Schweißes der Edeln wert (Klopstock). — 12. Wie urtheilt Lessing über Shakespeare im 17. Literaturbriefe? (Sch. A.) — 13. Die Vorfabel in Lessings „Minna von Barnhelm". — 14. Charakteristik des Majors von Tellheim. (Sch. A.)

VII. Classe, Abth. A: 1. Gutenberg und Columbus. — 2. Der Mensch ein Kind der Sorge. (Sch. A.) — 3. Welches Bild gewinnen wir aus Ciceros Rede für den Oberbefehl des C. Pompejus von den damaligen Zuständen in Kleinasien? — 4. *a)* Luise, v. Voss. Inhalt und Plan. *b)* Götz und Weißlingen, zwei verschiedene Richtungen des Ritterthums. (Sch. A.) — 5. Welche Idee verherrlicht Goethe in seinem Götz? — 6. Die Erkennungsscene in Goethes Iphigenie. (Sch. A.) — 7. Worin fehlt Antonio gegen Tasso und wodurch macht er hinterher seinen Fehler wieder gut? —

8. *a*) Welche Ansichten werden in Elisabeths Staatsrathe über die Vollziehung der Todesstrafe an Maria Stuart laut? *b*) Maria Stuart. Inhalt. — 9. *a*) Hast Du treu Deine Pflicht gethan, Blickt Dich die Freude segnend an. *b*) Nisus und Euryalus. (Sch. A.) — 10. Dass der Mensch zum Menschen werde, Stift' er einen ewigen Bund gläubig mit der frommen Erde. — 11. Nicht der laute, nur der gerechte Tadel kann verletzen. (Sch. A.) — 12. Was erfahren wir aus Ciceros Rede für den Dichter Archias über die Stellung der Römer zur Kunst und Wissenschaft? — 13. Der erste Act des W. Tell als Expositionsact betrachtet. — 14. Gang der Verhandlungen in der Rütli-Scene. (Sch. A.)

VII. Classe, Abth. B: 1. Welchen Nutzen gewährt uns das Studium fremder Sprachen? (Nach Herder). [Sch. A.) — 2. Die Sprache der herbstlichen Natur. — 3. Mit welchen Mitteln der Rede und auf welche Weise wirkt Antonius im J. Cäsar auf das Volk? (Sch. A.) — 4. *a*) Wie der Herr, so der Knecht (im Anschlusse an Goethes Götz von Berlichingen); *b*) Götz von Berlichingen vor Gericht zu Heilbronn. — 5. Pflichten der studierenden Jugend gegen Staat und Vaterland. — 6. Und Hoffnung und Erinnerung sind zwei Rosen, von einem Stamme mit der Wirklichkeit, nur ohne Dornen (Grillparzer). [Sch. A.] — 7. Im engen Kreis verengert sich der Sinn, Es wächst der Mensch mit seinen größern Zwecken (Schiller). — 8. Worin liegt das Göttliche der Menschennatur und seine Beschränkung? (Nach Goethes Gedichten: „Das Göttliche" und „Grenzen der Menschheit"). [Sch. A.] — 9. That Iphigenie recht, das Leben ihres Bruders und seines Freundes aufs Spiel zu setzen? — 10. Wie zeichnet Schiller in seiner Jenaer Antrittsrede den Unterschied zwischen dem Brotgelehrten und dem echten Jünger der Wissenschaft? (Sch. A.) — 11. Welchen Einfluss hat der Ackerbau auf die Gesittung der Menschen ausgeübt? (Nach dem eleusischen Feste von Schiller). [Sch. A.) — 12. Der Soldat des dreißigjährigen Krieges. — 13. Charakteristik des Max Piccolomini in Schillers „Wallenstein" (Sch. A.) — 14. Österreichs Erhebung im Jahre 1809. (Sch. A.)

VIII. Classe: 1. *a*) Über die Natürlichkeit der Geistererscheinungen bei Shakespeare. *b*) Durch welche Mittel der Rede weiß M. Antonius in der Leichenrede (Jul. Caes. v. Shak.) auf seine Zuhörer zu wirken? — 2. Die beiden ersten Gesänge in „Hermann und Dorothea", nach Inhalt und Bedeutung. (Sch. A.) — 3. *a*) Vox populi, vox dei. *b*) Über die epische Einheit. (Nach Schlegel.) — 4. *a*) Ἀλλ' ἢ καλῶς ζῆν ἢ καλῶς τεθνηκέναι τὸν εὐγενῆ χρή (Soph. Aj.) mit Bezug auf Cleopatras Verhalten in Hor. Od. I. 37. *b*) Die Glocke als Begleiterin des Menschen auf seinem Lebenswege. (Sch. A.) — 5. Inwiefern und warum ist die plastische Darstellung der Laokoon-gruppe verschieden von jener Vergils? — 6. Wie bestreitet Lessing in seinem Laokoon Winkelmann und die Schweizer? (Sch. A.) — 7. Wie wird in der Rütli-Scene die Rechtmäßigkeit der Handlungsweise der Eidgenossen begründet? — 8. Wie kommt es, dass Sophoc. Phil. trotz des Schreiens Mitleid erweckt und an Achtung nicht verliert? (Sch. A.) — 9. *a*) Aus welchen verschiedenen Ursachen wird Wallenstein von seinen Anhängern verlassen? *b*) Warum muss nach dem dritten Aufzuge in Maria Stuart der Untergang der Heldin als gewiss erscheinen? — 10. *a*) Stürme sind ein Bild der Leiden des Menschen. *b*) Warum gereicht Unglück-lichen fremdes Leiden zum Troste? (Sch. A.) — 11. *a*) Über den Grundsatz: Zu geschehenen Dingen soll man das Beste reden. *b*) Der Prophet gilt in seiner Heimat am wenigsten. — 12. Wie bewährt Nathan die in der Erzählung von den drei Ringen ausgesprochene Gesinnung? (Sch. A.) — 13. *a*) Ein jeder gibt den Wert sich selbst. *b*) Große Seelen dulden still (Sch. A.).

b) In rumänischer Sprache:

V. Classe: 1. Petrecerea ferielor expirate. — 2. Este cronica luĭ Hurul autentică séŭ ba? — 3. Plăcerile, ce ni le căuséză érna. — 4. Carĭ instituţiunĭ naţionale şi religióse făceaŭ pre Helenii anticĭ sĕ se considere toţĭ de una şi aceea-şĭ naţiune, de şi nu formaŭ numaĭ unŭ statŭ politicŭ? — 5. Care este tradiţiunea despre fundarea Romeĭ? — 6. Carĭ tradiţiunĭ vĕdescŭ influenţa cultureĭ asiatice-africane asupra Helenilor anticĭ? — 7. Carĭ animale servescŭ omuluĭ ca modelŭ de diligenţă şi ordine? — 8. Folosul, ce ni-lŭ aducŭ paserile cântătóre. — 9. Despre originea Românilor (după lecturariu). — 10. Care poporŭ strĕinŭ a influenţatŭ maĭ multŭ asupra limbeĭ române şi de unde se cunósce acésta?

VI. Classe: 1. Despre însĕmnĕtatea studiuluĭ istoricŭ. — 2. Despre însĕmnĕtatea oratorică şi autenticitatea necrologuluĭ relativŭ la mórtea luĭ Stefanŭ celŭ Mare. — 3. Despre preferenţa climatuluĭ moderatŭ faţă cu cele-lalte climate. — 4. Scopul şi resultatele expediţiunilor cruciate. — 5. Plăcerile căusate prin érnă. — 6. Folosul pădurilor. — 7. Carĭ sûnt folósele aduse de érnă? — 8. Curentele marine şi influenţa lor asupra climeĭ locale. — 9. Folósele şi stricăciunile căusate prin ploĭ. — 10. Carĭ momente vorbescŭ pentru remânerea colonielor romane în Dacia Traiană şi după timpul împĕratuluĭ Aurelianŭ?

VII. Classe: 1. Însĕmnĕtatea tipografieĭ ca mejlocŭ de cultură. — 2. Tradiţiunea despre „turnul luĭ Butul". — 3. Pentru-ce intemeiară popórele locuinţele (satele şi oraşele) sale pe lângă ape? — 4. Ce scimŭ noĭ despre conciliul dela Florenţa ţinutŭ în anul 1439? — 5. Despre însĕmnĕtatea studiuluĭ istorieĭ naţionale. — 6. Prin cine s'a introdusŭ crestinismul la Românĭ? — 7. Despre originea limbeĭ române (după lecturariu). — 8. Despre insĕmnĕtatea istorică a munţilor Carpaţĭ faţă cu Românii şi istoria lor. — 9. Despre urmările rele ale resbóielor. — 10. Despre însĕmnĕtatea aeruluĭ şi a luminiĭ solare pentru existenţa vieţeĭ animalice şi vegetale.

VIII. Classe: 1. Despre nenorocirile căusate prin resbóie. — 2. Despre însĕmnĕtatea adevĕruluĭ faţă cu crescerea nóstră. — 3. Influenţa crestinismuluĭ asupra cultureĭ şi civilisaţiuniĭ eŭropene. — 4. Referenţa reciprocă dintre superstiţiunĭ şi sciinţele naturale. — 5. Cultura invinge necultura. — 6. Influenţa culturală a cetiriĭ cărţilor. — 7. Încâtŭ este poesia şi literatura poporală icóna cultureĭ poporale? — 8. Pentru-ce progresă in evul mediu Europa occidentală maĭ departe în cultură decâtŭ cea orientală? — 9. Pentru-ce se apreţuescŭ după meritŭ virtuţile şi meritele multora de abia după mórtea lor? — 10. Pentru-ce n'a invinsŭ cultura şi naţionalitatea romană in Orientŭ aşia de efectivŭ ca in Occidentŭ?

c) In ruthenischer Sprache:

V. Classe: 1. Якъ провѣвъ я вакацїѣ? (Въ формѣ листу). — 2. Якій хосенъ маємъ мы зъ звѣрятъ домашнихъ? — 3. Рѣка, образъ житя людского. — 4. Для чого свята рôздвяній намъ такій милій? — 5. Описанє пожару. — 6. Основанє кієвопечерской лавры (на пôдставѣ прочитаного). — 7. Якй користи и шкоды приносять намъ рѣки? — 8. Яку науку мѣстить Володимира Мономаха „Поученіє дѣтямъ?" — 9. О скôлько прислужили ся Фенікіяне до культурного розвою людскости? — 10. Вплывъ великого мѣста на образованє чоловѣка.

VI. Classe: 1. Чому займає желѣзо межи всѣма металями перше мѣсце? — 2. Якими средствами оборонными надѣлила природа звѣрята? — 3. Хрещенє Володимира и всеи Руси (пôсля лѣтописи Нестора). — 4. Не все золото, що ся свѣтить. — 5. На-

слѣдки вынайденя стрѣльного пороху. — 6. О скôлько въ „Словѣ о полку Игоревôмъ" переховала ся народна руска поезія XII. в.? — 7. Якъ зъображає ся пекло въ апокрифичнôмъ творѣ „Хождение Богородицѣ по мукамъ?" — 8. Поля и лѣсы; ихъ краса и пожитокъ. — 9. Чому „лихо попереду знати, що намъ въ свѣтѣ зострѣнеть ся?" — 10. Брацтва церковнї на Руси и ихъ культурне значѣне.

VII. Classe: 1. Хто шукає правды, той не повиненъ зважати на голосы. — 2. Въ якôй цѣли написавъ Петро Артемовскій-Гулакъ свою сатиричну поему „Панъ та собака?" — 3. Описъ сходу сонця (пôсля Квѣтчиної повѣсти „Маруся"). — 4. Наслѣдки трицятилѣтної войны для Нѣмеччины. — 5. Праця правдиве жерело утѣхи. — 6. Хôдъ гадокъ поемы Маркіяна Шашкевича „Погоня". — 7. Користи подорожей пѣшихъ. — 8. Вплывъ климату на звычаѣ и обичаѣ людей. — 9. Скитъ Манявскій; єго історія и значѣнє. — 10. Якъ звеличивъ Шевченко материньску любовъ въ поемѣ „Наймичка?"

VIII. Classe: 1. Де много свѣтла, тамъ много тѣни. — 2. Характеристика Андрѣйка и Василька въ повѣсти Марка Вовчка „Два сыны". — 3. Що причиняло ся у старыхъ Грекôвъ до пôддержуваня національної свѣдомости? — 4. Хôдъ гадокъ въ поемѣ Кониського „Весна и зима". 5. Пôзнай себе — буде въ тебе. — 6. Вплывъ музыки на душу чоловѣка. — 7. Зла совѣсть здрадить чоловѣка, чи скорше чи пôзнѣйше. — 8. Потреба знаня географичного для науки историчної. — 9. Чоловѣкъ заслугує лише о стôлько на поважанє, о скôлько благороднї тї идеѣ, для котрыхъ вôнъ жиє и умирає. — 10. Задача матурична.

V. Freie Gegenstände.

1. Polnische Sprache (in 2 Abth. je 2 St.): I. Abth.: Die Formenlehre und das Wichtigste aus der Syntax nach Popliński's Elementarbuch. Lesen und Memorieren aus Wypisy I. Bd. Correctes Nacherzählen der gelesenen Stücke. Schriftliche Übersetzungen. — II. Abth.: Syntaktische Eigenthümlichkeiten nach der Grammatik von Dr. A. Małecki mit schriftlichen Übungen. Lesen und Memorieren aus Wypisy IV. Bd. Literaturgeschichte in Umrissen und Biographien nach Nehring. Lectüre: „Pan Tadeusz", Balladen und Romanzen von Mickiewicz.

2. Französische Sprache, I. Cursus (3 St. wöch.): An der Hand des I. und II. Theiles des Lehrganges der französischen Sprache von Fetter wurde das Lesen mit Berücksichtigung des Sprechactes, sowie die elementare Formenlehre eingeübt. Mündliche Reproduction der gelesenen zusammenhängenden Stücke. Besonderes Gewicht wurde gelegt auf die Aneignung eines zum täglichen Verkehr nöthigen Sprechmaterials. Übungen im Übersetzen. Schriftliche Präparation. Zwei Schularbeiten im Semester.

3. Freihandzeichnen (in 2 Abth. je 2 St. wöch.): 1. Bei den Anfängern: Zeichnen der geraden und krummen Linien, Zeichnen von Winkeln und geometrischen Figuren, Entwerfen leichter geometrischer Ornamente und bei den fähigeren Schülern Zeichnen complicierter ornamentaler Formen und menschlicher Gesichtstheile in Contour und Halbschatten. — 2. Bei den vorgebildeten Schülern: Auffassen, Entwerfen und Ausführen von Ornamenten, Studien von menschlichen Kopftheilen in verschiedenem Maßstabe.

4. Stenographie in 2 Abth.: I. Abth. (2 St.): Wortbildung, Wortkürzung und die Grundzüge aus der Satzkürzung nach dem Lehrbuche von Kühnelt, mit fortwährenden Lese- und Schreibübungen unter Zuhilfenahme von Faulmanns stenogr. Anthologie. — II. Abth. (1 St.): Fortsetzung der Satzkürzung und logische Kürzung nach Kühnelts Lesebuch und Faulmanns Schule der Praxis mit besonderer Rücksicht auf die Übung.
5. Gesang. *a*) bei den kath. und mos. Schülern: I. Abth. (2 St.): Knabenstimmen: Noten- und Schlüsselkenntnis: Zeitdauer der Noten und Pausen; chromatische Zeichen. Über Rhythmus und Takt: rhythmische Formen, Taktarten. Durtonarten. Über das Tempo und seine Bezeichnung. Dynamische Vortragszeichen. Ein- und zweistimmige Lieder aus Fr. Mairs und aus Kothes Liederstrauß. — II. Abth. (1 St.): Zweistimmige Lieder aus Kothes Sammlungen. Außerdem wurde mit den röm.-kath. Schülern beider Abtheilungen der Kirchengesang gepflegt. *b*) Bei den gr.-or. Schülern: I. Abth. (2 St.): Allgemeine Musiklehre. Treffübungen auf den einzelnen Intervallen der diatonischen Tonleiter. Vocalisen und Solfeggien. Singen ein- und zweistimmiger Lieder. — II. Abth. (1 St.): Fortsetzung der Treffübungen, drei- und vierstimmiger Gesag. Vortragslehre wie auch das richtige Singen guter Kirchenlieder.
6. Turnen in 10 Abth. (in zus. 18 St.): Der Turnunterricht wurde gemäß den mit den h. Ministerial-Verordnungen vom 20. September 1875, Z. 14258 und 15. April 1879, Z. 5607 verlautbarten Instructionen ertheilt und umfasste Ordnungsübungen, Freiübungen, Geräthübungen und Turnspiele. Bei allen Turnübungen Berücksichtigung des ästhetischen Momentes, strenge Forderung präciser Darstellung behufs Sicherung günstiger Einflussnahme auf eine stetig fortschreitende harmonische Körperentwicklung.
7. Kalligraphie in I. A, I. B, I. C (je 1 St.): Deutsche und lateinische Currentschrift.

VI. Vermehrung der Lehrmittelsammlungen.

A. Bibliothek.

a) Lehrerbibliothek.

1. Durch Schenkung.

Vom hoh. k. k. Unterrichtsministerium: Österr. botanische Zeitschrift. — Wiener Vorlageblätter für archäologische Übungen von O. Benndorf. Serien von 1888, 1889 und 1890/91.

Von der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien: Denkschriften d. phil.-hist. Classe, 38., 39. und 40. Band. Denkschriften der math.-naturw. Classe, 57. und 58. Band. Sitzungsberichte der phil.-hist. Classe, 122., 123., 124. und 125. Band. Register Nr. XII. Sitzungsberichte der math.-naturw. Classe, 1890 I. Abth. Nr. 4—10, II. a Abth. Nr. 4—10, II. b Abth. Nr. 4—10, III. Abth. Nr. 4—10; 1891 Abth. I Nr. 1—7, Abth. II a Nr. 1—7, Abth. II b Nr. 1—7, Abth. III Nr. 1—7. Archiv, 76. Band, 1. und 2. Hälfte, 77. Band, 1. und 2. Hälfte. Fontes, II. Abth. 45. Band. 2. Hälfte. Almanach 1890 und 1891.

Von dem Herrn Univ.-Prof. Dr. J. Loserth: Landeskunde von Ober-Österreich von L. Edelbacher, 2. Aufl., 1 Band.

Von dem Herrn Grafen R. Hoyos: Gedichte von Rudolf Graf Hoyos, 1 Band.

2. Durch Kauf.

a) Zeitschriften: Verordnungsblatt für den Dienstbereich des k. k. Ministeriums für Cultus und Unterricht, 2 Expl. — Zeitschrift für die österr. Gymnasien. —

Zeitschrift für das Realschulwesen. — Zeitschrift für das Gymnasialwesen von Kern und Müller. — Neue Jahrbücher für Philologie und Pädagogik von Fleckeisen und Masius. — Zeitschrift für den deutschen Unterricht von Lyon. — Arhiva societaţii ştiinţifice şi literare din Iaşi. — Archiv für slavische Philologie von Jagić. — Historische Zeitschrift von Sybel. — Mittheilungen der k. k. geographischen Gesellschaft in Wien. — Zeitschrift für Schulgeographie von Seibert. — Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht von Hoffmann. — Naturwissenschaftliche Rundschau von Sklarek. — Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht von Poske. — Lehrproben und Lehrgänge von Frick und Meier. — Österreichische Mittelschule. — Österreichische Blätter für Stenographie.

b) Werke: Wetzer und Welte, Kirchenlexikon. 7. Band. — Weiss, Apologie des Christenthums vom Standpunkte der Sitte und Cultur, I., II., III. 1. 2., V. Band. — Schuchardt, Schliemanns Ausgrabungen. — Ribbeck, Geschichte der römischen Dichtung, 2 Bände. — Kühner, Ausführliche Grammatik der griechischen Sprache von Blaß, 1. Th. — Teuffel-Schwabe, Geschichte der röm. Literatur. — Krebs. Schmalz, Antibarbarus. — Oehler, Bilderatlas zu Cäsar. — Brugmann, Grundriss der vergleichenden Grammatik der indogermanischen Sprachen, II. 2. — J. Müller, Handbuch der classischen Alterthumswissenschaft, V. 3, VIII. 1, IX. 1. — Roscher, Ausführliches Lexikon der griech. und röm. Mythologie (Forts.). — Paul, Grundriss der germanischen Philologie. I. Band, 5. und 6. Lief.; II. Band, 1. Abth. 6. Lief. — Schmid, Lessing. Geschichte seines Lebens und seiner Schriften, II. Band, 2. Abth. — Bellermann, Schillers Dramen. II. Theil. — Grimm, Deutsches Wörterbuch (Forts.). — Jahrbuch der Grillparzer-Gesellschaft. 2. Jahrg. — Leimbach, Die deutschen Dichter der Neuzeit und Gegenwart (Forts.). — Frick, Aus deutschen Lesebüchern (Forts.). — Kürschner, Deutsche Nationalliteratur (Forts.). — Schriften der Goethe-Gesellschaft. 6. Band. — Goethe-Jahrbuch. 13. Band. — Gaster. Literatura poporală română. — Лекціи по исторіи русскаго языка А. И. Соболевскаго. — Weber, Allgemeine Weltgeschichte, 11.—15. Band; dazu 2 Registerbände. — Huber, Geschichte Österreichs, IV. Band. — Oncken, Allgemeine Weltgeschichte (Forts.). — Die österr.-ung. Monarchie in Wort und Bild (Forts.). — Kirchhoff, Länderkunde des Erdtheils Europa (Forts.). — Dannenberg, Grundzüge der Münzkunde. — Krumme, Der Unterricht in der analytischen Geometrie. — Ostwald, Grundriss der allgemeinen Chemie. — Clerk. Maxwell, Substanz und Bewegung. — Weber, Aufgaben aus der Elektricitätslehre. — Wiedemann-Ebert, Physikalisches Praktikum. — Dühring, Kritische Geschichte der Principien der Mechanik. — Gretschel, Jahrbuch der Erfindungen, 27. Jahrg. — Kerner von Marilaun, Pflanzenleben. 2 Bände. — Hinterwaldner, Wegweiser für Naturaliensammler. — Bain, Geist und Körper. — Verhandlungen der preuß. Directorenversammlungen. 24., 25., 28. und 29. Band. — Verhandlungen über Fragen des höheren Unterrichts. Berlin, 4. bis 17. December 1890. — Willmann, Didaktik als Wissenschaft.

Die Programmsammlung zählte im vorigen Schuljahre 13.107 Exemplare; zu diesen kamen im Schuljahre 1891/92 33 bairische, 286 deutsche und 240 (darunter 15 aus früheren Jahren) österreichische Programme hinzu; es beträgt somit der gegenwärtige Stand 13.666 Exemplare.

b) Schülerbibliothek.

1. Durch Schenkung.

Vom Herrn Professor von Tarnowiecki Epiphanias: Frey Jakob, Geschichten aus der Schweiz. — Frey W., Der Tod eines Verräthers.

Vom Schüler der VI. Cl. Goldenberg Bernhard: Graesers Schulausgaben. Gotth. Ephr. Lessing: **Emilia Galotti.**

Vom Schüler der VI. Cl. R. von Grigorcea Ioan: Graesers Schulausgaben. Gotth. Ephr. Lessing: Emilia Galotti.

Vom Schüler der IV. Cl. Langenhan Philipp: Zöhrer Ferdinand, Österreichisches Sagen- und Märchenbuch.

Vom Schüler der IV. Cl. Marcussohn Nusem: Barack Max, Wallenstein.

Vom Schüler der IV. Cl. Skurski August: Kinder-Gartenlaube.

Vom Schüler der III. Cl. Berariŭ Aurelian: Dr. Karl Oppel, Tambour und General.

Vom Schüler der III. Cl. Braunstein Uscher: Ludwig J., Schloss Heimburg. — Zöhrer Ferdinand, Österreichisches Sagen- und Märchenbuch.

Vom Schüler der III. Cl. Fritsche Gerhard: J. Wille-Theiß, Siebenbürgische Erzählungen. — Ortleb A. und G., Die Eiersammlung. Die nützlichen und schädlichen Pilze oder Schwämme Deutschlands.

Vom Schüler der III. Cl. Grieshaber Michel: Hoffmann Franz, Beharrlichkeit führt zum Ziel.

Vom Schüler der III. Cl. Grünberg Eisig: Moriz Paul, Der Wildtödter.

Vom Schüler der III. Cl. Hostiuc Constantin: Dr. Andree Richard, Neueste Erforschungsreisen im Süden Afrikas und auf dem Eilande Madagascar.

Vom Schüler der III. Cl. Ohrländer Adolf: Höcker Gustav, Der Waldteufel.

Vom Schüler der II. Cl. Goldberg Dorcu: Chr. von Schmid, Die Feuersbrunst. — Roth Richard, Recht besteht, Unrecht vergeht. — Müller K. A., Oberon der Elfenkönig oder Ritter Hüons Abenteuer.

Vom Schüler der I. Cl. Grinfeld Marcu: Braun Isabella, Das Geheimnis des Schreibtisches.

Vom Schüler der I. Cl. Steinhaus Alfred: Dr. Proschko Isidor, Bilder aus Krain.

2. Durch Kauf.

Österr.-ung. Monarchie in Wort und Bild (Forts.). — Dr. Abicht K., Lesebuch aus Sage und Geschichte. — Aichberger Julius, Franz Josef I. (2 Expl.). — Alberti Eduard, Glaukos und Thrasymachos. — Marcus Charinus, Der junge Christ in Pompeji. — Arthur T. S., Erzählungen aus dem amerikanischen Leben. — Dr. Bachmann Adolf, Albrecht I. Deutscher König und Herzog von Österreich. — Baron Richard, Das Christfest in der Familie Frommhold. Kalifornien in der Heimat. — Berthelt A., Geographie in Bildern. — Bowitsch Ludwig, Rübezahl (3 Expl.). — Campe Joachim Heinrich, Robinson der Jüngere. 2 Theile. Die Entdeckung von Amerika in 3 Bändchen. — Cooper J. F., Der Pfadfinder oder das Binnenmeer. Der letzte Mohikaner. — Daugern Julie, Märchen und Sagen. Kleine Erzählungen aus dem Thierleben. — Erzählungsschriften des Verfassers der Beatushöhle: Bilder aus dem Leben. Scenen und Gespräche. Das Thal von Almeria. Die irländische Hütte. Der Einsiedler am Carmel. Erzählungen und Märchen. Der Köhler aus Valencia. Die Geschichte von den Spielern. Elsbeth vom Riedhof. Die Beatushöhle. — Falkenhorst C., Emin Pascha. — Dr. Fink Karl, Kurzer Abriss einer Geschichte der Elementar-Mathematik. — Fogowitz A. H., Onkel Toms Hütte. — Freytag Gustav, Soll und Haben. Die verlorene Handschrift. — Frisch Franz, Im Waldhof. — Rudolf von Gottschall, Poetik in 2 Bänden. — Grimm Albert Ludwig, Sagen und Märchen aus der Heroenzeit der Griechen und Römer. Kindermärchen. — Grosch Heinrich, Der Zitherklaus. — Grube A. W., Biographische Miniaturbilder. — Hahn Werner, Geschichte der poetischen Literatur. — Hauff Wilhelm, Lichtenstein. — Prof. Karl B. Heller, Aus dem tropischen Amerika. — Herchenbach Wilhelm, Miralda, das Negermädchen. Bagdad, die Königin der Wüste. Ewald Moor, der Schiffsjunge. Aus Oncles Nabors Tagebuch. Durch die nubische Wüste nach Khartum. Ein untergegangenes Grafengeschlecht. Der Gaißbub. —

Benvenuto Cellini, Der Goldschmied. Der Austernsee. — Herold H., Gesundheit und Jugend (2 Expl.). — Hoffmann Franz, Fleiß und Trägheit. Das treue Blut. Nur Kleinigkeiten. Die Stimme des Herrn. Schein trügt. Moschele. Der Goldsucher. Beharrlichkeit führt zum Ziel. Der über den Wolken. Mylord Cat. In demselben Hause. Krumme Wege und grade Wege. Wie man's treibt, so geht's. Des Herrn Wege sind wunderbar. Segen des Wohlthuns. Geschwisterliebe. Dem Gerechten wird Gutes vergolten. — v. Horn W. O., Der Orkan auf Cuba. Von den zwei Savoyarden-Büblein. Der Schiffsjunge und sein Lebensgang. Zwei Ausbrüche des Vesuvs. Das Erdbeben von Lissabon. Wie einer ein Walfischfänger wurde und was er dabei erfuhr und erlebte. Von Einem, der das Glück gesucht. Auf dem Mississippi. Eine Meuterei im stillen Meere. Durch die Wüste. Olaf Thorlacksen. — Höcker Gustav, Die Ansiedler in Kanada. — Höcker Oskar, Wie groß ist des Allmächtigen Güte. Der Tyrann der Goldküste. Ein treuer Freund ist eine starke Stütze. — Dr. Höfler Constantin, Die Zeit der luxemburgischen Kaiser Karl IV. (Wenzel) Sigmund. — Dr. Huber Alfons, Die Zeit der ersten Habsburger von Albrecht I. bis Rudolf IV. — Justi Ferdinand, Ein Tag aus dem Leben des Königs Darius. — Keil Robert, Im fernen Orient. — Dr. Kohlrausch E. und Marten A., Turnspiele. — Kühn Franz, Spiegelbilder aus dem Leben und der Geschichte der Völker. 9., 10., 11., 13., 14., 15. und 17. Bändchen. — Laicus Philipp, Der Cabecilla. — Ludolff M., Sein letzter Wille. — Malot H., Heimatlos. — Meißner Albert, Erzählungen eines alten Seefahrers. — Mensch G., Elisha Kent Kane, der Nordpolfahrer. — Messerer Th., Krieg und Frieden. — Dr. Netoliczka Eugen, Bilder aus der Geschichte der Physik. — Niebuhr B. G., Griechische Heroengeschichten. — Nieritz Gustav, Ausgewählte Erzählungen. 28 Bändchen. — Dr. Nissen H., Pompeji. — Oertel H., Otto III. — Dr. Oppel Karl, Bilder aus dem Orient. II. — Ortmann R., An den Gestaden Afrikas. — Osterwald K. W., Erzählungen aus der alten deutschen Welt in 3 Bänden. — Pfeil Heinrich, Gute Kinder, brave Menschen. — Pichler Luise, Alarich in Rom. Im Teutoburger Walde. — Dr. Pilz Karl, Die kleinen Thierfreunde. — Dr. Plieninger Gustav, Die schönsten Erzählungen des C. F. Weiß'schen Kinderfreundes. Hilfe in der Noth oder Errettungen aus großen Lebensgefahren. — Proschko Hermine, Jugendheimat. Bilder aus Habsburgs Chronik. Aus Österreichs Lorbeerhain. — Dr. Proschko Fr. Isidor, Perlen aus der österreichischen Vaterlands-Geschichte. Der Türke vor Wien. Mein Österreich. Eugen von Savoyen — Reinick Robert, Geschichten, Märchen und Lieder. — Dr. Reuter Wilhelm, Poetik. — Roth Richard, Recht besteht, Unrecht vergeht. Ein nordischer Held. — Salis Gedichte. — Sarreiter Joseph, Ludwig Aurbachers gesammelte größere Erzählungen. — Joseph Victor von Scheffel, Ekkehard. — Schmidt Ferdinand, Im Spiegel der Tugend. — Schneider R., Sagen der alten Griechen. — Dr. Schoene Gustav, Edda Sagen. — Skalla Ferdinand, Herzog Leopold der Glorreiche und seine Zeit. — Spyri Johanna, Heidis Lehr- und Wanderjahre. Heidi kann brauchen, was es gelernt hat. Ein Landaufenthalt von Onkel Titus. — Dr. Stacke Ludwig, Erzählungen aus der alten, mittleren, neuen und neuesten Geschichte in biographischer Form in 5 Bänden. — Stoll H. W., Phyllidas und Charite. — Trautmann E., Ferry, Der Waldläufer. — Dr. Uhle Paul, Plutarchs Lebensbeschreibungen großer Helden Griechenlands und Roms. — Wackernagel Wilhelm, Pompeji. — Wagner H., Entdeckungsreisen in 3 Bänden. — Wattenbach W., Algier. — Weber S. W., Dreizehnlinden. — Dr. Werther Werner, Kleine moralische Erzählungen. Der Jugend Räthselschatz. Der Jugend Fabelschatz. — Wiechowsky Wilhelmine, Märchenbuch (2 Expl.). — Wipo, Das Leben Kaiser Konrads II. — Wolff Emil, David Copperfield oder Gott ist der Waisen Vater. — Helene von Ziegler, Unveränderlich treu. — Cinci-zeci de istorioare morale pentru băieți și băiete de amicul pruncilor F. H. — Orații ținute la nunte țěrĕnesci. — Viața și pildele preaînțeleptuluĭ Esop. — Petra-Petrescu, Nepotul ca unchiŭ. — B. V.

Vermont, Patimele junelui Werther, traductie din limba germana Goethe'. — Wilhelm Hauf, Othello. — Popea Ioan, Carte de cetire. Tom. I. — Gr. Sima al luĭ Ión, Ardeleanul glumeț. — Lazariciu Ioanu, Elemente de poetica romána. Istoria literaturei române. — Ode, epode, carmen saeculare. Traduțiune in versuri de Dumitru C. Ollanescu. — Alesiu Viciu, Legendariu românescu. Atheneul român, Conferințe publice in 4 Bänden. — Барвѣньскій Олександеръ, Давóнокъ. — Поповичь Омелянъ, Бібліотека для молодѣжи, рочникъ II., III., IV., V. — Франко Іван, Фавст, трегедіа Иогана В. Гете. Лисъ Микита

Von den 1755 Bänden des Vorjahres wurden (aus verschiedenen Gründen) 194 Bände ausgeschieden; es verblieben somit 1561 Bände. Dazu sind in diesem Schuljahre 251 Bände neu hinzugekommen, so dass der gegenwärtige Stand der Schülerbibliothek 1812 Bände aufweist. — Im Schuljahre 1891/92 fanden im ganzen 5138 Bücherentlehnungen statt.

B. Physikalisches Cabinet.

1. Durch Schenkung:

Zwei Holzstöcke mit Porträts (von einem Schulfreunde). Ein zusammengesetztes Mikroskop (von einem Schüler).

2. Durch Kauf:

Weingeistlampe für spectralanalytische Untersuchungen, Äolipyle, Messcylinder, Kelchmensuren, Schreibstimmgabel, Spectrentafel, Apparat für Demonstration der Ermüdung des Auges, schwarze Sonnenbrille, Glaskugel mit gefärbtem Petroleum, Wood'sches Metall, Natürlicher Magnet, Electrophor aus Hartgummi, Leydener Flasche mit grosser hohler Kugel, Goldblattelectroskop, Hartgummistab mit Klemmen, Doppelhacken, Inductionsrollen, Unterbrecher mit Neef'schem Hammer, Electrisches Horizontalpendel, Apparat für die electrischen Grundversuche, Amalgam, Klemmschrauben, Stativ für Geissler-Röhren, Phosphorescierende Röhre, Fluorescierende Röhren, Voltmeter, Ampèremeter, Declinationsnadel, Petrinaspirale, Mikrophon nach Keiser-Schmidt, Thermosäule mit 20 Elementen nach Noe, Medaillenabdrücke in Guttapercha. Verbrauchsstoffe.

Das physikalische Cabinet umfasst 517 Nummern, das chemische 113.

C. Naturhistorisches Cabinet.

1. Durch Schenkung:

Sapphir und Smaragd vom Herrn Constantin Ritter von Buchenthal.

2. Durch Kauf:

Biologische Aufstellung von Aporia crataegi, Pieris brassicae und Bombyx mori; Metamorphose von Oryctes nasicornis, Rana esculenta und Triton cristatus; Entwickelungsreihe von Salmo faris; Modelle des Nervensystems der Raupe, Puppe und des Imago vom Schmetterling, sowie der Spinne.

Stand der Sammlung am Ende des Schuljahres 1891/92.

1. Zoologische Sammlung.

	Stand im J. 1890/91.	Zuwachs im J. 1891/92.	Stand am Ende des Jahres 1891/92.
Wirbelthiere	244	3	247
Andere Thiere	1263	1	1264
Sonstige zoologische Gegenstände	132	0	132
Modelle	10	4	14
Abbildungen	84	0	84.

II. Botanische Sammlung:

	Stand im J. 1890 91.	Zuwachs im J. 1891/92.	Stand am Ende des Jahres 1891 92.
Herbariumblätter	920	5	925
Sonstige botanische Gegenstände	44	0	44
Modelle	20	0	20
Abbildungen	41	0	41.

III. Mineralogische Sammlung:

Naturstücke	1436	2	1438
Krystallmodelle	230	0	230
Abbildungen	24	0	24.

D. Die historisch-geographische Sammlung.

1. Durch Schenkung:

Von dem Schüler der VIII. Classe H. Brandmann: Spruner, historisch-geographischer Handatlas, 2. Auflage, 3 Bände.

2. Durch Kauf:

Lobmeyers Wandbilder für den geschichtlichen Unterricht, I. und II. Serie. — Lehmann, Culturgeschichtliche Bilder für den Schulunterricht, I., II. und III. Serie. — Heymann und Übel, Aus vergangenen Tagen. Commentar zu Lehmanns culturgeschichtlichen Bildern. — Haardt, Politische Schulwandkarte von Europa. — Haardt, Schulwandkarte von Asien. — Haardt, Politische Schulwandkarte von Österreich-Ungarn.

E. Lehrmittel für den Gesangsunterricht.

Austria, Patriotische Lieder, Heft 1—3, Partitur, je 2 Stimmen Alt, Tenor, Bass, Sopran zu Heft 1—3.

F. Münzensammlung.

Der Zuwachs beträgt: 40 Stück Münzen, 4 Medaillen, 4 Denkmünzen und 27 Doubletten. Wertvollere Beiträge spendeten: Herr Dr. Flinker (1 grosse Medaille, 5 römische, 4 Silbermünzen u. a.), Herr Hollinger Schulem, Pächter in Tereblestie (9 Silbermünzen), Frl. Emmy Emery (6 amerikanische Münzen) und Herr Prof. V. Nussbaum; ferner spendeten die Schüler der I. Cl. A.: Bakulinski L., Cantemir G., Dostal A., Frenchel Ch., R. v. Gojan M., Grigorovici St., Hauer M. und Heilpern F.; der I. Cl. C: Carage E. und Tarnawski E.; der III. Cl. B: Czech A.; der IV. Cl. B: Silberbusch E. (1 öst. Banknote vom Jahre 1859); der VI. Cl. A: Funkenstein M., Serfas V. und Nussbaum V.; der VI. Cl. B: Zloczower L.; der VII. Cl. B: Arnold I., Gottlieb J., Korber W., Lustig H., Lutwak S., Ohrenstein Sch., Romanesco G., Rosenzweig W. und Wachtel W.; der VIII. Cl. Erlich M. eine größere Anzahl zum Theil gut erhaltener Kupfer- und Silbermünzen. Endlich wurden noch von mehreren Schülern einzelne Münzen für die Doublettensammlung übergeben.

Gegenwärtiger Stand der Sammlung: 384 Stück Münzen und Medaillen, 144 Doubletten und eine Banknote.

VII. Unterstützung der Schüler.

A. Stipendien.

Post Nr.	Name des Stipendisten	Classe	Benennung des Stipendiums	Datum und Zahl des Verleihungsdecretes	Jährlicher Betrag fl.	kr.
1	Lebouton Alois .	I b	Handstipendium aus den Gefällsstrafgelder-Überschüssen	Erl. d. hochlöbl. k. k. Fin.-Direction v. 17. Aug 1891, Z. 10664.	100	—
2	Schirl Maximilian	I c	Handstipendium aus den Gefällsstrafgelder-Überschüssen	Erl. des hohen k. k. Fin.-Minist. v. 4. Dec. 1891, Z. 43247.	100	—
3	Fara Johann . .	II a	Kaiser Franz Josef-Stipendium	Zuschr. d. löbl. Kaiser Franz-Josef-Vereines vom 22. Nov. 1891, Z. 104.	50	—
4	Iskuleskul Constantin . . .	II a	Kaiser Franz-Josef-Stipendium	Zuschr. d. löbl. Kaiser Franz-Josef-Vereines vom 22. Nov. 1891, Z. 104.	50	—
5	Mayer Otto . .	II b	Kaiser Franz-Josef-Stipendium	Zuschr. d. löbl. Kaiser Franz-Josef-Vereines vom 22. Nov. 1891, Z. 104.	50	—
6	Czech Alexander	III a	Kaiser Franz-Josef-Stipendium	Zuschr. d. löbl. Kaiser Franz-Josef-Vereines vom 22. Nov. 1891, Z. 104.	50	—
7	Dampf Schmiel Efroim . . .	III a	Jacob Rosenzweig'sches Stipendium	Zuschr. des Herrn Leon Rosenzweig vom 10. November 1890.	50	—
8	Grauer Israel . .	III a	Kaiser Franz-Josef-Stipendium	Note des Marktgemeindevorstandes Sadagura v. 22. Febr. 1892, Z. 267.	50	—
9	Goldenberg Emanuel	III a	Marcus Zucker'sches Stipendium	Note des hochl. Land.-Aussch. v. 5. Mai 1892, Z. 1542.	68	88
10	Kotzek Johann .	III a	Kaiser Franz-Josef-Stipendium	Zuschr. d. löbl. Kaiser Franz-Josef-Vereines vom 22. Nov. 1891, Z. 104.	50	—
11	v. Barbier Theoktist	IV a	Agnes v. Popovici'sches Stipendium	Zuschr. der löbl. rumänischen Societät v. 22. Jänner (3. Febr.) 1892, Z. 15.	50	—
12	Kamiński Roman	IV a	Handstipendium aus den Gefällsstrafgelder-Überschüssen	Erl. d. hochlöbl. k. k. Finanz-Land.-Dir. in Lemberg v. 22. Dec. 1888, Z. 81933.	100	—

Post.-Nr.	Name des Stipendisten	Classe	Benennung des Stipendiums	Datum und Zahl des Verleihungsdecretes	Jährlicher Betrag fl.	kr.
13	Schessan Valerian	IV b	Kaiser Franz-Josef-Stipendium	Zuschr. d. löbl. Kaiser Franz-Josef-Vereines vom 22. Nov. 1891, Z. 104.	50	
14	Wachlowski Camillo	IV b	Kaiser Franz-Josef-Stipendium	Zuschr. d. löbl. Kaiser Franz Josef-Vereines vom 22. Nov. 1891, Z. 104.	80	—
15	Woloschenko Demeter	IV b	Gr.-or. Religionsfonds-Stipendium	Erl. d. hoh. k. k. Land.-Reg. v. 16. Nov. 1889, Z. 14588.	80	
16	Pawelczak Nestor	V b	Kaiser Franz-Josef-Stipendium	Zuschr. d. löbl. Kaiser Franz-Josef-Vereines vom 22. Nov. 1891, Z. 104.	80	—
17	Seinfeld Salomon	V b	Marcus Zucker'sches Stipendium	Note d. hochlöbl. Land.-Aussch. v. 8. Jänner 1890, Z. 72.	68	88
18	Weiner Eisig . .	V b	Marcus Zucker'sches Stipendium	Note d. hochlöbl. Land.-Aussch. v. 18. März 1891, Z. 633.	68	88
19	Barański Anton .	VI a	Kaiser Franz-Josef-Stipendium	Zuschr. d. löbl. Kaiser Franz-Josef-Vereines vom 22. Nov. 1891, Z. 104.	50	—
20	Brendzan Theophil	VI a	Kaiser Franz Josef-Stipendium	Zuschr. d. löbl. Kaiser Franz-Josef-Vereines vom 22. Nov. 1891, Z. 104.	50	—
21	Mazioski (Faliboga) Elias . .	VI a	Gr.-or. Religionsfonds-Stipendium	Erl. d. hoh. k. k. Land.-Reg. vom 9. Dec. 1888, Z. 15969.	80	—
22	Kalmucki Alexander	VI a	Kaiser Franz-Josef-Stipendium	Zuschr. d. löbl. Kaiser Franz-Josef-Vereines vom 22. Nov. 1891, Z. 104.	50	—
23	Serfas Valerius .	VI a	Kaiser Franz-Josef-Stipendium	Zuschr. d. löbl. Kaiser Franz-Josef-Vereines vom 22. Nov. 1891, Z. 104.	50	—
24	Semaka Leon . .	VI b	Gr.-or. Religionsfonds-Stipendium	Erl. d. hoh. k. k. Land.-Reg. vom 9. Dec. 1888, Z. 15969.	80	—
25	Keschmann Romuald . . .	VII a	Kaiser Franz-Josef-Stipendium	Zuschr. d. löbl. Kaiser Franz-Josef-Vereines vom 22. Nov. 1891, Z. 104.	50	—

Post-Nr.	Name des Stipendisten	Classe	Benennung des Stipendiums	Datum und Zahl des Verleihungsdecretes	Jährlicher Betrag fl.	kr.
26	Migdal Anton .	VII a	Kaiser Franz-Josef-Stipendium	Zuschr. d. löbl. Kaiser Franz-Josef-Vereines vom 22. Nov. 1891, Z. 104.	50	—
27	Isopenko Nicolaus	VII b	Kaiser Franz-Josef-Stipendium	Zuschr. d. löbl. Kaiser Franz-Josef-Vereines vom 22. Nov. 1891, Z. 104.	50	—
28	Jech Leon . . .	VIII	Samborski'sches Stipendium	Note des löbl. Stadtmagistrates v. Czernowitz v. 19. Jänner 1887, Z. 29689.	60	—
29	Runes Jankel .	VIII	Kaiser Franz-Josef-Stipendium	Zuschr. d. löbl. Kaiser Franz-Josef-Vereines vom 22. Nov. 1891, Z. 104.	50	—
30	Schessan Anton .	VIII	Eleazar Sosnowiecz'sches Stipendium	Note d. hochw. gr.-or. erzbischöfl. Consist. v. 25. März (6. Apr.) 1891, Z. 832.	50	40
31	Woloschenko Basil	VIII	Elena v. Popovici'sches Stipendium	Zuschr. d. löbl. rumän. Societät in Czernowitz v. 25. April (7. Mai) 1892, Z. 71.	50	—
				Summe . . .	1917	04

B. Locales Unterstützungswesen.

I. Stand des Kaiser Franz-Josef-Vereins zur Unterstützung dürftiger Schüler des Gymnasiums am 31. December 1891.

1. Einnahmen und Ausgaben.

a) Einnahmen:

Post-Nr.	Art der Einnahmen	fl.	kr.
1	Cassarest vom Jahre 1890	93	62
2	Subvention des hohen bukowiner Landtages	100	—
3	Subvention der löblichen bukowiner Sparcasse	150	—
4	Zinsen der Wertpapiere	738	63
5	Herr Badian Wilhelm, Banquier	4	—
6	„ Baltinester Bernhard, k. und k. Hauptmann a. D.	4	—
7	„ Barber Jakob, Realitätenbesitzer	4	—
8	„ Dr. Beiner Jakob, Advocat	5	—
9	„ Branik Johann, k. k. Gymnasialprofessor a. D.	4	—
10	„ Brüll Richard, Inspector des k. k. Bahnbetriebsamtes	4	—
11	„ Brunstein A. M., Kaufmann	4	—
	Fürtrag . . .	1111	25

Post-Nr.	Art der Einnahmen	fl.	kr.
	Übertrag . . .	1111	25
12	Herr Bujor Theodor, k. k. Gymnasialprofessor	4	—
13	„ Czuntuliak Arthemius, k. k. Ober-Postverwalter	4	—
14	„ Czarnecki Michael, Ritter von, k. k. Landesgerichtsrath	4	—
15	„ Dr. Fechner Josef, Vice-Bürgermeister	4	—
16	„ Dr. Frank Josef, k. k. Gymnasialprofessor	4	—
17	„ Fürth Felix, Freiherr von, Stadtrath	4	—
18	Frau Goldner Rosa, Gutsbesitzerin in Chliwestie	4	—
19	Herr Dr. Goldenberg Max, Advocat	4	—
20	„ Graubart Hermann, Rentier	4	—
21	„ Hormuzaki Nikolaus, Freiherr von, Großgrundbesitzer	5	—
22	„ Dr. Igel Lazar, Landesrabbiner	6	—
23	„ Juszyński Andreas, k. k. Universitätsbuchhändler	6	—
24	„ Dr. Kochanowski Anton, Ritter von Stawczan, Bürgermeister	10	—
25	„ Dr. Kohn Julius, k. k. Finanzcommissär	4	—
26	„ Kudisch Jakob, Gutspächter in Jurkoutz	5	—
27	„ Kupczanko Gregor, Redacteur	20	—
28	„ Langenhan Friedrich, Bankdirector	4	—
29	„ Dr. Lazarus Josef, k. k. Sanitätsrath	4	—
30	„ Mayer Ignaz, Hotelier	10	—
31	„ Mikulicz Adalbert, k. k. Gymnasialprofessor	4	—
32	„ Mor Gabriel, Edler von, k. k. Gymnasialprofessor	4	—
33	Seine Eminenz der hochwürdigste Herr Dr. Sylvester Morariu-Andrievici, Erzbischof und Metropolit	4	—
34	Herr Neuntenfel Franz, k. k. Professor an der Staatsgewerbeschule	4	—
35	„ Dr. Paschkis Moriz, Advocat	4	—
36	„ Dr. Philipowicz Wladimir, Secundararzt	4	—
37	„ Popovici Eusebius, k. k. o. ö. Universitätsprofessor	4	—
38	„ Popper Heinrich, Reichsrathsabgeordneter	5	—
39	„ Dr. Přibram Richard, k. k. o. ö. Universitätsprofessor	10	—
40	„ Dr. Reiss Eduard, Advocat	4	—
41	„ Repta Basil von, Archimandrit, k. k. Universitätsprofessor	4	—
42	„ Rosenzweig Emanuel, Kaufmann	4	—
43	„ Rosenzweig Leon, Rentier	10	—
44	„ Dr. Rott Josef, Advocat	4	—
45	„ Skobielski Johann, k. k. Gymnasialprofessor	4	—
46	„ Dr. Strzelbicki Adolf, Advocat	4	—
47	„ Szankowski Ambros, k. k. Gymnasialprofessor	4	—
48	„ Tarnowiecki Epiphanias von, k. k. Gymnasialprofessor	4	—
49	„ Thenen Hirsch, Grossgrundbesitzer in Berlat (Rumänien)	10	—
50	„ Thüngen E., Freiherr von, k. und k. Oberst	10	—
51	„ Tittinger David, Rentier	5	—
52	„ Tittinger Naftali, Rentier	5	—
53	„ Tobiaszek Karl, Ehrendomherr und röm.-kath. Pfarrer	8	—
54	„ Dr. Topalla Jeronim, Archimandrit und Seminarrector	4	—
55	„ Dr. Wachtel Jakob, Advocat	5	—
56	„ Wagner Heinrich, Reichsrathsabgeordneter	200	—
57	„ Walter Richard, Fabriksbesitzer	4	—
58	„ Wisłocki Josef, k. k. Regierungsrath und Domänendirector	4	—
59	„ Wolf Stephan, k. k. Schulrath und Gymnasialdirector a. D.	4	—
60	„ Wolf Karl, k. k. Gymnasialprofessor	4	—
61	„ Würfl Christoph, k. k. Schulrath	10	—
62	„ Dr. Załoziecki Wladimir, k. k. Sanitätsrath	4	—
		1584	25

b) Ausgaben:

Post-Nr.	Art der Ausgaben	fl.	kr.
1	Stipendienbeträge	860	—
2	Handunterstützungen	206	—
3	Regieauslagen	31	99
4	Medicamentenrechnung	13	54
5	In der Sparcassa angelegt	310	—
		1421	53

c) Bilanz:

		fl.	kr.
	Bei einer Einnahme von	1584	25
	und einer Ausgabe von	1421	53
	verbleibt ein Cassarest von	162	72

2. Stand des Stammcapitals.

Dasselbe bestand am 31. December 1890 aus Wertpapieren im Nominalwerte von . . . 16390 fl. — kr.
dazu kam im Gegenstandsjahre (s. Ausgaben, Post 5) eine Sparcassa-einlage von . . . 310 „ — „

somit beträgt das Stammcapital am 31. December 1891 . . . 16700 fl. — kr.

Es stellt sich somit das Gesammtvermögen des Vereins am 31. December 1891 folgendermaßen dar:

a) Stammcapital (im Nominalwerte) von . . . 16700 fl. — kr.
b) Barer Cassarest . . . 162 „ 72 „

3. Vereinsausschuss.

Der Vereinsausschuss bestand im Jahre 1891 aus folgenden Mitgliedern:

1. Herr Chr. Würfl, Obmann.
2. „ A. Kochanowski, Ritter von Stawczan, Bürgermeister, Obmann-Stellvertreter.
3. „ E. v. Tarnowiecki, k. k. Professor, Secretär.
4. „ Dr. J. Frank, k. k. Professor, Cassier.
5. „ M. Calinescu, Archimandrit.
6. „ J. Mayer, Hotelier.
7. „ E. Rosenzweig, Kaufmann.
8. „ K. Tobiaszek, Ehrendomherr.
9. „ St. Wolf, k. k. Schulrath.

Als Rechnungsrevisoren fungierten die Herren: Dr. J. Fechner, Vicebürgermeister, und N. Tittinger, Banquier.

Die Generalversammlung für das Jahr 1891 wurde am 8. Mai 1892 im Magistratssaale abgehalten.

II. Schülerlade.

(Verwalter: Schulrath Chr. Würfl, Prof. Dr. J. Frank und Prof. C. Kozak.)

1. Cassabericht über das Schuljahr 1891/92.

a) Einnahmen:

Vom Herrn S. L.	30 fl.	— kr.
Vom Herrn I. J.	25 „	— „
Von den Schülern der IV. a Cl.: A. Grünfeld, G. Goldner und M. Eltes	7 „	— „
Ergebnis der statutenmäßigen Sammlungen, u. zw.: im I. Semester	202 „	10 „
im II. Semester	199 „	19 „
Cassarest vom Schuljahre 1890/91	228 „	31 „
Gesammteinnahme	691 fl.	60 kr.

Zu den im Voranstehenden ausgewiesenen Beträgen, die sich durch die im I. und II. Semester eingeleiteten Sammlungen ergaben, steuerten die einzelnen Classen in folgender Weise bei:

Classe	Im I. Semester		Im II. Semester		Ganzjähriger Beitrag	
	fl.	kr.	fl.	kr.	fl.	kr.
I. a	7	05	5	93	12	98
I. b	6	10	6	56	12	66
I. c	12	44	16	80	29	24
II. a	9	50	7	60	17	10
II. b	16	97	12	20	29	17
III. a	12	15	13	—	25	15
III. b	10	60	10	90	21	50
IV. a	10	88	14	—	24	88
IV. b	11	70	9	25	20	95
V. a	14	75	12	80	27	55
V. b	11	80	9	90	21	70
VI. a	15	—	15	80	30	80
VI. b	5	81	5	—	10	81
VII. a	6	90	6	20	13	10
VII. b	15	15	13	80	28	95
VIII.	35	30	39	45	74	75
	202	10	199	19	401	29

b) Ausgaben:

1. Unterstützungen für 70 Schüler	367 fl.	— kr.
2. Für 61 Lehrbücher für die Bibliothek der Schülerlade	63 „	31 „
3. Für 28 Büchereinbände	7 „	22 „
4. 34 Paar Turnschuhe für arme Schüler	23 „	31 „
5. 361 Badekarten für arme Schüler	54 „	15 „
6. Regieauslagen	— „	70 „
Gesammtausgabe	515 fl.	69 kr.

c) Bilanz:

Einnahmen	**691 fl. 60 kr.**
Ausgaben	**515 „ 69 „**
somit verbleiben . . .	**175 fl. 91 kr.**

als activer Cassarest, welcher gemäß § 3 der Statuten für den Beginn des nächsten Schuljahres für Unterstützungen reserviert bleibt.

2. Bücherstand der Schülerlade.

Am Schlusse des Schuljahres 1890/91 zählte die Bibliothek der Schülerlade	893 Bände.
Davon wurden als defect und infolge der Einführung neuer Lehrbücher als nicht mehr brauchbar ausgeschieden	62 „
Es verbleiben somit . . .	831 Bände.
Dazu kamen im Laufe des Schuljahres 1891/92 durch Schenkung:	
a) Von der Verlagshandlung Julius Klinkhardt in Wien	32 Bände.
b) Von der Verlagshandlung Alfred Hölder in Wien	37 „
c) Von der Gymnasialbibliothek übernommen	4 „
d) Von den Professoren C. Kozak und A. Lewandowski	4 „
e) Von den Schülern der Anstalt	14 „
Ferner wurden durch Kauf erworben	50 „
Es zählt demnach die Büchersammlung der Schülerlade gegenwärtig . .	972 Bände.

Im verflossenen Schuljahre wurden an 184 Schüler 622 Bücher geliehen.

III. Sonstige Unterstützungen.

Das hochwürdigste gr.-or. erzbischöfliche Consistorium übermittelte aus der zur Förderung des gr.-or. Choralgesanges für das Jahr 1891 bewilligten Subvention den Betrag von 200 fl. zur Vertheilung unter arme gr.-or. Schüler, die sich an dem gr.-or. Kirchengesange betheiligen und in demselben gute Fortschritte machen.

Der löbliche bürgerliche ruthenische Leseverein übermittelte den Betrag von 42 fl. zur Vertheilung unter arme Schüler ruthenischer Nationalität.

Die Frau J. Tomaszczuk spendete am Jahrestage des Ablebens ihres Sohnes Stephan den Betrag von 6 fl. für einen armen Schüler der obersten Classen.

All die genannten Beträge wurden im Sinne der edlen Spender ihrer Bestimmung zugeführt.

Mit besonderer Anerkennung verdient auch hervorgehoben zu werden, dass mehrere jugendfreundliche Ärzte kranke unbemittelte Schüler unentgeltlich behandelt haben und dass diesen zugleich von der Apotheke des Herrn Dr. Josef Barber die Medicamente unentgeltlich verabreicht worden sind.

VIII. Verfügungen der vorgesetzten hohen Behörden.

1. H. Min. Erl. v. 17. Juni 1891, Z. 9193. — H. L. Sch. R. Erl. v. 18. Juli 1891, Z. 1504. (Auszugsweise:) Die Lehrpläne und Instructionen für den Unterricht im Freihandzeichnen werden abgeändert. Die neuen Lehrpläne sowohl für Realschulen als auch für Gymnasien sammt den bezüglichen Instructionen werden vom Schuljahre 1891/92 an für

die bezüglichen Lehranstalten zur genauen Darnachachtung vorgeschrieben und gleichzeitig die mit hoh. Min. Verordnung vom 9. August 1873, Z. 6708 und mit hoh. Min. Vdg. vom 6. Mai 1874, Z. 5815 erlassenen Lehrpläne und Instructionen, insofern sich dieselben auf Mittelschulen beziehen, sowie die Bestimmungen des hoh. Min. Erl. v. 27. October 1878, Z. 17276 außer Kraft gesetzt.

2. H. Min. Erl. v. 11. Juli 1891, Z. 14144. — H. L. Sch. R. Erl. v. 24. Juli 1891, Z. 1510. Die Bewilligung eines außerordentlichen Termins zur Ablegung einer Aufnahmsprüfung ist der Entscheidung des hohen k. k. Ministeriums für Cultus und Unterricht vorbehalten.

3. H. L. Sch. R. Erl. v. 5. August 1891, Z. 1776. (Auszugsweise:) Bei allen Eintragungen von Calcülen hat, falls dieselben nicht ganz und gar privater Natur sind, nur die mit dem hoh. Min. Erl. v. 2. März 1866, Z. 4634 ex 1865, beziehungsweise vom 9. März 1886, Z. 4452 vorgeschriebene Notenskala ausnahmslos zur Anwendung zu kommen.

4. H. Min. Erl. v. 1. März 1892, Z. 23250 ex 1891. — H. L. Sch. R. Erl. v 9. März 1892, Z. 68. Seine k. und k. Apostolische Majestät haben mit Allerhöchster Entschließung vom 26. October 1891 allergnädigst zu genehmigen geruht, dass zum Zwecke der Verleihung von Reisestipendien an Lehrpersonen der Mittelschulen für Studienreisen nach Italien und Griechenland ein Betrag von jährlich 10.000 fl. zunächst auf drei Jahre, vom Jahre 1893 angefangen, in den Staatsvoranschlag eingestellt werde.

Unter Voraussetzung der verfassungsmäßigen Bewilligung des erwähnten Credites werden diese Stipendien vom Ministerium für Cultus und Unterricht, und zwar zum erstenmale im Jahre 1893 verliehen werden.

Diese Reisestipendien sind für Lehrpersonen (Lehrer und Supplenten) an Mittelschulen bestimmt, welche in den Fächern der classischen Philologie oder Geschichte Unterricht ertheilen.

Sie bezwecken, den mit den didaktischen Bedürfnissen der Mittelschule schon vertrauteren Lehrern Gelegenheit zu geben, durch das Studium dieser wichtigsten alten Culturländer ihre berufliche Ausbildung zu erweitern und dadurch in höherem Grade befähigt zu werden, den Schülern das Verständnis für Geistes- und Culturleben der classischen Völker des Alterthums zu erschließen.

Solche Stipendien werden auf die Dauer des Sommersemesters einschließlich der Hauptferien für Reisen nach Italien oder Griechenland oder nach beiden Ländern verliehen und in der Regel mit je einem Betrage zwischen 800 und 1000 fl. bemessen. Die Stipendisten werden für das Sommersemester beurlaubt und bleiben im vollen Genusse ihrer normalmäßigen Bezüge.

Das Ministerium für Cultus und Unterricht wird unter Berücksichtigung der von dem Bewerber etwa besonders geäußerten Wünsche den Reiseplan der Stipendisten genehmigen.

Der Stipendist ist verpflichtet, nach Vollendung seiner Reise dem Ministerium für Cultus und Unterricht Bericht zu erstatten.

Bedingungen der Bewerbung um Verleihung eines solchen Stipendiums sind:

1. Die vollständige Lehrbefähigung für classische Philologie oder für Geographie und Geschichte;
2. eine mindestens dreijährige Verwendung als selbstständiger Lehrer an einer Mittelschule.

Dem Bewerbungsgesuche sind anzuschließen:

1. das curriculum vitae;
2. das Lehrbefähigungszeugnis;

3. die Qualificationstabelle sammt Verwendungszeugnissen;
4. wissenschaftliche Arbeiten, die der Bewerber etwa veröffentlicht hat oder zu veröffentlichen gedenkt.

Dem Bewerber steht es frei, in seinem Gesuche jene besonderen Zwecke anzugeben, welche er auf der Studienreise zu verfolgen beabsichtigt. Übrigens wird eine allgemeine Instruction für diese Reisen seinerzeit erlassen werden. — Die an das Ministerium für Cultus und Unterricht zu richtenden Bewerbungsgesuche sind auf dem vorgeschriebenen Dienstwege einzubringen, von der Direction und der Landesschulbehörde zu begutachten und im Jahre 1892 bis spätestens Ende Mai, in der Folge bis spätestens Ende April jedes Jahres dem hohen k. k. Ministerium vorzulegen.

5. H. Min. Erl v. 30. September 1891, Z. 1786 C. U. M. — H. L. Sch. R. Erl. v. 20. October 1891, Z. 2588. Weisungen, betreffend den Unterricht in den classischen Sprachen am Obergymnasium. (Auszugsweise:)

1. Die lateinischen und griechischen Hausarbeiten (Pensa) haben in den oberen Classen künftig zu entfallen. Die dadurch in der Schule freigewordene Zeit kann der Lectüre zugewendet werden, wo dies ohne Schaden für den grammatischen Unterricht möglich ist.
2. In jeder Oberclasse ist gegen den Schluss jedes Semesters sowohl im Lateinischen, als auch im Griechischen ein nicht gelesenes, geeignetes Stück aus dem Schulautor, mit welchem sich die Schüler hinreichend beschäftigt haben, ohne vorausgehende Vorbereitung und ohne Gestattung der Benützung von Hilfsmitteln zur Übertragung in die Unterrichtssprache als Composition zu geben, die wie jede andere Schularbeit von dem Lehrer zu corrigieren und censieren ist.

   Einschließlich dieser Schularbeit wird die Zahl der Compositionen für jede Oberclasse im Lateinischen auf fünf, im Griechischen auf vier im Semester festgesetzt.
3. Die Privatlectüre hat bei der Maturitätsprüfung insoferne Berücksichtigung zu finden, als jeder Schüler, welcher eine Privatlectüre wenigstens in dem Umfange, der etwa einem Jahrespensum der lateinischen, beziehungsweise griechischen Schullectüre entspricht, nachzuweisen imstande ist und welcher dadurch seinen Calcül verbessern zu können meint, zu ersuchen berechtigt sei, dass ihm auch eine Stelle aus seiner Privatlectüre vorgelegt werde.

6. Verordnung des hohen Gesammtministeriums vom 3. März 1892. — Erl. des hoh. k. k. Landespräsidiums vom 11. April 1892, Z. 1008. (Auszugsweise:) Auf Grund des Ergebnisses der letzten officiellen Volkszählung nach dem Stande vom 31. December 1890 wird in Abänderung des mit der Verordnung des hohen Gesammtministeriums vom 14. Mai 1873 kundgemachten Schemas für die Bemessung der Activitätszulagen der Staatsbeamten Czernowitz vom 1. Juli 1891 an aus der III. in die II. Classe der Activitätszulagen versetzt.

7. H. Min. Erl. v. 2. Mai 1892, Z. 1255. — H. L. Sch. R. Erl. v. 13. Mai 1892, Z. 1255. Es wurde ausnahmsweise gestattet, dass am Staatsgymnasium in Czernowitz wegen der an dem Gymnasialgebäude vorzunehmenden Adaptierungen das Schuljahr 1891/92 am 1. Juli schließe und das Schuljahr 1892/93 am 15. September beginne.

IX. Maturitätsprüfung.

1. Im Schuljahre 1891.

a) Im Sommertermin.

Im Nachhange zu den in dem vorjährigen Jahresberichte S. 61 f. enthaltenen Mittheilungen über die Maturitätsprüfung des Sommertermins 1891 seien hier noch folgende Daten nachgetragen.

Die mündliche Prüfung wurde vom 7. bis 11. Juli 1891 unter dem Vorsitze des Herrn k. k. Landes-Schulinspectors Dr. Wilhelm Vysloužil abgehalten.

	Öffentl. Schüler	Privatisten	Externe
Zur Prüfung haben sich gemeldet	44	1	3
Nach dem Ergebnis der schriftlichen Prüfung wurden reprobiert	5	—	—
Nach dem Ergebnis der Classification im II. Sem. wurden zur mündlichen Prüfung nicht zugelassen	3	—	—
Krankheitshalber konnten zur mündlichen Prüfung nicht erscheinen	1	—	1
Der mündlichen Prüfung unterzogen sich	35	1	2
Hierunter zum zweitenmale	—	—	1
Approbiert wurden: reif mit Auszeichnung	8	—	—
Approbiert wurden: reif	23	1	—
Reprobiert wurde (ohne Termin)	—	—	1
Zu einer Wiederholungsprüfung wurden zugelassen	4	—	1

b) Im Herbsttermin.

Die schriftliche Maturitätsprüfung wurde vom 21. bis 25. September 1891 abgehalten.

Themen für die schriftliche Maturitätsprüfung.

Aus dem Lateinischen:

Livius XXXI, 2: Eodem fere tempore P. Aelius — bis zum Ende.

Ins Lateinische:

Hemmerlings Übungsbuch Nr. 48.

Aus dem Griechischen:

Demosthenes, Friede § 13—17.

Deutscher Aufsatz:

Worin besteht die weltgeschichtliche Bedeutung des griechischen Volkes?

Mathematik:

1. $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{5}{\sqrt{xy}}$; $2 : \sqrt{x} = \sqrt{y} : 3$.

2. Wie viele Jahre hindurch kann jemand eine Rente von $1001\frac{1}{2}$ fl. beziehen, wenn er bar 10.000 fl. zahlt, die Zinsen mit 4% berechnet werden und der erste Rentenbezug ein Jahr nach der Einzahlung beginnt?

3. Die Fläche des Achsendreieckes eines geraden Kegels ist F (= 3420), der Neigungswinkel der Seitenfläche zur Grundfläche α (= 83° 57′ 28″). Wie groß sind der Mantel, die Oberfläche und das Volumen des Kegels?

4. Die Gleichung einer Parabel ist $y^2 = 10x$, die Gleichung einer Geraden: $y = \frac{x}{2} + 1$; es ist der Flächeninhalt des durch diese Gerade von der Parabel abgeschnittenen Segmentes zu berechnen.

Die mündliche Prüfung wurde am 28. September 1891 unter dem Vorsitze des Herrn k. k. Landes-Schulinspectors Dr. Wilhelm Vysloužil abgehalten.

	Öffentl. Schüler	Externe
Der schriftlichen Prüfung unterzogen sich	3	1
Hierunter aus einem Gegenstande	3	—
Nach dem Ergebnis derselben wurden reprobiert	—	—
Der mündlichen Prüfung unterzogen sich	7	3
Hierunter solche, die bloß aus einem Gegenstande die Prüfung wiederholten	4	1
Zum zweitenmale unterzogen sich der Prüfung	—	1
Approbiert wurden: reif mit Auszeichnung	—	—
Approbiert wurden: reif	7	2
Reprobiert wurde auf 1 Jahr	—	1

c) Verzeichnis der im Sommer- und Herbsttermine 1890/91 approbierten Abiturienten.

Post-Nr.	NAME	Geburtsort und Vaterland	Lebensalter. Jahre	Dauer der Gymn.-Stud. Jahre	Grad der Reife	Gewählter Beruf
1	Ebner Mayer . . .	Czernowitz, Bukowina	19	8	reif	Jus.
2	Feuerstein Michel .	Korolówka, Galizien	19	8	„	„
3	Feuersein Nuchim .	„ „	22	8	„	Medicin.
4	Gerbel Leonhard .	Czernowitz, Bukowina	18	8	„	„
5	German Lazar . .	Czudyn, Bukowina	19	8	„	Jus.
6	Góra Romuald . .	Sambor, Galizien	19	9	„	„
7	Gottlieb Aron . .	Czernowitz, Bukowina	17	8	„	„
8	R. v. Grigorcea Radu	Presekareni, Bukowina	20	9	„	„
9	Groß Josef	Zaleszczyki, Galizien	19	9	„	Medicin.
10	Hailig Victor . . .	Kimpolung, Bukowina	19	8	„	Jus.

Post-Nr.	NAME	Geburtsort und Vaterland	Lebensalter, Jahre	Dauer der Gymn.-Stud. Jahre	Grad der Reife	Gewählter Beruf
11	Halip Theodot . .	Woloka, Bukowina	18	8	reif	Jus.
12	Hendel Moses . .	Czernowitz, Bukowina	19	8	„	„
13	Hornstein Hersch .	Sereth, Bukowina	17	8	„	Medicin.
14	Hostiuc Gregor . .	Onuth, Bukowina	18	8	Auszeich.	Jus.
15	Igel Leon	Czernowitz, Bukowina	20	Exter.	reif	„
16	Illasiewicz Elias .	Berbestie, Bukowina	19	9	„	„
17	Jakob David . . .	Dorna-Watra, Bukow.	20	8	„	„
18	Krawec Stephan . .	Czernowitz, Bukowina	18	8	„	„
19	Lazarus Siegfried .	„ „	18	8	Auszeich.	Medicin.
20	Lisieniecki Gedymin	Stryj, Galizien	19	8	reif	Jus.
21	Luttinger Bernhard	Czernowitz, Bukowina	17	8	„	„
22	Malanczuk Stephan .	Hawrilestie, Bukowina	19	8	Auszeich.	Theologie.
23	Maschek Franz . .	Lemberg, Galizien	18	8	„	Jus.
24	Pantasie Gregor . .	Kosticzany, Bessarab.	19	9	reif	„
25	Perlstein Hersch .	Czernowitz, Bukowina	18	8	„	„
26	Rapf Thaddäus . .	Lisko, Galizien	18	8	„	„
27	Reininger Heinrich .	Czernowitz, Bukowina	18	8	Auszeich.	„
28	Rieber Pinches . .	„ „	18	8	reif	„
29	Rosenstock Fischel .	Zaleszczyki, Galizien	23	8	„	Handels-Akademie.
30	Roth Josef	Sereth, Bukowina	19	8	„	Jus.
31	Rozynek Adolf . .	Amstetten, Nied.-Öster.	20	9	„	Theologie.
32	Samuely Moses . .	Czernowitz, Bukowina	17	8	Auszeich.	Jus.
33	Seidner Moses . .	„ „	21	8	reif	Medicin.
34	Serwischer Nathan .	„ „	21	10	„	Jus.
35	Seweskul Johann .	Berbestie, Bukowina	21	8	„	Theologie.
36	Sobotkiewicz Augustin	Czernowitz, Bukowina	20	8	Auszeich.	Jus.
37	Stefanelli Claudius .	„ „	19	8	reif	„
38	Tauber Wolf . . .	Kosna, Siebenbürgen	21	8	„	„
39	Tomiuk Hippolyt .	Wassileu, Bukowina	20	10	„	Philosophie.
40	Turzański Martin .	Stecowa, Galizien	23	Exter.	„	Jus.
41	Worobkiewicz Alex.	Czernowitz, Bukowina	19	8	Auszeich.	„

2. Im Schuljahre 1892.

Zu der Maturitätsprüfung des Sommertermines 1892 haben sich sämmtliche 52 öffentliche Schüler und 2 Privatisten der VIII. Classe, ferner 4 Externisten gemeldet.

Die schriftliche Maturitätsprüfung wurde vom 16. bis 20. Mai 1892 abgehalten.

Themen für die schriftliche Maturitätsprüfung.

Übersetzung ins Lateinische:

Abtheilung A: Ostermanns Übungsbuch, 3. Theil, S. 130, § 3.
Abtheilung B: Ostermanns Übungsbuch, 4. Theil, S. 69, § 6.

Übersetzung aus dem Lateinischen:

Abtheilung A: Tacitus, Histor. I c. 15.
Abtheilung B: Cicero, De finibus bonorum et malorum II, c. 14, § 45.

Übersetzung aus dem Griechischen:

Abtheilung A: Xenophon, Memor. III, c. VI, 1—4.
Abtheilung B: Xenophon, Memor. III, c. IV, 1—4.

Deutsche Aufsätze:

Abtheilung A: Die Biene steht dem Feind so ritterlich,
Weil sie für sich nicht ist, sie fühlt ihr Volk in sich. Rückert.
Abtheilung B: Nichtswürdig ist die Nation, die nicht
Ihr Alles freudig setzt an ihre Ehre. Schiller.

Aufsatz in der rumänischen Sprache:

Pentru-ce aŭ progresatŭ occidentul Europeĭ în cultură și civilisațiune maĭ iute și maĭ departe decâtŭ orientul eĭ?

Aufsatz in der ruthenischen Sprache:

Чимъ оказуемъ поважане для рôднои мовы?

Aus der Mathematik:

Abtheilung A: 1. In einer geometrischen Reihe von 6 Gliedern ist die Summe der beiden mittleren Glieder gleich b (— 200), die Summe der beiden äußeren gleich c (— 6248). Wie heißt das erste Glied a und der Quotient q der Reihe?

2. Ein senkrechter Kegel und ein gleichseitiger Cylinder haben eine gemeinschaftliche Grundfläche und eine gleiche Oberfläche. Wie groß ist der Cubikinhalt des Kegels, wenn der Radius des Cylinders r (35·32) ist?

3. Die Mittellinie s_c eines Dreieckes, welche zur Seite c gehört, ist gleich 5 m und die beiden Winkel γ_1 und γ_2, welche sie mit den beiden andern Seiten a und b des Dreieckes bildet, sind bezw. gleich 36° 52′ 11·63″ und 53° 7′ 48·37″. Wie groß sind die Seiten und Winkel dieses Dreieckes?

4. Gegeben ist die Hyperbel $16x^2 - 7x^2 = 112$. Im Punkte $x_1 = 4$, $y_1 > 0$ sind Tangente und Normale construiert. Welche Länge haben die vier Bestimmungsgrößen?

Abtheilung B: 1. In einer geometrischen Reihe von 5 Gliedern ist die Summe der geraden Glieder gleich b (— 30), die Summe der ungeraden gleich c (63). Wie heißt das erste Glied a und der Quotient q der Reihe?

2. Ein gleichseitiger Kegel hat denselben Cubikinhalt, wie ein gerader gleichseitiger Cylinder. Die Oberfläche des Cylinders beträgt aber um 15 m² weniger als die des Kegels. Wie groß ist der Radius der Grundfläche des Kegels und der des Cylinders?

3. Die Summe der Höhe h eines gleichschenkligen Dreieckes und der zu einem Schenkel gehörigen Höhe h_1 desselben sei s (240), der Basiswinkel α (15° 40′ 30″). Wie groß sind die Seiten des Dreieckes und dessen Inhalt?

4. An einen Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = 100$ wird in einem Punkte, dessen Abscisse $x_1 = 6$ und dessen Ordinate positiv ist, eine Tangente gezogen; welchen Winkel bildet diese Tangente mit einer Geraden, welche durch die Punkte $x_2 = -5$, $y_2 = 0$, $x_3 = 3$, $y_3 = 4$ geht?

Die mündliche Maturitätsprüfung beginnt am 18. Juli; das Ergebnis derselben wird in dem Jahresberichte des nächsten Schuljahres bekannt gegeben werden.

X. Chronik.

Die Aufnahmsprüfungen für die I. Classe wurden am 15., 16. und 17. Juli (erster Termin), ferner am 29., 31. August und am 1. September (zweiter Termin) 1891 abgehalten. Zu denselben waren 238 Schüler erschienen, von denen 192 aufgenommen wurden. Die Aufnahmsprüfungen für die übrigen Classen, ferner die Wiederholungs- und Nachtragsprüfungen wurden vom 1. bis 3. September 1891 abgehalten. Das h. Geistamt fand am 4. September um 9 Uhr statt; nachmittags begann sodann der regelmäßige Unterricht.

Der Lehramtscandidat Dr. Raimund Friedr. Kaindl wurde zufolge h. Min. Erl. v. 17. August 1891, Z. 17545 dem hierortigen Staatsgymnasium zur Ablegung des Probejahres zugewiesen und dem Berichterstatter zur Einführung in das Lehramt zugetheilt.

Der Supplent Gerasim Buliga wurde auf sein Ansuchen zufolge h. L. Sch. R. Erl. v. 20. August 1891, Z. 1849 in gleicher Eigenschaft an das gr.-or. Obergymnasium in Suczawa versetzt. Derselbe hinterließ wegen des Pflichteifers, den er jederzeit bethätigte, wie nicht minder wegen seines biederen, anspruchslosen Wesens bei Collegen und Schülern das beste Andenken.

Am 7. September starb der gänzlich verwaiste Schüler der IV. B Classe Aurelian Schessan nach langem schweren Leiden; die Anstalt gab dem so früh Verblichenen am 9. September das Geleite zur letzten Ruhestätte. Er ruhe sanft!

Der Supplent Stanislaus Schüller wurde zufolge h. Min. Erl. v. 15. September 1891, Z. 19793 zum wirklichen Lehrer am Staatsgymnasium in Krems ernannt. Derselbe hat zwar nur ein Jahr an der hierortigen Anstalt gewirkt, hat aber gleichwohl in dieser kurzen Zeit durch seine gewissenhafte Pflichterfüllung, wie durch sein bescheidenes, einnehmendes Wesen sich die volle Achtung seiner Berufsgenossen und die Liebe und Anhänglichkeit seiner Schüler erworben.

Zufolge h. L. Sch. R. Erl. v. 24. September 1891, Z. 2035 wurden die Supplenten des gr.-or. Obergymnasiums in Suczawa, Andreas Mock und Victor Nussbaum, in gleicher Eigenschaft für die hierortige Anstalt bestellt.

Der 4. October und der 19. November, die Namensfeste Ihrer k. und k. Apostolischen Majestäten, waren Ferialtage und wurden mit einer Kirchenfeierlichkeit begangen.

Se. k. und k. Apostolische Majestät haben mit Allerhöchster Entschließung vom 18. October 1891 vorbehaltlich der verfassungsmäßigen Bewilligung der erforderlichen Mittel allergnädigst zu genehmigen geruht, dass mit Beginn des Schuljahres 1892/93 beim hierortigen Staatsgymnasium eine neue Lehrstelle systemisiert werde. — Zufolge h. Min. Erl. v. 14. Jänner 1892, Z. 650 wurde genehmigt, dass diese Stelle für Naturgeschichte als Hauptfach, Mathematik und Physik als Nebenfächer zur Besetzung gelange.

Am 21. October erfolgte durch die Herren: Stadtrath Baron F. Fürth, Bauadjunct M. Birkenthal, Official J. Ritt. v. Charzewski als Vertreter der löbl. Stadtgemeinde Czernowitz die Übergabe des für die Erweiterung des Gymnasialgebäudes

gewidmeten Baugrundes an die Vertreter der hohen Regierung: Herrn k. k. Ingenieur L. Beill und den Berichterstatter. Am 3. November fand sodann in Anwesenheit des administrativen und ökonomischen Referenten im hoh. Landesschulrathe, des Herrn k. k. Reg.-Rathes Josef Kochanowski, des Herrn k. k. Oberbaurathes A. Pawłowski, des Herrn k. k. Ingenieurs L. Beill, des Herrn Stadtbaumeisters A. Liopold und des Berichterstatters die Grundsteinlegung zu dem Zubau statt. Werden auch durch diesen Zubau, sowie durch die Adaptirungen an dem alten Schulgebäude nicht alle berechtigten Wünsche ihre Berücksichtigung finden, so werden denn doch die erweiterten Räume, verbunden mit einer zweckentsprechenden inneren Ausstattung, die Anstalt aus der unnatürlichen Einengung befreien, in der sie sich solange zu ihrem Nachtheile befand.

Se. Excellenz der Herr Minister für Cultus und Unterricht hat laut hoh. Erlasses vom 11. November 1891, Z. 23519 den Professor Adalbert Mikulicz in die VIII. Rangsclasse befördert.

Dem Badehausbesitzer Nikolaus Agopsowicz wurde mit Rücksicht darauf, dass derselbe den Preis der Dampfbäder für Schüler bedeutend ermäßigt und in vielen Fällen selbst die unentgeltliche Benützung seiner Badeanstalt gestattet hat, wodurch es ermöglicht wurde, den Intentionen des hoh. Min. Erl. v. 15. September 1890, Z. 19097 betreffend die Gesundheitspflege bei der Schuljugend, auch nach dieser Richtung hin besser Rechnung zu tragen, vom hoh. k. k. Landesschulrathe mit Erlass vom 16. December 1891, Z. 2792 die belobende Anerkennung für sein humanes und schulfreundliches Wirken ausgesprochen.

Der provisorische Turnlehrer der hierortigen Anstalt Ladislaus Gwiazdomorski wurde zufolge hoh. Min. Erl. v. 21. Jänner 1892, Z. 993 zum wirklichen Turnlehrer an der hierortigen gr.-or. Oberrealschule mit der Verpflichtung ernannt, auch den Turnunterricht am hierortigen Gymnasium innerhalb der gesetzlichen Lehrverpflichtung zu ertheilen. — Gleichzeitig hat das hohe k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht angeordnet, dass der definitive Turnlehrer an der hierortigen k. k. Lehrer- und Lehrerinnen-Bildungsanstalt Franz Grillitsch neben dem Turnunterrichte an den letztgenannten Anstalten noch einen Theil dieses Unterrichtes an der hierortigen Anstalt zu übernehmen habe.

Das erste Semester schloss am 30. Jänner mit der Zeugnisvertheilung; das zweite begann am 3. Februar.

Professor Dr. Adalbert Wachlowski.

Am 2. Februar starb nach jahrelangem schweren Siechthume der Professor Dr. Adalbert Wachlowski im 46. Lebensjahre; in ihm wurde seiner Familie ein guter Vater, unserer Anstalt ein ausgezeichneter Lehrer, der Wissenschaft ein tüchtiger Jünger entrissen. Der Verblichene wurde am 22. Jänner 1846 zu Czernowitz geboren. Die Gymnasialstudien legte er in seiner Heimatstadt und in Lemberg mit glänzendem Erfolge zurück, worauf er die Universität in Wien bezog, um sich daselbst für das Lehramt an der Mittelschule vorzubereiten; im Jahre 1870 wurde er aus der Mathematik und Physik für das ganze Gymnasium approbiert, und im Jahre 1874 erlangte er die philosophische Doctorswürde. 1870 wurde er zum Supplenten am Staatsgymnasium des h. Hyacinth in Krakau bestellt, 1871 zum wirklichen Lehrer am Staatsgymnasium in Bielitz ernannt und im Jahre 1877 an die hierortige Anstalt versetzt; den Dienst an derselben trat er jedoch erst im Schuljahre 1878/79 an. Im Jahre 1889 wurde er in die VIII. Rangsclasse

befördert. 14 Jahre hat Prof. Wachlowski unermüdlich und segensreich an unserer Anstalt gewirkt und selbst, als seine Kraft in den letzten Jahren durch ein schweres, immer weiter um sich greifendes Leiden zum guten Theile schon gelähmt war, hat er, von regstem Pflichteifer erfüllt, seine ihm so lieb gewordene Lehrthätigkeit noch fortgesetzt, bis er am 5. November v. J. aufs Krankenlager sank, von dem ihn erst der Tod erlösen sollte. Die Trauernachricht von seinem Hinscheiden hat nicht verfehlt, in weiten Kreisen die innigste Theilnahme zu erwecken: erfreute sich ja der Verstorbene der vollsten Beliebtheit und Wertschätzung aller seiner Collegen, denen er jederzeit ein bewährter Genosse war, der Liebe und Anhänglichkeit seiner Schüler, deren aufrichtiger und wohlwollender Freund er war, und genoss er ja als Fachmann einen Ruf, der seinen Namen weit über die Grenzen unseres engen und weiteren Vaterlandes hinaus geachtet machte. Von seiner reichen Begabung, von seinem vielseitigen und tiefen Wissen, wie nicht minder von seiner regen Schaffenslust zeugt neben den gründlichen Studien, die er auf den verschiedensten Wissensgebieten erfolgreich trieb, vor allem die stattliche Zahl gediegener Arbeiten, die er in Programmen, sowie in in- und ausländischen Fachzeitschriften veröffentlichte. Es sind dies: 1. Über das Potential und dessen Anwendung. Bielitz 1874. 2. Über das Radiometer. Czernowitz 1880. 3. Zur Klimatologie von Czernowitz. Czernowitz 1886. 4. Über die Anwendung des Potentials auf elektrostatische Probleme. Akademieberichte in Krakau. 5. Über die Hagelverhältnisse in der Bukowina. Berichte der Wiener Akademie der Wissenschaften 1887. 7. Über die Niederschlagsverhältnisse in der Bukowina. Deutsch-österreich. Zeitschrift für Meteorologie 1887. 7. Zur Gymnasialfrage. Zeitschrift f. d. österr. Gymnasien 1885. 8. Bemerkungen zu den Instructionen über den physikalischen Unterricht. Berliner Zeitschr. zur Förderung des physikalischen Unterrichtes 1885. 9. Studien über die Erziehung an Gymnasien und Realschulen. Wien 1889. Verlag von Pichlers Witwe. Und die letzte Arbeit, die wir seinem rastlos thätigen Geiste verdanken, ist die Herausgabe der „Bilder aus der Geschichte der Physik" von Dr. E. Netoliczka. Wien und Leipzig 1891. Verlag von Pichlers Witwe. Netoliczka war während der Arbeit an diesem trefflichen Werke vom Tode ereilt worden; Wachlowski, selbst todtkrank, übernahm auf den Wunsch des Verlegers die Vollendung und die Durchsicht des zurückgelassenen Manuscriptes.

Die Beerdigung des seinem Wirkungskreise allzufrüh Entrissenen fand am 4. Februar unter einer äußerst starken Betheiligung der hiesigen Unterrichtsanstalten, der Behörden sowie zahlreicher Kreise der Bevölkerung von Czernowitz statt; ja selbst aus der Ferne war mancher Freund herbeigeeilt, um dem Verewigten das Geleite auf seinem letzten Gange zu geben. Am offenen Grabe sprach, bevor der mit den prächtigsten Blumenspenden ganz überdeckte Sarg in die Tiefe gesenkt wurde, Prof. Dr. J. Frank im Namen der Berufsgenossen, der Schüler der VIII. Cl. C. v. Mogilnicki im Namen der Schüler in tiefempfundenen Worten des Dankes, der Verehrung, der Liebe, aber auch des Schmerzes den letzten Abschiedsgruß.

Sein Andenken wird bei seinen Collegen, bei seinen Schülern, bei seinen Freunden und bei allen, die die Vorzüge seines Geistes und seines Herzens kennen zu lernen Gelegenheit hatten, in Ehren fortleben.

Er ruhe sanft!

Landesrabbiner Dr. Lazar Igel.

In verhältnismäßig kurzer Zeit wurde unsere Anstalt von einem zweiten Trauerfalle betroffen. Am 25. März l. J. starb, im Leben geehrt, im Tode aufrichtig betrauert von allen, die ihn kannten, der Landesrabbiner Dr. Lazar Igel, der seit dem Jahre 1854 als mos. Religionslehrer mit dem größten Berufseifer an unserer Anstalt gewirkt hat, der selbst in den letzten Wochen seines friedlichen, von edler Selbstlosigkeit verklärten Lebens, als seine Kraft schon gebrochen war, seinen Berufspflichten noch mit bewunderungswürdiger Hingebung nachzukommen suchte.

Dr. L. Igel wurde am 28. Februar 1825 zu Lemberg geboren. Nachdem er das Gymnasium absolviert und die philosophischen Studien beendet hatte, trat er 1849 in das bestandene k. k. Collegio rabbinico in Padua ein, wo er seine rabbinischen Studien zum Abschluss brachte und zum Doctor der mos. Theologie promoviert wurde. Zufolge hoh. Min.-Erl. v. 16. März 1850, Z. 2011/241, wurde er zum Docenten für hebräische und aramäische Dialekte an der Universität und zugleich zum Religionslehrer an den Mittelschulen in Lemberg ernannt. Im Jahre 1853 wurde er als Oberrabbiner nach Czernowitz berufen und im nächsten Jahre zufolge hoh. Min.-Erl. v. 16. December 1854, Z. 16879, zum Religionslehrer am hierortigen Staatsgymnasium bestellt; in dieser Stellung wirkte er unermüdlich als treuer Berather seiner Gemeinde und als wohlwollender väterlicher Freund seiner Schüler bis zu seinem Tode. Die edlen Eigenschaften, die den Verstorbenen zierten, seine Herzensgüte, sein Wohlwollen, seine Menschenliebe, seine milde wahrhaft humane Gesinnung, sein bescheidenes, urbanes Wesen, seine vielseitige Bildung, die Gewissenhaftigkeit, mit der er die Pflichten seines Amtes zu erfüllen jederzeit bestrebt war, verschafften ihm weit über den Kreis seiner Glaubensgenossen hinaus ungetheilte Achtung und Verehrung. Sein patriotisches und gemeinnütziges Wirken wurde auch von Sr. Majestät durch Verleihung des goldenen Verdienstkreuzes anerkannt. Das am 27. März stattgefundene Leichenbegängnis gestaltete sich zu einer imposanten Trauerkundgebung aller Kreise der hiesigen Bevölkerung. Die Schüler unserer Anstalt schritten, geführt von dem Lehrkörper, dem Zuge voran, dem eine unübersehbare Menschenmenge nachfolgte. Am Grabe widmete der Schüler der VIII. Classe M. E. Brodfeld dem guten unvergesslichen Lehrer einen warm empfundenen Nachruf.

Er ruhe in Frieden!

Der Realschul-Lehramtscandidat David Mader wurde zufolge der hoh. L. Sch. R. Erlässe vom 5. Februar 1892, Z. 157 und vom 7. März 1892, Z. 600 an Stelle des verstorbenen Prof. Dr. A. Wachlowski für den Rest des I. Schuljahres zum Supplenten an der hierortigen Anstalt ernannt. — Zufolge hoh. L. Sch. R. Erl. v. 16. April 1892, Z. 906 wurde derselbe für den Rest des I. Schuljahres auch mit der Ertheilung des mosaischen Religionsunterrichtes betraut.

Der supplierende gr.-kath. Religionslehrer Nikolaus Ogonowski, der auf eigenes Ansuchen eine andere Bestimmung erhalten hat, wurde in Gemäßheit des hoh. L. Sch. R. Erl. v. 18. März 1892, Z. 735, seiner Dienstleistung an der h. o. Anstalt am 20. März l. J. enthoben. Derselbe hat 14 Jahre mit vollem Berufseifer als Katechet an der Anstalt gewirkt. Collegen und Schüler sahen den allgemeiner Beliebtheit sich erfreuenden Amtsgenossen und Lehrer nur mit innigem Bedauern aus ihrer Mitte scheiden.

Zufolge hoh. L. Sch. R. Erl. v. 16. April 1892, Z. 773 wurde der gr.-kath. Pfarrcooperator Johann Porajko zum supplierenden gr.-kath. Religionslehrer an der hierortigen Anstalt ernannt. Derselbe trat seinen Dienst am 5. Mai 1892 an.

Am 1. Juni hatte eine Abordnung des Lehrkörpers, bestehend aus den Professoren A. Szankowski, G. v. Mor, St. v. Repta, J. Bumbacu, J. Stefanelli, L. Schweiger und dem Berichterstatter, im Vereine mit Abordnungen anderer hierortiger höherer Lehranstalten die Ehre, den neuen Herrn k. k. Landespräsidenten Baron Franz Krauß begrüßen zu können. Bei dem äußerst freundlichen Empfange, dessen sich die Erschienenen zu erfreuen hatten, erkundigte sich hochderselbe mit lebhaftem Interesse um die hiesigen Schulverhältnisse, hob mit Nachdruck den Wert der wahren Bildung gegenüber der in unseren Tagen sich immermehr breit machenden Halbbildung, die geradezu eine Gefahr für die bestehende staatliche und gesellschaftliche Ordnung bedeute, hervor und versprach, jede Anstalt in ihrem Wirken kräftigst unterstützen zu wollen.

Am 3. Juni beehrte der hohe Herr Landeschef den Berichterstatter in der Directionskanzlei mit seinem Besuche.

Am 29., 30. Mai und am 3. Juni inspicierte der Ordinariatscommissär, Herr Canonicus Karl Tobiaszek, den röm.-kath. Religionsunterricht in mehreren Classen des Unter- und Obergymnasiums.

Die röm.-kath. Schüler wurden dreimal, die gr.-or. und gr.-kath. zweimal zur h. Beicht und Communion geführt. Die österlichen Exercitien wurden vom 9. bis 11. April abgehalten.

Um den Schwierigkeiten, die sich hierorts bei dem Kirchenbesuche während der kalten Jahreszeit alljährlich ergeben, wenigstens theilweise zu begegnen, wandte sich der röm.-kath. Religionslehrer Leopold Schweiger mit der Bitte an den hohen k. k. Landesschulrath, in einem Classenzimmer der Anstalt einen verschließbaren Altar aufstellen zu dürfen. Zufolge hoh. L. Sch. R. Erl. v. 1. Februar 1892, Z. 176 wurde dem gestellten Ansuchen Folge gegeben und laut Note des hochwürdigsten röm.-kath. Metropolitan-Consistoriums in Lemberg vom 27. April 1892, Z. 1649 wurde von Seite des h. Stuhles auf die Dauer von 10 Jahren die Erlaubnis ertheilt, an diesem Altare an Sonn- und Feiertagen die h. Messe für die katholische Jugend lesen zu dürfen. Zufolge hoh. Land. Reg. Erl. v. 16. Februar 1892, Z. 2355 wurde dem obgenannten Religionslehrer die Bewilligung zur Sammlung freiwilliger Spenden bei bekannten Wohlthätern im Bereiche der Stadtgemeinde Czernowitz auf die Dauer von vier Monaten ertheilt. Das Ergebnis der eingeleiteten Sammlung war ein recht erfreuliches: Seine Excellenz der hochwürdigste Herr röm.-kath. Erzbischof und Metropolit von Lemberg Dr. Ritter v. Morawski übersandte in hochherziger Weise den namhaften Betrag von 100 fl.; außerdem wurde von zahlreichen Gönnern der studierenden Jugend für den bezeichneten Zweck der Betrag von 497 fl. 10 kr. gespendet; ferner wurden mehrere wertvolle Altargegenstände und Messgewänderstücke von Sr. Eminenz dem hochw. Herrn Cardinal-Fürstbischof von Krakau A. Dunajewski, von dem hochw. Herrn Consistorialkanzler in Lemberg Dr. T. Weber, von dem Herrn Badehausbesitzer N. Agopsowicz, von dem hiesigen Bürger, Herrn V. H. Skrzycki, von dem Herrn Katecheten L. Schweiger und von dem Frl. Hailig geschenkt. — Der Altar, der nach den Zeichnungen des k. k. Professors der hierortigen Staatsgewerbeschule, Herrn K. Romstorfer, der dieselben unentgeltlich lieferte, ausgeführt wurde, ist bereits fertiggestellt und wird im nächsten Schuljahre seiner erhabenen Bestimmung zugeführt werden.

Das Schuljahr wurde anlässlich der an dem Schulgebäude vorzunehmenden Adaptierungen bereits am 1. Juli mit einem Dankamte und der darauf folgenden Zeugnisvertheilung geschlossen.

XI. Förderung der körperlichen Ausbildung und Gesundheitszustand der Schuljugend.

Den Bestimmungen des hoh. Min. Erl. v. 15. September 1890, Z. 19097 gemäß wurde am 27. October 1891 eine Conferenz sämmtlicher Mitglieder des Lehrkörpers abgehalten, in welcher die Anordnungen, die in dieser Beziehung in dem vorangehenden Jahre getroffen und die Erfahrungen, die dabei gemacht worden sind, einer Erörterung unterzogen wurden und zugleich berathen wurde, ob und welche neuen Verfügungen in dieser Hinsicht noch zu treffen wären. Zunächst wurde darauf Bedacht genommen, dass die Schüler, insbesondere die ärmeren, auch während der ungünstigen Jahreszeit Gelegenheit hätten, öfter ein Bad zu nehmen. Der Besitzer des Sophienbades, Herr Nik. Agopsowicz, stellte wieder mit anerkennungswerter Bereitwilligkeit sein Dampfbad während des ganzen Winters jeden Mittwoch nachmittags für Schüler der Anstalt gegen den Eintrittspreis von 15 kr. zur Verfügung; außerdem gewährte derselbe eine große Anzahl von Freikarten für unbemittelte Schüler. Mit Circulandum vom 30. September 1891 wurden die Schüler hievon in Kenntnis gesetzt und unter Hervorhebung der Bedeutung der Bäder für die Erhaltung und Kräftigung der Gesundheit in ihrem eigenen Interesse aufgefordert, von dieser Begünstigung einen recht ausgiebigen Gebrauch zu machen. Die Frequenz des Sophienbades erreichte in der Zeit vom 7. October 1891 bis zum 18. Mai 1892 die Ziffer von 1197 (I. a 127, I. b 150, I. c 243, II. a 73, II. b 91, III. a 98, III. b 146, IV. a 33, IV. b 62, V. a 17, V. b 81, VI. a 9, VI. b 35, VII. a 12, VII. b 16, VIII. 4). Einzelne Schüler, besonders aus den höheren Classen, besuchten auch andere Badeanstalten; doch liegen hierüber keine verlässlichen Daten vor. — In der warmen Jahreszeit, vom Ende Mai angefangen, badeten zahlreiche Schüler im Pruthflusse und in den in der Nähe der Stadt gelegenen Teichen; in der Militärschwimmschule erhielten sie auch gegen einen auf drei Gulden herabgesetzten Preis Schwimmunterricht. Um Unglücksfällen, insbesondere in dem stellenweise nicht ungefährlichen Pruthflusse thunlichst vorzubeugen, wurde die bezügliche Kundmachung des löbl. Stadtmagistrates am schwarzen Brette angeschlagen und den Schülern durch ein Circulandum die Befolgung der getroffenen behördlichen Anordnungen nachdrücklichst eingeschärft.

Am Schlittschuhlaufen betheiligten sich die Schüler gleichfalls in großer Anzahl. Eine Begünstigung konnte jedoch den Schülern bloß bei dem Besuche des Eisplatzes des hierortigen Eislaufvereins erwirkt werden: laut Zuschrift des löbl. Ausschusses des genannten Vereins v. 31. December 1891 wurde den Schülern, wie im Vorjahre, die unentgeltliche Benützung des Vereins-Eisplatzes an Sonn- und Feiertagen vormittags von 8—$\frac{1}{2}$12 Uhr gestattet.

Das Bestreben, in den Besitz eines eigenen Spielplatzes zu gelangen, war auch in diesem Jahre von keinem Erfolge begleitet. Auf eine von der Direction an den löbl. Stadtmagistrat gerichtete Note hin erfolgte zwar am 6. October 1891 durch die Herren Stadtrath Baron Felix Fürth, Bauadjunct M. Birkenthal, die Professoren Dr. Frank, E. v. Tarnowiecki und den Berichterstatter eine commissionelle Besichtigung mehrerer freier Plätze, doch erwiesen sich dieselben für den beabsichtigten Zweck als ganz ungeeignet. So konnte sich die Pflege der Jugendspiele nur in engeren Grenzen bewegen und dies umsomehr, als auch der Schulhof in diesem Jahre infolge des Um- und Zubaues des Gymnasialgebäudes nicht einmal aushilfsweise für diesen Zweck benützt werden konnte. Die Spielübungen wurden hauptsächlich auf der Roscher Hutweide, die wegen ihrer geringen Entfernung von der Anstalt, sowie wegen ihrer freien, gesunden Lage sich hiefür noch am besten empfahl, vorgenommen.

Eine größere Aufmerksamkeit wurde sodann weiteren Spaziergängen und größeren Marschübungen zugewendet, u. zw. wurden dieselben theils abwechselnd mit einzelnen Classen, theils mit mehreren zusammen an schönen Herbst- und Frühlingstagen nachmittags um 4 oder 5 Uhr unter der Führung von Mitgliedern des Lehrkörpers (insbesondere der Professoren Dr. J. Frank, E. v. Tarnowiecki und der suppl. Lehrer A. Mock und V. Nussbaum) unternommen; am 30. April fand nachmittags um 3 Uhr ein gemeinsamer Ausflug sämmtlicher Schüler nach dem circa 1 Stunde entfernten Horeczer Wäldchen statt. Die Theilnahme an den Spielen, sowie an den Excursionen war jedem frei gestellt; gleichfalls war die Betheiligung, insbesondere von Seite der unteren Classen, jedesmal eine recht rege.

Es soll hier auch nicht unerwähnt bleiben, dass die Idee der Jugendspiele hierorts überhaupt auf einen fruchtbaren Boden gefallen ist; es hat sich in diesem Jahre ein eigener Verein für Jugendspiele gebildet, der den löblichen Zweck verfolgt, das leibliche Wohl der Schuljugend durch Erwerbung von gesund gelegenen Spielplätzen, durch Schülerausflüge, durch Arbeiten in vom Vereine zu erwerbenden Gärten, durch Errichtung von Schwimm- und Badeanstalten, durch Gewinnung von Eisbahnen und dgl. zu fördern. Möge es diesem Vereine gegönnt sein, mit der Zeit ähnliche Erfolge zum Wohle der Jugend zu erzielen, wie sie einzelne Vereine dieser Art in Deutschland bereits gegenwärtig aufzuweisen in der Lage sind.

Schließlich sei noch erwähnt, dass den schulhygienischen Anforderungen auch sonst nach Thunlichkeit Rechnung getragen wurde, dass insbesondere auf eine möglichst oftmalige und gründliche Lüftung und, was bei einem alten und räumlich unzulänglichen Gebäude doppelt schwer, aber auch doppelt nothwendig ist, auf die Reinhaltung aller Schullocalitäten gesehen, dass den Schülern bis zum Beginne der Bauarbeiten am Schulgebäude die Möglichkeit geboten wurde, das Respirium um 10 Uhr in dem ziemlich geräumigen Schulhofe zuzubringen, dass dieselben zur Pflege der Reinlichkeit des Körpers, der Kleidung angehalten wurden, und dass bei passenden Gelegenheiten, die sich beim Unterrichte und auch sonst ergaben, auch auf ihr Verhalten außerhalb der Schule und auf ihre ganze Lebensweise belehrend einzuwirken gesucht wurde.

Der Gesundheitszustand war leider hierorts in dem verflossenen Winter im allgemeinen ein recht ungünstiger; die Influenza mit ihrem zahlreichen Gefolge von anderen Krankheiten und insbesondere einzelne Infectionskrankheiten hatten sich hier stark ausgebreitet, und unter diesen hatten zahlreiche Schüler, aber auch Lehrer und deren Familien viel zu leiden. Der Unterricht erlitt auf diese Weise zahlreiche und recht fühlbare Störungen.

Für die Beurtheilung der Pflege der körperlichen Ausbildung und des sanitären Zustandes der hierortigen Schuljugend im abgelaufenen Schuljahre dürfte auch nachstehende Tabelle einige Anhaltspunkte bieten.

Classe	Schüler-zahl	Zahl der				Zahl der		Zahl der Infectionskrankheiten			
		Turner	Eisläufer	Schwimmer	in den Ferien auf dem Lande Wohnenden	Kurzsichtigen	Schwerhörigen	Influenza	Masern	Scharlach	Diphtheritis
I. a . .	54	37	18	14	27	7	7	11	2	3	1
I. b . .	48	30	18	12	17	1	2	10	1	3	—
I. c . .	64	54	20	21	27	11	3	18	3	1	—
II. a . .	58	36	19	26	29	6	1	19	1	1	3
II. b . .	55	37	11	21	26	3	2	11	—	3	4
III. a . .	60	27	25	25	17	4	3	11	1	1	—
III. b . .	61	41	40	23	37	5	7	30	2	—	—
IV. a . .	35	11	21	16	20	6	3	7	—	—	—
IV. b . .	34	13	8	16	16	1	1	5	1	—	1
V. a . .	31	4	12	12	32	2	5	6	—	—	3
V. b . .	33	11	18	7	10	8	—	7	—	—	1
VI. a . .	23	11	9	6	17	4	2	10	—	1	—
VI. b . .	27	12	11	20	18	3	—	2	—	—	—
VII. a . .	20	3	7	8	11	1	—	—	—	—	—
VII. b . .	32	11	15	12	14	4	—	9	—	1	—
VIII. . . .	52	5	12	24	24	13	1	13	—	—	—
Summe . .	687	343	264	263	342	79	37	169	11	14	13

XII. Statistik der Schüler.

(Die für die Privatisten geltenden Zahlen sind in der entsprechenden Columne den auf die öffentlichen Schüler bezüglichen Zahlen in kleiner Schrift rechts oben beigesetzt.)

	Classe																Zusammen
	I.			II.		III.		IV.		V.		VI.		VII.		VIII.	
1. Zahl.	a	b	c	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b		
Zu Ende 1890/91	46^{1}	38^{1}	43	67^{5}	71^{1}	47^{1}	37^{3}	34^{1}	40^{1}	29^{6}	37^{4}	25	32	34^{1}	24	44^{1}	648^{26}
Zu Anfang 1891/92	74	60	77	62	60	65	64	36	39	37	42	25	29	20	32	54	776
Während des Schuljahres eingetreten		1	1	—	2	1	1	1	—	2	—	—	—	—	—	2	11
Im ganzen also aufgenommen	74	61	78	62	62	66	65	37	39	39	42	25	29	20	32	56	787
Darunter neu aufgenommen, u. zw.:																	
Aufgestiegen	73	55	67	1	7	3	2	1	—	1	1	1	—	—	—	1	213
Repetenten	1	—	—	1	—	—	1	—	—	1	—	—	—	—	—	—	4
Wieder aufgenommen, u. zw:																	
Aufgestiegen	—	—	—	56	41	54	57	33	34	27	33	20	28	18	30	50	481
Repetenten	—	6	11	4	14	9	5	3	5	10	8	4	1	2	2	5	89
Während des Schuljahres ausgetreten	20	10	13	2	7	5	3	2	4	8	6	2	2	—	—	2	86
Schülerzahl zu Ende 1891/92	54	51	65	60	55	61	62	35	35	31	36	23	27	20	32	54	701
Darunter:																	
Öffentliche Schüler	54	48	64	58	55	60	61	35	34	31	33	23	27	20	32	52	687
Privatisten	—	3	1	2	—	1	1	—	1	—	3	—	—	—	—	2	14
2. Geburtsort (Vaterland).																	
Czernowitz	25	16^{1}	22^{1}	30	22	28	18	12	12	12	15^{3}	9	9	7	16	17^{1}	270^{6}
Bukowina außer Czernowitz	15	21^{2}	29	15^{2}	24	17^{1}	22	15	12^{1}	6	12	12	14	8	8	18^{1}	248^{7}
Galizien	7	10	7	6	6	10	11	5	7	9	3	1	3	4	7	14	110
Schlesien	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	1
Mähren	—	—	—	—	—	2	1^{1}	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3^{1}
Böhmen	1	—	—	—	—	—	1	—	—	1	—	—	1	—	—	—	4
Österreich unter der Enns	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
Ungarn	—	—	1	—	—	1	2	1	1	—	—	—	—	—	—	—	6

Siebenbürgen	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
Deutschland	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
Türkei	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
Russland	—	1	1		1	—	—	—	—	—	2	—	—	1	—	1	7
Rumänien	4	—	3	6	2	2	6	2	2	2	1	1	—	—	1	2	34
Summe	54	48[3]	64[1]	58[2]	55	60[1]	61[1]	35	34[1]	31	33[3]	23	27	20	32	52[2]	687[14]
3. Muttersprache.																	
Deutsch	30	23[3]	47[1]	34[1]	28	34[1]	38[1]	26	20	17	21[3]	13	9	12	19	33[2]	404[13]
Rumänisch	13	7	7	9[1]	9	11	9	3	4	5	4	5	8	5	6	7	112[1]
Ruthenisch	7	12	4	10	9	10	6	2	4[1]	4	4	4	5	—	4	6	91[1]
Polnisch	3	6	6	5	9	3	8	4	6	5	4	1	5	3	3	6	77
Tschechoslavisch	1	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
Ungarisch	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
Summe	54	48[3]	64[1]	58[2]	55	60[1]	61[1]	35	34[1]	31	33[3]	23	27	20	32	52[2]	687[14]
4. Religionsbekenntnis.																	
Katholisch des lat. Ritus	8	8[1]	12	8	13	7	13[1]	4	10	5	6[2]	2	6	6	4	4	116[3]
" " griech. Ritus	2	7	2	5	2	9	3	1	4[1]	4	1	1	1	—	2	5	49[1]
" " arm. Ritus	—	1	—	1	—	—	1	1	—	—	1	—	—	1	—	2	8
Gr. or. mit rum. Unterrichtssprache	11	6	5	7	9	10	8	3	4	5	4	5	9	5	6	7[2]	104[2]
" " " ruth. "	5	7	4	5[1]	7	3	4	1	1	-	3	3	3	—	2	1	49[1]
Evangelisch (Augsb. Conf.)	2	3	2	2	2	3	1	1	1	1	1	2	1	2	—	1	25
Mosaisch	26	16[2]	39[1]	30[1]	22	28[1]	31	24	14	16	17[1]	10	7	6	18	32	336[6]
Summe	54	48[3]	64[1]	58[2]	55	60[1]	61[1]	35	34[1]	31	33[3]	23	27	20	32	52[2]	687[14]
5. Lebensalter.																	
11 Jahre	10	14[1]	12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	36[1]
12 "	19	8[2]	15[1]	24	17	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	83[2]
13 "	8	5	16	13	13	14	20[1]	—	—	—	—	—	—	—	—	—	89[1]
14 "	12	14	11	11[1]	15	21	20	8	13	—	—	—	—	—	—	—	124[1]
15 "	3	3	7	4[1]	6	14	9	10	6[1]	11	10	—	—	—	—	—	83[2]
16 "	—	2	1	4	3	6	8	7	7	10	12[1]	10	9	—	—	—	79[1]

	Classe																Zusammen
	I.			II.		III.		IV.		V.		VI.		VII.		VIII.	
	a	b	c	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b		
17 Jahre	1	1	2	2	1	4^{1}	4	9	7	4	3^{2}	8	9	9	11	—	75^{8}
18 „	1	1	—	—	—	1	—	1	1	3	5	2	7	6	10	10^{1}	48^{1}
19 „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	3	2	1	1	6	16	31
20 „	—	—	—	—	—	1	—	—	—	1	—	—	—	3	4	12	21
21 „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1	5^{1}	7^{1}
22 „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	6	7
24 „	—	—	—	—		—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	2	3
25 „	—	—	—	—		—	—	—	—	—		—	—		—	1	1
Summe	54	48^{3}	64^{1}	58^{2}	55	60^{1}	61^{1}	35	34^{1}	31	33^{3}	23	27	20	32	52^{2}	687^{14}
6. Nach dem Wohnorte der Eltern.																	
Ortsangehörige	30	23^{1}	32^{1}	35	32	36	36^{1}	18	16^{1}	20	19^{2}	13	14	12	21	29^{2}	386^{8}
Auswärtige	24	25^{2}	32	23^{2}	23	24^{1}	25	17	18	11	14^{1}	10	13	8	11	23	301^{6}
Summe	54	48^{3}	64^{1}	58^{2}	55	60^{1}	61^{1}	35	34^{1}	31	33^{3}	23	27	20	32	52^{2}	687^{14}
7. Classification.																	
a) Zu Ende des Schuljahres 1891/92.																	
I. Fortgangsclasse mit Vorzug	1	5^{1}	1	5	4	3	2	2	3	1	1	1	4	2	—	1	36^{1}
I. Fortgangsclasse	33	32^{1}	47	39	42	42	37	28	24	17	21	20	17	12	22	44^{2}	477^{3}
Zu einer Wiederholungspr. zugelassen	4	3	5^{1}	8	2	6	7	3	3	6	3	2	4	4	5	6	71^{1}
II. Fortgangsclasse	9	6^{1}	5	4	4	7	11	2	3	6	6	—	1	2	5	—	71^{1}
III. Fortgangsclasse	5	2	6	2	3	2	3	—	1	1	2	—	1	—	—	—	28
Zu einer Nachtragsprüfung krankheitshalber zugelassen	2	—	—	0^{2}	—	0^{1}	1^{1}	—	0^{1}	—	0^{3}	—	—	—	—	1	4^{8}
Summe	54	48^{3}	64^{1}	58^{2}	55	60^{1}	61^{1}	35	34^{1}	31	33^{3}	23	27	20	32	52^{2}	687^{14}

***b)* Nachtrag zum Schuljahre 1890/91.**																	
Wiederholungsprüf. waren bewilligt	9	3	6	6	13	8	9	6	5	7^{1}	7	3	5	15^{1}	4	3	109^{2}
Entsprochen haben	7	3	5	5	8	8	9	6	4	4^{1}	4	2	5	15^{1}	4	1	90^{2}
Nicht entsprochen haben (oder nicht erschienen sind)	2	—	1	1	5	—	—	—	1	3	3	1	—	—	—	2	19
Nachtragsprüfungen waren bewilligt	—	0^{1}	—	1^{4}	—	0^{1}	1^{3}	0^{1}	0^{1}	0^{5}	0^{4}	—	—	—	—	3	5^{20}
Entsprochen haben	—	—	—	—	—	—	0^{3}	0^{1}	—	—	—	—	—	—	—	1	1^{4}
Nicht entsprochen haben	—	0^{1}	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	2^{1}
Nicht erschienen sind	—	—	—	0^{4}	—	0^{1}	1	—	0^{1}	0^{5}	0^{4}	—	—	—	—	1	2^{15}
Darnach ist das Endergebnis für 1890/91.																	
I. Fortgangsclasse mit Vorzug	2	6	1	5	2	1	4	3	1	1	4	3	1	—	1	8	43
I. Fortgangsclasse	31^{1}	26	30	49^{1}	54^{1}	33	26^{3}	25^{1}	32	19^{1}	24	16	30	33^{1}	21	30^{1}	479^{10}
II. Fortgangsclasse	8	1^{1}	8	8	13	10	5	2	6	7	8	6	1	1	2	5	91^{1}
III. Fortgangsclasse	5	5	4	5	2	3	1	4	1	2	1	—	—	—	—	—	33
Ungeprüft blieben	—	—	—	0^{4}	—	0^{1}	1	—	0^{1}	0^{5}	0^{4}	—	—	—	—	1	2^{15}
Summe	46^{1}	38^{1}	43	67^{5}	71^{1}	47^{1}	37^{3}	34^{1}	40^{1}	29^{6}	37^{4}	25	32	34^{1}	24	44^{1}	648^{36}
8. Geldleistungen der Schüler.																	
Das Schulgeld zu zahlen waren verpflichtet:																	
im 1. Semester	51	39^{11}	58	31^{2}	25	25^{4}	25^{1}	21	17	19^{1}	13^{1}	12	8	9	14	31^{4}	398^{11}
im 2. Semester	28	22^{3}	25^{1}	32^{2}	22	28^{1}	32^{1}	19	21^{1}	18	21^{3}	8	17	12	17	35^{2}	357^{14}
Zur Hälfte waren befreit:																	
im 1. Semester	—	—	—	1	—	2	—	1	2	—	1	—	—	—	1	1	9
im 2. Semester	—	2	2	—	—	2	—	2	1	1	1	1	—	—	—	—	12
Ganz befreit waren:																	
im 1. Semester	12	15	14	28	32	37	38	14	19	19	23	12	21	11	17	19	331
im 2. Semester	28	26	40	26	34	31	29	13	12	15	13	14	10	8	15	17	331
Das Schulgeld betrug im ganzen:																	
im 1. Semester	1020	800	1160	670	500	540	520	430	360	400	290	240	160	180	290	710	8270 fl.
im 2. Semester	560	500	540	640	440	580	640	400	430	370	430	170	340	240	340	740	7360 fl.
Zusammen	1580	1300	1700	1310	940	1120	1160	830	790	770	720	410	500	420	630	1450	15630 fl.

	Classe																Zusammen
	I.			II.		III.		IV.		V.		VI.		VII.		VIII.	
	a	b	c	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b		
Die Aufnahmstaxen betrugen	155·4	115·5	140·7	4·2	14·7	6·3	6·3	2·1	—	4·2	2·1	2·1	—	—	—	2·1	fl. 455·70
Die Lehrmittelbeiträge betrugen	74	58	78	60	61	65	64	36	38	39	39	25	29	20	32	56	„ 774·—
Die Taxen für Zeugnisduplicate betrugen		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	„ 33·—
Summe	229·4	173·5	218·7	64·2	75·7	71·3	70·3	38·1	38	43·2	41·1	27·1	29	20	32	58·1	fl. 1229·70 „ + 33·— fl. 1262·70
9. Besuch in den rel. obl. und nicht obligaten Gegenständen.																	
Rumänische Sprache	8	9	13	14	10	13	12	4	4	6	5	5	9	5	6	8	131
Ruthenische Sprache	9	14	4	10	10	10	6	2	5	4	4	4	4	—	4	6	96
Polnische Sprache I. Curs	5	5	4	6	7	1	4	4	2	—	—	—	—	—	—		38
„ „ II. Curs	—	—	—	—	—	3	4	3	—	2	5	—	5	4	—	4	30
Französische Sprache	—	—	—	—	—	1	1	1	5	1	3	6	—	—	1	—	19
Kalligraphie	45	44	52	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	141
Freihandzeichnen I. Curs	4	4	7	5	1	2	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	28
„ II. Curs	—		—	6	1	5	5	2	—	3	2	1	—	5	1	3	34
Turnen	37	30	54	36	37	27	41	11	13	4	11	11	12	3	11	5	343
Gesang:																	
I. Abth. für kath. u. mos. Schüler I. Curs	7	5	10	6	1	1	1	..	1	—	—	—	—	—	—	—	32
„ „ „ „ „ „ II. Curs	4	6	4	2	5	—	7	1	2	1	—	1	3	1	—	—	37
II. Abth. für gr. or. Schüler I. Curs	4	4	1	4	5	5	2	1	2	—	—	—	—	—	—	—	28
„ „ „ „ „ II. Curs	—	—	—		—	—	—	—	—	3	7	1	7	—	—	1	19
Stenographie I. Curs	—	—	—	—	—	—	—	15	4	8	7	—		—	—	—	34
„ II. Curs	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1	1	2	1	4	7	4	21
10. Stipendien.																	
Anzahl der Stipendien	—	1	1	2	1	5	—	2	3	—	3	5	1	2	1	4	31
Gesammtbetrag der Stipendien	—	100	100	100	50	268 fl. 88 kr.	—	150	210	—	217 fl. 76 kr.	280	80	100	50	210·4	1917 fl. 4 kr.

XIII. Verzeichnis der Schüler am Schlusse des II. Semesters.

(Die mit * bezeichneten Schüler haben ein Zeugnis der ersten Classe mit Vorzug erhalten.)

I. Classe A.

Aron Chaim.
*Baczyński Theophil.
Bakulinski Loghin.
Balicki Nikolaus.
Baranowski Cornel.
Bartelmus Josef.
Bechinie Robert.
Bendas Otto.
Brandes Elias Hersch.
Bratkowski Stanislaus.
Brenner Moses Mordche.
Brodner Johann.
Brucher Nikolaus.
Brunstein Abraham.
Bucko Alexander.
Butz Johann.
Cantimir Georgi.
Choloney Friedrich.
Czeikel Israel.
Dann Ilarion.
Danczul Wladimir.
David Josef Strul.
Demant Isidor.
Donnensaft Mechel Ber.
Dostal Alois.
Drucker Isidor.
Fasler Leiser.
Filiewicz Valerian.
Frenchel Chaim.
Friedewald David.
Friedmann David.
Fuhrmann Josef.
Funkenstein Maximilian.
Geller Benjamin.
Gerbel Adolf.
R. v. Goean Maximilian.
Goldberg Gerson.
Gottlieb Mendel.
Gramatowicz Dimitrie.
R. v. Grecul Aristoteles.
Gredinger Juda Wolf.
Grigorovici Stephan.
Grinfeld Marcu.
Hauer Moses Isak.
Hauslich Hersch Mechel.
Hecht Abraham.
Heilpern Isak.
Hermann Karl.
Hillwig Wilhelm.
Hödl Rudolf.
Hovaneț Nikolai.
Hruszkiewicz Wladimir.
Janosz Theophil
Jaskólski Wilhelm.

I. B.

Ariczuk Basil.
R. v. Barbier Titus.
R. v. Bejan Minodor.
Fedorowicz Eugen.
Józetowicz Anton.
Kinzbrunner Ire Leib.
Kittelt Edmund.
Kohn Karl.
Kowaluk Anton.
Kranz Isak.
Krauthamer Moses.
Kronisch Abraham Mayer.
Kuhla Schmiel Hersch.
Kupper Leib.
Lebouton Alois.
Leibschütz Anton.
Leo Ladislaus.
Lerchenfeld Froim Fischel.
Linker Hersch.
Löwensohn Salamon.
Lubowicz Johann.
Lutfak Schaje.
Malarczuk Nikolaus.
Malarczuk Peter.
*Manescul Isidor.
Marcinowski Franz Xaver.
*Matzura Ferdinand.
Meketiuk Demeter.
Mikulicz Alfred.
Minkusz Alfred.
*Morariu Victor.
Munkelt Fritz.
*Neugeboren David.
Niedermaier Paul.
Ogonowski Nikolaus.
*Onofreczek Ferdinand.
Ornstein Abraham.
Podolier Isak Leib.
Pomezański Eugen.
Prodanczuk Nikolaus.
Radewicz Demeter.
Reus Dionysie.
Röhmer Olivier.
Rosenzweig Hersch.
Schneuer Samuel Bar.
Tolkan Wladimir.
Turuszanko Emanuel.
Turuszanko Nikolaus.

Privatisten:

*Kestenband Ernst.
Oehl Rudolf.
Rosenzweig Chaim Leiser.

I. C.

Balko Dyonis Theophil.
Birnberg Moses vel Max.
Brounstein Ferdinand.
Buchholz Baruch Moses.
Gutman Salomon.
Herschmann Hersch.
Juster Moise.
Carage Emanuel.
Kasner Salamon.
Katz David.
Katz Marcus.
Kettner Georg.
Kinsbruner Mendel.
Roman Anton.
Safrin Leopold.
Salzberg Baruch.
Schäffer Hersch.
Schäfer Moses Schlome.
Scherzer Hersch.
Schessan Constantin.
Schimmel Marim.
Schirl Maximilian.
Schneeweiss Nussen.
Schützer Abraham.
Schwarz Heinrich.
Schweitzer Alfons Felician.
Scriba Eusebius.
Segal Josef.
Seidner Meier Leib.
Sierosławski Bolesław Tadeusz.
Silberbusch Gabriel Aron.
Smereczyński Wladimir.
Stadler Pinkas.
*Steinhaus Alfred.
Stern Israel Feibisch.
Sternberg Aron.
Sternberg Mordche.
Syrzistie Victor.
Szutka Wladimir.
Szymonowicz Adolf.
Tarnoviezki Emilian.
Tarnowiecki Johann.
Tattelbaum Heinrich.
Tendeloff Emil Maximilian.
Tomowicz Otto.
Torn Paul Rudolf.
Tromer Israel.
Unczowski Karl.
Węgliński Julius Stephan.
Weidenfeld Wolf.
Weinberg Berl.
Weininger Moses Mendel.
Weintraub Mortko Leib.
Weissmann Moses.
Welt Efroim.
Weresch Ladislaus Alois.
Wiltawski Hugo Adolf.
Wirth Wilhelm.
Wlad Eugen.
Wurzer Hermann.
Zappler Abraham.
Zawichowski Leopold.
Zibalis Israel.
Zirada Wasilie.

Privatist:

Wender David.

II. A.

Aberle Bonaventura Ludwig.
Adelsberger Siegmund.
Albim David.
Aleksiewicz Eustachius.
Andriyczuk Ioan.
Arvay Arthur Georg.
Badian Isak Adolf.
Badian Josef.
Baruch Eduard.
*Becker Ferdinand.
v. Bejan Emil.
Birnbaum Siegfried.
Blaukopf Moses vel Moriz.
Blum Simon Osias.
Chaskalowicz Isak Chaim.
Coca Octavian.
Czerwenka Waldemar.
Dospil Franz Josef.
Ebner Hermann.
Eckstein Maness.
Ehrlich Samuel David.
*Fara Johann.
Finger Victor.
Fleischer Philipp.
Fritz Johann.
Göbel Anton.
R. v. Gojan Dimitrie.
Goldberg Dorku.
Gottlieb Elias.
Grünberg Janku.
Haczek Otto.
Hahn Friedrich.
Haller Gerschon.
Herşeu Lupu.
Hinghofer Hermann.
Hominca Eusebius.
Horenstein Jakob.
*Iskuleskul Constantin.
Jaworski Josef.
Józefowicz Kajetan.
Kadajski Eustachius.
Kampelmacher Jakob Leib.
Kawulia Georg.
Kieryłow Anton.
Kinsbrunner Mendel Josef.
Kinzbrunner Berl.
*Kirschbaum Feiwel.
Kohul Leon.
Kostiniuk Stefan.
Kottler Isidor.
Kozmiuk Constantin.
Kranz Abraham.
Kreiner Bernhard.
Landau Wilhelm.
Langer Jechiel Mechel.
*Loserth Gerhard.
Verenca Valerian.
Voronca Aurelian.

Privatisten:

Deligdisch Itzig Rachmil.
Gramatowicz Eugen.

II. B.

v. Alandsee Ignaz.
Blum Moses David.
Chobrzyński Roman.
Dückstein Gerson.
Geller Schama.
Hausstein Efroim.
Iliuțu Theodosie.
Isopenko Michael.
Kunzelmann Wilhelm.
Maczuszak Eugen.
Mahr Oskar.
Mayer Otto Jakob.
Mehrer Ludwig.
Mucha Rudolf.
Nichitovici Theophil.
Nossiewicz Eudoxius.
*Oreletzki Nikolaus.
Padura Georg.
Paunel Eugen.
Porubski Franz.
Preger Leib.
Retter Schaja.
Rosner Schloim David.
Rottenstreich Feiwisch Aron.
Rudzik Florian.
Șandru Constantin.
Scalat Modest.
Schifer Julius.
Schlag Stephan.
Schönbach Hugo Anton.
Silberbusch Chaim Mechel.
Skraba Aurel.
Sołtyński Stanislaus.
Sommer Feiwisch.
Sternklar Juda Nussen.
Stroh Jakob Moses.
Szuchiewicz Paul Basil.
Tarnawiecki Marian.
*Tarnawski Theophil.
Teutul Peter.
Terkel Abraham Moses.
*Thaler Moses.
*Tokaryk Leon.
Tomaszewski Johann.
Weihrauch Schmiel.
Weiss Richard Adalbert.
Welt Jakob.
Wender Schmiel Leib.
Wilczyński Josef.
Wohllerner Simon.
Wołosiecki Alexander.
Wurzel Chaskel.
Zappler Samuel.
R. v. Zopa Stephan.
Zurkanowicz Ilarion.

III. A.

Bakuliński Emil.
Baloscheskul Theophil.
Baltinester Lazar Eliaser.
Bendas Alexis.
Bendas Alfons.
Berariu Aurelian.
Blinder Eisig.
Brenner Arthur.
Brounștain Ușeru.
Brunwasser Hersch.
Bucksch Edgar.
*Bursztyn Heinrich.
Chemeczuk Nikolaus.
Ciołek Adolf.
Czech Alexander.
Czernautzan Adrian.
Dampf Schmiel Efroim.
David Abraham.
Diamant Max.
Dobrzański Wladimir.
Dolfin Benjamin.
Dolnicki Athanasius.
Dolnicki Johann.
v. Drohomirecki Johann.
Dalberg Max.
Faustmann Theodor.
Fischer Jakob.
Flinker Leibisch.
Forgaci Adrian.
*Fritsche Gerhard.
Garan Simeon.
Gerbel Josef.
Geringer Rubin.
Goldenberg Emanuel.
Grauer Israel.
*Gregor Adalbert.
Grieshaber Michel.
R. v. Grigorcea Georg.
Gronich Schulem.
Gross Pessach Leib.
Grünberg Eisig.
Haffner Jakob.
Halicki Emil.
v. Hankiewicz Johann.
Hauslich Abraham.
Herzberg Hersch.
Höfling Hermann.
Holczberger Julius.
Hostiuc Constantin.
Imber Mechel Hersch.
Iwanowicz Cornel.
Jaroszyński Eusebius.
Kłodnicki Octavian.
Knittel Franz.
Kotzek Johann.
Kupferberg Adolf.
Lakusta Nikolaus.
Langer Zallel.
Last Ilie.
Schafařik Wladimir.

Privatist:

Deligdisch Mordche.

III. B.

Kraus Jakob.
Lemport Saul.
Löwenschuss Berl.
v. Lubieniecki Georg.
v. Lubieniecki Hilarion.
Mandrig Isidor.
Mathias Othmar.
Maurüber Meilech.
Michałowicz Alfred.

Mihalescul Victor.
Morghenstern Simion Jacŭ.
Neuberger Simon.
Ohrländer Abraham.
Orobko Victor.
Osadez Ioan.
Papst Isidor.
Piątkiewicz Kasimir.
Piątkiewicz Thaddäus.
Pilpel Isak.
Pindus Marian.
Popowicz Alexander.
Presser Leibisch.
Prokopowicz Orest.
Rapoport Ignaz.
Romaszkan Josef.
Rosenthal Siegfried.
Rosenzweig Isak.
Rosner Moriz Salomon.
Rottenburg Eduard.
Sauerquel Rafael.
Sbiera Alexander.
Scalat Stephan.
Schajowicz Gerson.
Schattner Hersch.
Scherer Aron.
Schifer Mordko.
Schifer Moriz.
Schmetterling Marcus.
Schneider Emil.
Schwarz Julius.
Soltész Karl.
Sommer Abraham.
Stadler Jakob.
Stasznik Emilian.
Stefanowicz Clement.
Storfer Samuel.
Stroh Elias.
Strohmejer Franz.
Tellerŭ Heini.
Terlecki Clemens.
Tittinger Hugo.
Tomeczek Augustin.
Trichter Israel.
Tudan Ilie.
Weich Leon.
*Weichert Jakob.
*Witkowski Stanislaus.
Wolfinger Siegmund.
Zachar Kasimir.
Zugraw Constantin.
Zenta Constantin.

Privatist:
Nechay von Felseis Rudolf.

IV. A.

Adler Itzchok.
Allacz Johann.
Amirowicz Augustin.
Badian Max.
Barber Maximilian.
v. Barbier Theoktist.
Bardach Mendel.
Beiner Julius.
Bilobram Mustiu.
Biskupski Eduard.
Brenner Jakob.
Brodfeld Manes.
Brunwasser Ignaz.
Czaczkes Hermann.
Derer Milan.
Dohomila Michael.
Eckstein Meier.
Eltes Mendel.
Filiewicz Georg.
Gehlbard Samuel.
Goldenberg Jakob Moses.
Goldenberg Michael.
Goldner Godel.
Gottesmann Meier.
*Grinfeld Chaim.
*Grünfeld Alexander.
Grünhaus Salomon.
Hakmann Maximilian.
Hirschel Beril.
Jaroszyński Emanuel.
Kaminski Roman.
Katz Paul.
Kimmelmann Mannel.
Kinsbruner Schlomo.
Kratter David.

IV. B.

*Kobylański Wladimir.
Lakusta Michael.
Langenhan Philipp.
Lauer Emanuel.
Liopold Otto.
Litviniucu Numitor.
Marcussohn Nusin.
Mecz Hersch Leib.
Melzer Ladislaus.
Mogilnicki Eugen.
Nikorowicz Wladimir.
Perlstein Zallel.
Peters Josef.
*Picker Simon Leib.
Raczyński Bronislaus.
Rosner Berl.
Roth Wolf.
Rubinowicz Stanislaus.
Scalat Octavian.
Schächner Hersch.
Schessan Valerian.
Schiffer Bernhard.
Silberbusch Elias.
Skurski August.
Baron Thüngen Hildolf.
Tillemann Kalman.
Tuttmann Isidor.
Wachlowski Camill.
Warnicki Josef.
Weisstein Martin.
Weresch August.
*Woloschenko Demetro.
Zallik Nathan.
Żurakowski Ladislaus.

Privatist:
Winnicki Jaroslaus.

V. A.

Antonowicz Kasimir.
Badian Hugo.
Barber Bruno.
Becker Wilhelm.
Brüll Karl.
Brunstein Salomon.
Dobrowolski Nikolaus R. v. Buchenthal.
Drohomirecki Athanasius.
Eisner Baruch.
Filiewicz Modest.
Glaser Chaim.
Goldhaufen Chaim.
Gregorowicz Philipp.
Grütz Ignaz.
Gutmann Jakob.
Halip Eugen.
Hampel Mieczysław.
Hruszkiewicz Maximilian.
*Illasiewicz Orest.
Kapralik Elias.
Kleinwächter Friedrich.
Krämer Moses.
Löwenschuss Hermann.
Nikeforuk Demeter.
Procopovicí Arkadius.
Rappaport Naftali.
Reininger Jakob.
Sokal Josef.
Terlecki Thaddäus.
Wachlowski Cornel.
Weinberger Baruch.

V. B.

Kozak Methodius.
Lindes Guido.
Luttinger Heinrich.
Maderer Benjamin.
Mendrochowicz Chaim.
R. v. Ohanowicz Cajetan.
v. Onciul Adrian.
Opaeţu Theodor.
Pallasch Julius.
Pawelczak Nestor.
Piątkiewicz Stanislaus.
Ramler Abraham.
Ratien Johann.
*Samuely Heinrich.
Schajowicz Naftali.
Schattner Feiwel.
Schieber Meschulem.
Schläfer Noa.
Schottenfeld Israel.
Seinfeld Salomon.
Skraba Andronik.
Stecher Burech.
Stefanowicz Alexander.
Sternschuss Moses.
Todres Maier.
Tomorug Nikolaus.
Verenka Hilarion.
Vogl Otto.
Weiner Eisig.
Wicentowicz Franz.
Winkler Franz.
Wysocki Wladimir.
Zentner Julius.

Privatisten:

Metzler Alfons.
Rottenberg Leopold.
Sobotkiewicz Eduard.

VI. A.

Altmann Abraham.
Barański Anton.
Barasch Karl.
v. Barbier Cornel.
Bleier Israel.
*Brendzan Theophil.
Costiner Florian.
Ebner Benjamin.
Fedorowicz Hilarion.
Goldenberg Bernhard.
R. v. Grecul Arkadius.
R. v. Grigorcea Joan.
Juster Heinrich.
Kalmutzki Alexander.
Kanel Baruch.
Kobylanski Alexander.
Manastyrski Gustav.
Mazioski Ilie.
Nussbaum Wilhelm.
Sandbank Ascher.
Serfas Johann Friedrich.
Serfas Valerius Gustav.
R. v. Tabora Demeter.

VI. B.

Hlewka Theophil.
Kerth Siegmund.
*v. Krynicki Johann.
Lubowicz Eugen.
Malikiewicz Franz.
Marko Michael.
v. Mor Franz.
Münz Nuchem.
Perlstein Max.
Sbiera Decebal.
*Sbiera Radu.
*Schechner Uscher.
*Semaka Leon.
Skraba Philaret.
Sobel Mendel.
Stefanowicz Stephan.
Sokołowski Victor.
Teutul Ignaz.
Thomowicz Victor.
Timco Georg.
Timkowicz Valerian.
Tomeczek Franz.
Tuttnauer Josef.
Weiss Hugo.
Wieleżyński Alexander.
Złoczower Leiser.
R. v. Zopa Alexander.

VII. A.

Bensdorf Kasimir.
*Berger Mortko.
Beuka Severian.
Dawid Michel.
Decker Friedrich.
Ebersohn Emil.
Eisenklam Fischel.
Feuer Eugen.
Filar Thomas.
Forgaci Dorymedont.
Fuglewicz Josef.
Gribowski Gregor.
R. v. Grigorcea Alexie.
Keschmann Romuald.
Kiesler Theodor.
Kinsbrunner Chaim.
Migdal Anton.
R. v. Ohanowicz Paul.
Piotrowschi Arcadius.
*v. Regius Alfons.

VII. B.

Arnold Julius
Fida Adolf.
Fleischer Jankel.
Fokschaner Salomon.
Gottlieb Itzig.
Homiuka Emilian.
Hostiuc Eusebius.
Hoszowski Johann.
Isopenko Nikolaus.
Korber Wolf.
Kuniński Constantin.
Luczański Anton.
Lustig Hersch.
Lutwak Isak.
Neuberger Leibisch.
Ohrenstein Itzig.
Ohrenstein Schmelka.
Paliczka Arthur.
R. v. Reus-Mirza Victor.
Romanesco Georg.
Rosenzweig Walther.
Sandbank Gerson.
Sbiera Trajan.
Scheidt Julius,
Schiffer Gerschon.
Schnecker Moses.
R. v. Tabora Alexander.
Wachtel Wilhelm.
Weinbach Benjamin.
Weinbach Nissen.
Weiss Simon Osias.
Wicentowicz August.

VIII.

Amster Heinrich.
Axentowicz Kasimir.
Badian Heinrich.
Baltinester Heinrich.
Brandmann Hermann.
Brod Aron.
Brodfeld Mendl.
Bumbacu Severin.
Choloney Josef.
Drogli Georg.
Eckhardt Bronislaus.
Ehrlich Beril.
Ehrlich Moses.
Ferencz Josef.
Finkel Jakob.
Florczuk Josef.
Frendel Hersch.
Frucht Berl.
Ganz Chaskel.
Glaser Osias.
Jech Leo.
Kostecki Nikolaus.
Kreisling David.
Kudisch Uscher.
Kurz Nuchim.
Löwensohn Noe.
Metsch Schmiel.
Michniewicz Adolf.
Mogilnicki von Lubicz Cornel.
Mück Abraham.
Mück Max.
Münz Schmaja.
R. v. Ohanowicz Josef.
Perlmutter Abraham.
Popovici Dorymedon.
v. Rudnicki Marian.
Runes Jankl.
Safrin Benjamin.
Schessan Anton.
Schreiber David.
Schulmann Heinrich.
R. v. Sgardelli Alfred.
Storfer Schaja.
Tarnawski Isidor.
Täuber Moses.
Thenen Marcus.
Tofan Hilarion.
Warnicki Emanuel.
*Wechsler (Zaraffu) Moses.
Wender Hersch.
Woloschenko Basil.
Wurzer Hugo.

Privatisten:

R. v. Zotta Octavian.
R. v. Zotta Sever.

XIV. Kundmachuug bezüglich des nächsten Schuljahres.

Die Aufnahme der Schüler in die I. Classe findet am 15., 16. und 17. Juli (erster Termin) statt. Die betreffenden Schüler haben sich am 14. Juli oder an den bezeichneten Tagen vormittags zwischen 8 und 10 Uhr in Begleitung ihrer Eltern oder deren Stell-

vertreter in der Directionskanzlei zu melden und einen legalen Tauf- oder Geburtsschein, der das vollendete oder im laufenden Kalenderjahre zur Vollendung gelangende zehnte Lebensjahr ausweist, und, falls sie eine öffentliche Volksschule besucht haben, die Schulnachrichten beizubringen. In den Schulnachrichten muss der Unterrichtserfolg in der Unterrichtssprache mit einer einzigen Note classificirt erscheinen, auch muss auf denselben der Zweck der Ausfolgung ersichtlich gemacht sein.

An den genannten Tagen wird vormittags von 9 Uhr an die schriftliche und nachmittags von 3 Uhr an die mündliche Prüfung vorgenommen werden.

Bei der Aufnahmsprüfung wird in der Religionslehre jenes Maß von Wissen, welches in den ersten vier Classen der Volksschule erworben werden kann, in der deutschen Sprache Fertigkeit im Lesen und Schreiben der deutschen und lateinischen Schrift, Kenntnis der Elemente aus der Formenlehre, Fertigkeit im Analysiren einfacher bekleideter Sätze, Bekanntschaft mit den Regeln der Orthographie und richtige Anwendung derselben beim Dictandoschreiben, im Rechnen Übung in den vier Rechnungsarten mit ganzen Zahlen verlangt.

Zufolge hoh. Min. Erl. v. 2. Januar 1886, Z. 85 ist eine Wiederholung der Aufnahmsprüfung für die I. Classe, sei es an ein und derselben oder an einer andern Lehranstalt, mit der Rechtswirkung für das unmittelbar folgende Schuljahr unzulässig.

Jeder neu eintretende Schüler hat die Aufnahmstaxe von 2 fl. 10 kr. und 1 fl. Lehrmittelbeitrag zu entrichten.

Das Schuljahr 1892/93 beginnt am 15. September.

Die Termine für die Wiederholungs- und Nachtragsprüfungen, ferner für die Aufnahmsprüfungen für die I. (zweiter Termin) und für die höheren Classen werden später durch eine bezügliche Kundmachung am schwarzen Brette und durch die Localblätter bekannt gegeben werden.

Schüler, die bereits im Vorjahre der Anstalt angehört haben und ihre Studien an derselben fortsetzen wollen, haben sich am 15. oder 16. September in den hiefür bestimmten Classenzimmern zu melden; hiebei haben sie das letzte Semestralzeugnis vorzuweisen und den Lehrmittelbeitrag von 1 fl. zu entrichten.

Alle Schüler haben ihren Ordinarien 2 vollständig ausgefüllte Nationalien, in denen auch die freien Gegenstände zu verzeichnen sind, die sie in dem neuen Schuljahre besuchen wollen, zu übergeben; letzterer Angabe muss die Unterschrift des Vaters oder verantwortlichen Aufsehers beigesetzt sein.

Die Anmeldung und Aufnahme der Privatisten erfolgt in derselben Weise und zu derselben Zeit wie die der öffentlichen Schüler; bei auswärtigen Privatisten kann die Meldung auch schriftlich erfolgen.

Das Schulgeld (20 fl. halbjährig) ist von den öffentlichen Schülern im Laufe der ersten sechs Wochen jedes Semesters, von den öffentlichen Schülern der I. Classe, denen die Stundung desselben nicht bewilligt wird, im I. Semester spätestens im Laufe der ersten drei Monate nach Beginn des Schuljahres im vorhinein zu entrichten.

Der Berichterstatter spricht schliesslich allen Gönnern der Anstalt, welche zur Vermehrung der Lehrmittelsammlungen beigetragen, sowie den zahlreichen edlen Jugendfreunden, welche arme brave Schüler auf irgend eine Weise unterstützt und in ihrem Fortkommen gefördert haben, den wärmsten Dank aus.

Czernowitz, den 1. Juli 1892.

Christoph Würfl,
Director.

Sep.-Abdr. aus den Verh. d. phys.-med. Gesellschaft. N. F. XIV. Bd.

Ueber die der Mechanik zu Grunde liegenden Anschauungen.

Von

A. FICK.

Es ist nicht zu verkennen, dass sich seit einiger Zeit eine Abneigung gegen die von *Galilei* und *Newton* ausgebildeten Grundanschauungen der Mechanik bei den Darstellern dieser Wissenschaft geltend macht. Einen der hervorragendsten derselben, *Kirchhoff*, hat sie sogar veranlasst, die Mechanik zu definiren als die Kunst, Bewegungen auf möglichst einfache Weise zu *beschreiben*, welche ganz von der *Erklärung* ihrer *Verursachung* abzusehen habe. Diese Strömung der Gegenwart scheint mir aus zwei Quellen zusammenzufliessen. Seit *Lagrange* darauf aufmerksam gemacht hat, dass bei Centralkräften, welche bloss vom wechselseitigen Abstande der wirksamen Massen abhängen, die Componenten partielle Derivirte einer Function der Coordinaten der wirksamen Massenpunkte sind, hat man dieser Function und ihrer Aenderung, der sogenannten Arbeit, eine immer gesteigerte Aufmerksamkeit geschenkt. Dies die eine Quelle. Andererseits hat wohl Jeder, der über die Grundbegriffe der Mechanik nachdenkt, mehr oder weniger Anstoss genommen an der Dunkelheit, welche dem Begriffe einer anziehenden oder abstossenden Kraft innewohnt. In der That, was kann dunkler sein als die Vorstellung von einer „Tendenz“ des einen Körpers, sich einem andern zu nähern. Wenn ich ein Gewicht an einer Federwage ruhig hängen sehe, soll ich mir vorstellen, das Gewicht hat eine active Tendenz, zum Mittelpunkte der Erde zu gehen, und die Feder hat eine Tendenz, es zu erheben; diese beiden fortwährenden Actionen heben einander aber auf, so dass nichts geschieht. Streng genommen ist diese Vorstellung ganz

Sep.-Abdr. aus den Verh. d. phys.-med. Gesellschaft. N. F. XIV. Bd.

Ueber die der Mechanik zu Grunde liegenden Anschauungen.

Von

A. FICK.

Es ist nicht zu verkennen, dass sich seit einiger Zeit eine Abneigung gegen die von *Galilei* und *Newton* ausgebildeten Grundanschauungen der Mechanik bei den Darstellern dieser Wissenschaft geltend macht. Einen der hervorragendsten derselben, *Kirchhoff*, hat sie sogar veranlasst, die Mechanik zu definiren als die Kunst, Bewegungen auf möglichst einfache Weise zu *beschreiben*, welche ganz von der *Erklärung* ihrer *Verursachung* abzusehen habe. Diese Strömung der Gegenwart scheint mir aus zwei Quellen zusammenzufliessen. Seit *Lagrange* darauf aufmerksam gemacht hat, dass bei Centralkräften, welche bloss vom wechselseitigen Abstande der wirksamen Massen abhängen, die Componenten partielle Derivirte einer Function der Coordinaten der wirksamen Massenpunkte sind, hat man dieser Function und ihrer Aenderung, der sogenannten Arbeit, eine immer gesteigerte Aufmerksamkeit geschenkt. Dies die eine Quelle. Andererseits hat wohl Jeder, der über die Grundbegriffe der Mechanik nachdenkt, mehr oder weniger Anstoss genommen an der Dunkelheit, welche dem Begriffe einer anziehenden oder abstossenden Kraft innewohnt. In der That, was kann dunkler sein als die Vorstellung von einer „Tendenz" des einen Körpers, sich einem andern zu nähern. Wenn ich ein Gewicht an einer Federwage ruhig hängen sehe, soll ich mir vorstellen, das Gewicht hat eine active Tendenz, zum Mittelpunkte der Erde zu gehen, und die Feder hat eine Tendenz, es zu erheben; diese beiden fortwährenden Actionen heben einander aber auf, so dass nichts geschieht. Streng genommen ist diese Vorstellung ganz

unausführbar. Wenn man sich den psychologischen Hergang zergliedert, der die Schöpfer dieser Vorstellung dazu gebracht hat, so wird man leicht finden, dass sie ihren Ursprung nur in der besonderen Organisation unserer Muskelsubstanz hat. Ziehe ich nämlich die Schale der Federwage nicht durch ein Gewicht, sondern durch Biegung meines Armes herunter und soll sie an dem Orte stehen bleiben, so muss allerdings ebenso lange ein chemischer Process im Muskel stattfinden, dessen Aufrechterhaltung immer neue Willensimpulse erfordert, die im Bewusstsein als Anstrengung oder Action sich bemerkbar machen und auch in relativer Ruhe eine Tendenz zur weiteren Abwärtsbewegung der Hand vortäuschen. Nun ist aber offenbar das Bewusstsein von der Art, wie wir durch unsere Muskelthätigkeit Bewegungen hervorbringen oder verändern, der erste Ursprung von den Vorstellungen über die Verursachung derselben überhaupt, und so hat sich in die Mechanik die seltsame Idee eingeschlichen, als ob auch in einem ruhenden Körper Bewegungstendenzen vorhanden wären. Man könnte dies füglich als einen „Anthropomorphismus“ bezeichnen.

Sehen wir übrigens von dem Ursprunge der Vorstellung von einer im Ruhezustand schon vorhandenen Bewegungstendenz ganz ab, der wie gezeigt auf einem physiologischen Missverständnisse beruht, so bleibt ein logischer Widerspruch in den Vorstellungen selbst zurück, über den man, so viel ich sehe, gar nicht wegkommen kann. Trotz aller Bewegungstendenz könnte nämlich ein Körper aus der Ruhe nie in Bewegung kommen. Stellen wir uns den erstgedachten Fall wieder vor: Ein Gewicht hängt mittels eines Fadens an einer Federwage im Gleichgewicht. Der Faden werde abgebrannt. Wie soll das Gewicht fallen? Damit es den ersten Schritt zur Annäherung an die Erde thue, muss es doch eine, wenn auch noch so kleine, Geschwindigkeit haben. Diese kann es aber nur durch Arbeit, d. h. in unserem Falle durch Annäherung an den Erdmittelpunkt, erlangen. Wir haben also den Erfolg als Voraussetzung nöthig, was ein vollkommener logischer Widerspruch ist. Ueber diesen hilft uns auch die Erwägung nicht weg, dass allerdings die Arbeit nur ein unendlich Kleines zweiter Ordnung zu sein braucht, um eine Geschwindigkeit zu erzeugen, die ein unendlich Kleines erster Ordnung ist. Wir haben eben von der absoluten Null einen Uebergang zu irgend einem Werthe nöthig.

Einen dritten Anstoss nehme ich daran, dass in der *Galilei-Newton*'schen Erklärung von der Verursachung der Bewegungs-

änderungen die Zeit als ursprünglich wirksamer Factor eingeht, indem die erzeugte Bewegungsgrösse proportional gesetzt wird der Zeit, während welcher eine Kraft auf den bewegten Körper einwirkt. Mir scheint a priori gewiss, dass die Zeit an sich bei irgend einer Aenderung keine wirksame Rolle spielen kann, also auch nicht bei Aenderung einer Geschwindigkeit.

Die Verursachung ist, wie *Schopenhauer* sehr richtig hervorgehoben hat, die Abhängigkeit zweier Veränderungen von einander, derart, dass, wenn die eine Grösse eine bestimmte Aenderung erleidet (Ursache), die andere ebenfalls eine gesetzmässig bestimmte Aenderung erleiden muss (Wirkung); in welcher Zeit diese beiden Aenderungen stattfinden, das kann auf ihren gesetzmässigen Zusammenhang keinen Einfluss haben. Dass die Zeit in den jetzt üblichen Darstellungen der Mechanik auch nur scheinbar diese principale Rolle spielt, ist leicht ersichtlich, wenn man bedenkt, dass die Beschleunigung mit der Zeit nur dann stattfindet, wenn der bewegte Körper der Kraft folgt, d. h. auch seinen Ort verändert. Die Zeit darf meines Erachtens in die mechanischen Betrachtungen erst secundär eintreten, nämlich durch Vermittelung des Begriffes der Geschwindigkeit.

Solche Erwägungen haben mich schon vor langer Zeit zum Nachdenken angeregt, ob nicht durch andere Gestaltung der Vorstellungen von der Verursachung der Bewegungsänderungen die Dunkelheit aus den Grundlagen der Mechanik verbannt werden könnte. Wenn ich mich nicht täusche, ist es mir auch gelungen, eine solche widerspruchsfreie Grundlegung der Mechanik zu finden. Ich habe dieselbe bereits vor 12 Jahren in einem anonymen Schriftchen[1]) niedergelegt. Dass es vollständig unbeachtet geblieben ist, mag begründet sein in der Unhaltbarkeit meiner Gedanken oder in der Sinnesrichtung unserer Zeit, welche mehr auf thatsächlichen Neuerwerb ausgeht als auf philosophische Durchdringung und Klärung der Grundlagen unsers Wissens. Jedesfalls hätte eine neue Darstellung meiner Anschauungsweise ebenso wenig Aussicht auf Erfolg wie die frühere, und würde ich eine solche unterlassen, wenn ich nicht jetzt im Stande zu sein glaubte, noch ein neues Moment hinzufügen zu können. Während nämlich in meiner früheren Darstellung die Grundformeln der älteren

[1]) Ursache und Wirkung. Ein Versuch. Göttingen u. Cassel bei G. Wigand 1867.

Mechanik sich als Resultat ergaben, würde bei der gegenwärtigen Fassung das *Weber*'sche Gesetz als dasjenige erscheinen, welches die Verursachung der Bewegungsänderung beherrscht. Mir scheint aber, dass man heutzutage an eine Grundlegung der Mechanik die Anforderung stellen müsse, dass sich daraus eben dies Gesetz ableiten lasse, da es wohl ohne Zweifel der vollständigere Ausdruck der gegenseitigen Massenwirkung ist. Aus diesem Grunde habe ich mich entschlossen, meinen Grundgedanken noch einmal in veränderter Fassung kurz und ohne ausführliche Begründung darzustellen.

Die Materie, das Substrat der Wechselwirkung, besteht aus getrennten Theilchen, Atomen. Ein Atom nimmt keinen auch noch so kleinen Raum stetig ein; vielmehr kommt ihm nur ein Ort im Raume zu, welcher im Allgemeinen für dasselbe Atom variabel ist. Nichts hindert uns zu denken, dass gleichzeitig mehrere Atome an demselben Orte sind. Möglicherweise lässt sich freilich beweisen, dass vermöge der Wechselwirkung selbst ein zweites Atom niemals factisch an einem Orte eintreffen kann, in welchem sich zu derselben Zeit ein anderes findet. Die blosse Existenz eines Atomes an einem Orte verhindert aber die gleichzeitige Anwesenheit eines andern daselbst nicht.

Die vorstehenden Sätze halte ich nicht etwa für wahrscheinliche Folgerungen aus der Erfahrung, sondern für erkenntnisstheoretische Sätze, denen mithin a priori Gewissheit zukommt; indessen will ich hier nicht versuchen, sie als nothwendige Voraussetzungen einer möglichen Erfahrung zu deduciren, weil die meisten Naturforscher an ihnen wohl schwerlich besonderen Anstoss nehmen werden, obgleich neuerdings hier und da die Idee einer stetigen Raumerfüllung durch die Materie — meines Erachtens ein logischer Widerspruch — wieder Geltung zu gewinnen scheint.

Jedem Atom kommt in jedem Augenblick ein gewisser Zustand zu, dessen Möglichkeit an sich keineswegs an die gleichzeitige Existenz anderer Atome geknüpft ist. Dieser Zustand, dessen inneres Wesen nicht definirbar ist, kommt zur Erscheinung als Bewegung und zwar als absolute Bewegung, welche wir, wie schon *Newton* gezeigt hat, nothwendig annehmen müssen, obgleich wir sie nicht als solche im einzelnen Falle erkennen und messen können. Das Mass der Intensität des Bewegungszustandes ist die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$, wenn ds die im Zeitdifferential dt zurück-

gelegte Wegsstrecke bedeutet. Es ist gut, zu bemerken, dass dies Mass der Natur der Sache nach nur positive Werthe haben kann. Es geht dies einerseits aus der Formel hervor, da dt sowohl als ds wesentlich positive Grössen sind, denn jeder neue Schritt des Atoms ist ein positiver Zuwachs zu der von ihm durchlaufenen Bahnstrecke auch dann, wenn er in umgekehrter Richtung geschieht. Andererseits liegt er in der ursprünglichen Definition, denn der Grad einer Eigenschaft oder eines Zustandes eines Dinges kann nur positive Werthe haben ; entgegengesetzte Werthe kann nur eine Grösse haben, durch welche eine Beziehung zwischen zwei Dingen gemessen wird.

Der Bewegungszustand eines Atomes würde unverändert bleiben, wenn nicht andere Atome vorhanden wären, welche auf das erstere wirken. Dieser Satz wird wohl von Niemandem bezweifelt, wenn auch vielleicht nicht Jeder zugeben wird, dass er a priori gewiss ist, wie ich glaube. Es dürfte aber ebenso allgemein zugestanden werden, dass der Zustand eines Atomes auch dann unverändert bleiben würde, wenn seine Beziehungen zu allen andern Atomen in allen Stücken unverändert blieben; denn *eine* Veränderung kann nur durch eine *andere* Veränderung bewirkt werden, und nicht etwa durch den blossen Ablauf der Zeit.

Dieser Satz allein kann zum Ausgangspunkte der Mechanik, d. h. der Lehre von der Verursachung der Bewegungsänderung, dienen. Er ist ohne alle Dunkelheit und Widerspruch ; er ist ausserdem rein erkenntnisstheoretisch und a priori gewiss, d. h. ohne diesen Satz gelten zu lassen, kann man gar keinen gesetzmässigen Zusammenhang im Ablaufe der Erscheinungen in der Zeit denken. Das Letztere will ich ebenfalls nicht hier nachzuweisen versuchen, aber den Satz selbst müssen wir noch genauer entwickeln. Stellen wir uns die Atome vermöge ihres inneren Zustandes im Raume bewegt vor und zwar zunächst jedes in einer bestimmten Richtung bewegt, so wird nach Ablauf eines sehr kleinen Zeittheilchens die gegenseitige Beziehung, die als räumliche Beziehung derselben erscheint, eine andere geworden sein, als sie zu Anfang gewesen ist, und zwar ist diese Veränderung durch *nichts bewirkt*, ihre Vorstellung ist schon enthalten in der Vorstellung der Bewegung selbst und würde auch erfolgen, wenn die Atome keine Wechselwirkung aufeinander ausübten. Eine Wechselwirkung zwischen den Atomen annehmen heisst nun offenbar nichts Anderes als annehmen, dass die in der Bewegung von selbst erfolgende

Aenderung der gegenseitigen Beziehung der Atome eine Aenderung ihrer inneren Zustände herbeiführt. Fassen wir, um es noch klarer anzuschauen, nur ein Paar von Atomen P und Q in's Auge. In seiner Bewegung ändert sich die Beziehung des Atomes P zum Atome Q. P erfährt eine Einwirkung von Q kann doch nun offenbar nur heissen: durch die Aenderung dieser Beziehung muss sich in dem Atome P selbst etwas ändern; dies in P selbst gelegene Etwas kann aber offenbar nichts Anderes sein als der innere Zustand von P, der als Bewegung erscheint. Wir haben somit den Satz: die Aenderungen der Geschwindigkeiten der Atome müssen von der Aenderung ihrer gegenseitigen Beziehungen in einer gesetzlichen Abhängigkeit stehen.

Um den gesetzmässigen Zusammenhang der beiden Aenderungen mathematisch formuliren zu können, müssen wir die beiden Grössen, deren Aenderungen in Frage kommen, genauer definiren, so dass sie gemessen werden können. Für die Intensität des inneren Zustandes haben wir bereits in der absoluten Geschwindigkeit das Mass gefunden; es handelt sich also nur noch um die Beziehung. Wären die Atome in Ruhe, so wären ihren Beziehungen durch die Abstände gegeben, und es wäre also als Mass der Beziehung zweier Atome zu einander einfach eine Function ihres Abstandes zu setzen. Anders ist es bei zwei bewegten Atomen. Man wird hier zugeben, dass sie sich bei gleichem Abstande in verschiedener Beziehung zu einander befinden können, je nachdem sie sich auf einander zu oder von einander weg oder in anderen Richtungen gegen einander bewegen. Dass eine daher genommene Bestimmung in die Grösse aufgenommen werden muss, welche die Beziehung der bewegten Atome zu einander messen soll, kann man auch folgendermassen einsehen. Unter Beziehung muss offenbar alles das verstanden werden, was sich von selbst ändert bei der Bewegung, oder dessen Aenderung in der Vorstellung der Bewegung schon mit enthalten ist, ohne dass man eine Aenderung der Bewegung selbst anzunehmen hätte. Nun ändern sich aber, geradlinige constante Bewegung der Atome vorausgesetzt, nicht bloss ihre Abstände, sondern auch die Winkel zwischen den Verbindungslinien der Atome und ihrer Bewegungsrichtung. Von ihnen muss also die zum Masse der Beziehung dienende Grösse auch noch abhängen.

In mathematischer Form kann dies noch genauer so ausgesprochen werden. Es seien zwei Atome P und Q im Abstande r,

und die augenblickliche Bewegungsrichtung bilde mit der über P hinaus verlängerten Richtung der Verbindungslinie den Winkel α, die augenblickliche Bewegungsrichtung von Q bilde den Winkel β mit der über Q hinaus verlängerten Richtung derselben Verbindungslinie. Endlich heisse γ der Winkel, welchen die Richtungen der Bewegungen von P und Q miteinander machen. Es ist nun offenbar, dass die Beziehung zwischen den beiden bewegten Atomen durch r, α, β und γ vollständig charakterisirt ist und dass also die Aenderung der Beziehung bei einer kleinen Verschiebung von P in seiner Bahn gemessen werden muss durch die Aenderung, welche eine Function der Grössen r, α, β und γ erleidet. Da aber der Winkel γ durch die Bewegung in ihrer ursprünglichen Richtung nicht geändert wird, so kann dieser Winkel als Variabele in der Function nicht auftreten. Nennen wir jetzt v_p die Geschwindigkeit von P und v_q die Geschwindigkeit von Q, so muss die Aenderung von v_p während des Zeitdifferentials ($d\ v_p$) in einem mathematisch ausdrückbaren gesetzlichen Zusammenhang stehen mit der Aenderung, welche jene Function von r, α, β während desselben Zeitdifferentiales erleidet, und in gleichem Zusammenhang muss ($d\ v_q$) mit der Aenderung jener Function stehen. Dieser Zusammenhang kann übrigens unbeschadet der Allgemeinheit geradezu als Proportionalität definirt werden, da ja die Form der Function noch ganz willkührlich ist.

In die algebraische Bildung jener Function können auch die Grössen v_p und v_q eingehen, denn es hat a priori durchaus nichts gegen sich anzunehmen, dass die Aenderung, welche die Geschwindigkeit eines Atomes durch eine bestimmte Aenderung der Beziehung zu anderen Atomen erleidet, auch davon abhängt, wie gross diese Geschwindigkeit schon war, und davon, wie gross die Geschwindigkeit der wirksamen anderen Atome zu der Zeit ist, zu der die Beziehungsänderung stattfindet. Es ist aber sehr wichtig, zu bemerken, dass die Grössen v_p und v_q bei der Differentiation der Beziehungsfunction, durch welche die ursächliche Beziehungsänderung zu ermitteln ist, als Constante betrachtet werden müssen. Denn der aufgestellte Fundamentalsatz sagt aus: Die Aenderung, welche während des Zeitdifferentials die Geschwindigkeiten v_p und v_q der in Wechselwirkung stehenden Atome erleiden, sind proportional den Aenderungen, welche ihre gegenseitige Beziehung *vermöge* ihrer Bewegung mit jenen Geschwin-

digkeiten erleiden. Es darf also bei der Berechnung der Beziehungsänderung nur das in Rechnung gebracht werden, was sich durch das Fortschreiten mit den Geschwindigkeiten v_p und v_q ändert. Ihre Werthe selbst, sofern sie in der Formel für die Beziehungsfunction vorkommen, sind also, wie behauptet wurde, bei der Differentiation constant zu setzen.

Von allen bis jetzt aufgestellten Behauptungen könnte, so viel ich sehe, schon gegenwärtig nachgewiesen werden, dass sie rein erkenntnisstheoretisch im Sinne *Kant's* und also a priori gewiss sind, d. h. es lässt sich, glaube ich, nachweisen, dass ohne diese Sätze eine durchgängig zusammenhängende Erfahrung nicht möglich ist. Ich füge nun noch einen Satz hinzu, für den ich ebenfalls den Rang eines erkenntnisstheoretischen in Anspruch nehmen möchte, ohne jedoch im Augenblicke den Beweis liefern zu können, dass er ein solcher ist. Der Satz lautet so: die Geschwindigkeit des Atomes P kann nur derjenigen Aenderung der Beziehung proportional sein, welche durch die Bewegung von P selbst hervorgebracht wird, nicht der durch die Bewegung eines anderen Atomes hervorgebrachten Beziehungsänderung. Durch blosses Aussprechen unmittelbar einleuchtend scheint mir der Satz jedesfalls zu sein. Zu seiner Begründung oder Erläuterung könnte man etwa noch sagen, die Ursache muss da sein, wo die Wirkung ist. In unserm Falle ist die Wirkung die Aenderung der Bewegung von P, also muss auch die Ursache im Atome P, d. h. in *seiner* Verschiebung, liegen. Anstoss dürfte gerade dieser Satz am wenigsten erregen, da ja auch im Sinne der heutigen Auffassungsweise ein ganz analoger Satz gilt. Bewegen sich nämlich zwei Massen von ihrer Anziehungskraft getrieben auf den gemeinsamen Schwerpunkt zu, so wächst die lebendige Kraft jeder einzelnen nur nach Massgabe der Wegstrecke, welche *sie selbst* zurücklegt.

Die ganze bisherige Entwickelung können wir also, wenn es sich um die Wechselwirkung von bloss 2 Atomen P und Q handelt, mathematisch so formuliren:

$$\frac{d\ v_p}{dt}\ dt = C_1\ \frac{d_p\ f\ (r,\ \alpha,\ \beta\ [v_p],\ [v_q])}{dt}\ dt$$

$$\frac{d\ v_q}{dt}\ dt = C_2\ \frac{d_q\ f\ (r,\ \alpha,\ \beta\ [v_p],\ [v_q])}{dt}\ dt$$

Der Index p an dem d rechter Hand in der ersten Formel bedeutet, dass bei der Differentiation nur solche Aenderungen von r, α, β berücksichtigt werden sollen, welche durch die Bewegung von P hervorgebracht werden. Das Analoge soll der Index q rechts in der zweiten Formel andeuten. Die besondere Einklammerung der Grössen v_p und v_q innerhalb des Functionszeichens soll andeuten, dass diese beiden Grössen bei der Differentiation als constant gelten sollen.

Der constante Factor C_1 in der ersten Formel ist die Masse des Atomes Q und ebenso ist der Factor C_2 die Masse des Atomes P. Offenbar muss nämlich die in P hervorgebrachte Geschwindigkeitsänderung von dem hierselbst vereinigten Quantum des wirksamen und Wirkung erleidenden Agens unabhängig sein, da jede hier befindliche Einheit desselben die gleiche Wirkung erfährt. Wenn ich aber in Q die doppelte Anzahl von wirksamen Einheiten denke, so wird in P auf jede Einheit zweimal dieselbe Wirkung ausgeübt, welche von nur einer in Q befindlichen Einheit ausgeübt werden würde. Das Umgekehrte gilt von der Wirkung in Q.

Aus der vorstehend entwickelten Anschauung von der Verursachung der Bewegungsänderungen müssen sich nun die gewöhnlichen Fundamentalformeln der Bewegungslehre entwickeln lassen resp. analoge Fundamentalformeln im Sinne des *Weber*'schen Gesetzes. Diese sind nämlich *empirische* Wahrheiten, und ein Satz, der den Anspruch macht, ein erkenntniss-theoretischer zu sein, darf nicht empirisch festgestellten Sätzen widersprechen. Thut er dies, so ist er nothwendig falsch deducirt.

Um die Uebereinstimmung unserer Formel mit den Grundgleichungen der Mechanik zu prüfen, müssen wir über die Form der Beziehungsfunction bestimmte Annahmen machen. Ich glaube nun, dass diejenigen Annahmen, von denen gezeigt werden wird, dass sie die bekannten Grundgleichungen zur Folge haben, in Zukunft auch als erkenntnisstheoretisch nothwendig erweisbar sein werden. Jedesfalls wird man schon jetzt zugeben müssen, dass sie sehr einfach und plausibel sind. Vor allen lässt sich *eine* Annahme über die Natur der Beziehungsfunction als eine sehr natürliche bezeichnen, dass nämlich in ihr die Geschwindigkeit des die Wirkung erleidenden Atomes einmal als Divisor der ganzen Function auftritt, welcher also ohne Weiteres vor das

Differentialzeichen treten könnte, unbeschadet eines noch anderweiten Einflusses der Geschwindigkeit. Die obigen Formeln würden dann, wenn man noch die Massen durch m mit Indices bezeichnet, so geschrieben werden können:

$$d\ v_p = \frac{m_q}{v_p} d_p\ f\ (r,\ \alpha,\ \beta,\ v_p,\ v_q)$$

$$d\ v_q = \frac{m_p}{v_q} d_q\ f\ (r,\ \alpha,\ \beta,\ v_p,\ v_q)$$

Die so formulirte Annahme wird ganz besonders natürlich erscheinen, wenn man sich den Divisor v von vorn herein ausserhalb der Beziehungsfunction denkt und die Gleichung mithin so ausspricht: die Aenderung, welche im Zeitdifferential die Geschwindigkeit des Atomes erleidet, ist der Aenderung seiner Beziehung zu anderen Atomen direct proportional und ist umgekehrt proportional dem Werthe, welchen die Geschwindigkeit bereits hat. Dies würde heissen, dass ein Zustand seiner Aenderung um so grösseren Widerstand entgegensetzt, je intensiver er bereits ist. Bekanntlich nimmt man nach *Fechner* an, dass dieser Satz für die Aenderung der Empfindungszustände beseelter Wesen Geltung hat. Freilich soll nach *Fechner*'s Gesetz die Aenderung des Empfindungszustandes, gleiche Aenderung des Reizes vorausgesetzt, nicht der schon vorhandenen Empfindungsintensität selbst verkehrt proportional sein, wohl aber doch auch kleiner sein, wenn diese grösser ist.

Wir wollen uns jetzt ein System von n aufeinander wirkenden Atomen vorstellen und ihre Massen durch $m_1, m_2 \ldots m_p \ldots m_q \ldots m_n$ sowie ihre absoluten Geschwindigkeiten durch $v_1, v_2 \ldots v_p \ldots v_q \ldots . v_n$ bezeichnen. Eines dieser Atome m_p wird von jedem der andern eine Einwirkung erfahren nach Massgabe der Aenderung seiner Beziehung zu demselben, und es darf wohl für selbstverständlich gelten, dass diese Einwirkungen sich einfach summiren, denn es kann nicht gedacht werden, dass die eine Wirkung die andere stört. Die Aenderung der Geschwindigkeit v_p wird sich also darstellen lassen als eine Summe von n—1, Summanden, deren jeder von einem der übrigen n—1 Atome herrührt.

$$(1) \qquad d\,v_p = \frac{1}{v_p} \cdot \sum_{q=1}^{q=n} m_q d_p\ f\ (r,\ \alpha,\ \beta,\ v_p,\ v_q)$$

In der Summe fehlt natürlich das Glied für $q = p$, da ein Atom keine Wirkung auf sich selbst ausübt. Solcher Gleichungen lassen sich n bilden, nämlich für jedes Atom eine. Sie genügen so ohne Weiteres nicht, den Fortgang der Bewegung des Systemes von einem bestimmten Anfangszustand aus zu bestimmen. Hierzu sind vielmehr 3 n Gleichungen erforderlich, wodurch die 3 n Coordinaten der n Atome als Functionen der Zeit bestimmt werden könnten. Es scheint demnach, als könne man noch 2 n Gleichungen zwischen den Coordinaten der n Atome willkürlich festsetzen, ohne die Bewegung unter der Wechselwirkung der n Atome unmöglich zu machen. Dies heisst soviel als jedem Atom eine bestimmte Bahn vorzuschreiben. In der That ist dies auch bei den hier zu Grunde gelegten Anschauungen ebenso gut möglich als bei der Annahme von Centralkräften im Sinne der heutigen Mechanik. Offenbar ist dies aber nicht der Fall der wirklichen Natur, in welcher ohne Zweifel alle Richtungen des Raumes dem Atome von jedem Punkte aus gleich zugänglich wird. Die n Gleichungen von der Form (1) müssen also in Wahrheit 3 n Gleichungen enthalten, was sogleich gezeigt werden soll, nachdem wir die Form durch beiderseitige Multiplication mit v_p unter Berücksichtigung der Gleichung $v_p \, d \, v_p = \frac{1}{2} d \, (v_p^2)$ umgestaltet haben in

$$(2) \qquad \frac{1}{2} d \, (v_p^2) = \sum_{q=1}^{q=n} m_q \, d_p \, f \, (r, \alpha, \beta, v_p \, v_q)$$

Auf der rechten Seite kann man die Aenderung, welche die Beziehungsfunction durch das Vorrücken der Masse m_p um die unendlich kleine Strecke $v_p \, dt$ erleidet, auch darstellen als die Summe dreier Aenderungen, welche entstehen, wenn man den Punct successive um die Projectionen von $v_p \, dt$ auf die Coordinatenaxen verschiebt. Man kann also setzen

$$d_p \, f = \frac{d_p \, f_{p,\,q}}{dx_p} dx_p + \frac{d_p \, f_{p,\,q}}{dy_p} dy_p + \frac{d_p \, f_{p,\,q}}{dz_p} dz_p$$

wo zur Abkürzung ein blosses $f_{p,\,q}$ für $f \, (r_{p,\,q}, \alpha_{p,\,q}, \beta_{p,\,q}, v_p, v_q)$ gesetzt ist. Linker Hand hat man

$$v_p^2 = \left(\frac{d \, x_p}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d \, y_p}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d \, z_p}{dt}\right)^2 \text{ also}$$

$$\frac{1}{2} d \, (v^2_p) = \frac{d^2 x_p}{dt^2} d \, x_p + \frac{d^2 y_p}{dt^2} dy_p + \frac{d^2 z_p}{dt^2} dz_p$$

Mithin gestaltet sich jede der n Gleichungen von der Form (2) so:

$$(3)\quad \frac{d^2x_p}{dt^2}\,d\,x_p + \frac{d^2y_p}{dt^2}\,dy_p + \frac{d^2z_p}{dt^2}\,dz_p = d\,x_p \sum_{q=1}^{q=n} m_q \frac{d_p\,f_{p,q}}{dx_p} + dy_p \sum_{q=1}^{q=n} m_q \frac{d_p\,f_{p,q}}{dy_p} + dz_p \sum_{q=1}^{q=n} m_q \frac{d_p\,f_{p,q}}{dz_p}$$

Ist die Bewegung frei, so muss diese Gleichung gelten für jede Richtung der Bewegung von m_p, d. h. also für jedes Verhältniss zwischen den Coordinatendifferentialen. Dann kann sie aber nur erfüllt sein, wenn die Coefficienten dieser Differentiale $dx_p\ dy_p\ dz_p$ einzeln einander gleich sind; sie zerfällt daher in drei Gleichungen

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x_p}{dt^2} = \displaystyle\sum_{q=1}^{q=n} m_q \frac{d\,f_{p,q}}{dx_p} \\[2ex] \dfrac{d^2y_p}{dt^2} = \displaystyle\sum_{q=1}^{q=n} m_q \frac{d\,f_{p,q}}{dy_p} \\[2ex] \dfrac{d^2z_p}{dt^2} = \displaystyle\sum_{q=1}^{q=n} m_q \frac{d\,f_{p,q}}{dz_p} \end{cases}$$

Die Indices p am d rechter Hand können jetzt wegbleiben, da schon durch die Differentiale im Nenner dasselbe ausgedrückt ist.

Man hat somit 3 n Gleichungen, durch welche der weitere Ablauf der Bewegung des Systemes von irgend einem Anfangszustande aus vollständig bestimmt ist. Es ist wichtig zu bemerken, dass in den neuen Gleichungen die Componenten der absoluten Bewegung nicht mehr vorkommen. Ihre Anwendung setzt also nicht die bekanntlich unmögliche Kenntniss der absoluten Bewegung der Atome voraus. Sie sind vielmehr anwendbar auf die Betrachtung der relativen Bewegung in einem willkürlich gewählten Coordinatensystem, das man sich selbst noch mit jeder beliebigen Geschwindigkeit im absoluten Raume begabt denken darf. Diese Bemerkung wird auch dadurch nicht hinfällig, dass in die Function f die Grössen v_p und v_q als Constante eingehen, denn wir werden weiter unten sehen, dass diese Grössen in jener Function mit α und β derart verbunden vorkommen, dass die Kenntniss ihrer absoluten Werthe nicht erforderlich ist.

Man erkennt in den Gleichungen (4) auch sofort die allgemein bekannten Fundamentalgleichungen der Mechanik für den Fall von Centralkräften, deren Intensität lediglich vom Abstande der aufeinander wirkenden Massen abhängt, wenn man in der Beziehungsfunction die Abhängigkeit von den Winkeln α und β sowie von den Constanten v unterdrückt und diese Function lediglich als Function von r denkt.

Es bleibt jetzt noch übrig zu zeigen, dass eine sehr einfache und natürliche Annahme über die Form der Beziehungsfunction das *Weber*'sche Gesetz ergibt. Was zunächst das Auftreten von r in der Beziehungsfunction betrifft, so ist die natürlichste Annahme jedenfalls die, dass der Werth der Beziehung zweier Massenpunkte ihrem Abstande umgekehrt proportional ist. In der That wird Jeder die Beziehung zweier Atome ceteris paribus um so inniger oder intensiver nennen, je näher sie aneinander sind oder je kleiner ihr Abstand ist. Man würde demnach zu setzen haben

$$f\,(r,\ \alpha,\ \beta,\ v_p,\ v_q) = \frac{1}{r}\ \varphi\,(\alpha,\ \beta,\ v_p,\ v_q)$$

und es wäre nur noch die Form der Function $\varphi\,(\alpha,\ \beta,\ v_p\ v_q)$ zu finden. Ich bin nun allerdings ausser Stande, eine bestimmte Annahme hierüber als a priori nothwendig zu begründen, glaube aber, dass es vielleicht später gelingen wird, diejenige Annahme als erkenntnisstheoretisch nothwendig zu erweisen, welche, wie sogleich gezeigt werden soll, zur Potentialfunction des *Weber*'schen Gesetzes führt. Jedesfalls hat sie auch schon von vorn herein die Erwägung für sich, dass bei ihr, wie oben bemerkt wurde, Alles aus den Formeln verschwindet, was eine Kenntniss der absoluten Bewegung voraussetzen würde. Die Annahme besteht darin, dass man

$$\varphi\,(\alpha,\ \beta,\ v_p,\ v_q) = \pm\,(1 - a\,[v_p \operatorname{Cos}\alpha + v_q \operatorname{Cos}\beta]^2)$$

setzt, wo a eine Constante bedeutet, welche höchstens noch von der unveränderlichen Natur des Atompaares m_p und m_q, nicht aber von ihrer Beziehung oder von ihrem Zustande abhängig ist. Wie man leicht sieht, ist $(v_p \operatorname{Cos}\alpha + v_q \operatorname{Cos}\beta)\ dt$ nichts Anderes als das vollständige Differential des Abtandes r. Setzt man also noch $a = \frac{1}{c^2}$, wo c die in *Weber*'s Formeln auftretende kritische Geschwindigkeit bedeutet, so hat man

$$\frac{1}{r} \varphi (\alpha, \beta, v_q, v_q) = \pm \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right)$$

was die bekannte Potentialfunction des *Weber*'schen Gesetzes ist. Gilt das obere Vorzeichen für ein Atompaar, so wirken die beiden im Sinne der bisher geläufigen Anschauungsweise anziehend aufeinander, denn es nimmt alsdann, wie aus (1) zu ersehen, die Geschwindigkeit bei der Annäherung im Allgemeinen einen positiven Zuwachs. Das untere Vorzeichen gilt, wenn die Atome abstossend aufeinander wirken.

Es wird gut sein, hier noch einmal ausdrücklich darauf aufmerksam zu machen, dass in der Function f die Grössen v_p und v_q bei der Differenzirung als constante zu behandeln waren und dass daher bei dieser Operation an der Function in ihrer jetzigen Gestalt nur *der* Zuwachs von $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ in Rechnung gebracht werden darf, welchen es erhält vermöge der gerade vorhandenen Geschwindigkeit, nicht vermöge der in dem betrachteten Zeitdifferential erfolgenden absoluten Beschleunigung. In der That ist ja die Aenderung von $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ ein Theil der *Ursache* der Beschleunigung und kann also unmöglich von dieser als ihrer Wirkung abhängen.

Weber hat bekanntlich in seinen neueren Abhandlungen die entgegengesetzte Ansicht vertreten. Sie führt aber zu einer Bestimmung der sog. Kraftcomponenten, auf welche das Princip des Parallelogrammes der Kräfte nicht anwendbar ist. Wenn auch diese Consequenz die Ansicht *Weber*'s nicht geradezu widerlegt, so dürfte sie doch geeignet sein, einiges Bedenken dagegen zu erregen und der hier vertretenen Auffassung einen Vorzug zu geben.

Am Schluss dieses Versuches, die bekannten Grundgleichungen der Mechanik ohne die Vorstellung von Kräften abzuleiten, muss ich noch einer Dunkelheit gedenken, die auch in ihr noch übrig bleibt. Wenn nämlich im Fortgange der Verursachung die absolute Geschwindigkeit eines Atomes jemals der absoluten Null gleich wird, so muss sie von da an Null bleiben; es ist dann gewissermassen der Einwirkung von andern Atomen entzogen, während es seinerseits noch auf dieselben einwirken kann. Möglicherweise ist diese Schwierigkeit zu lösen durch den Nachweis, dass die

absolute Geschwindigkeit den Werth Null überall nie erreichen kann, sofern dies ja nur die eine Grenze der möglichen Werthe der absoluten Geschwindigkeit ist. Jedesfalls ist die Schwierigkeit bei der Begründung auf den Begriff der Kraft als einer Bewegungstendenz viel grösser, sofern hier, wie oben schon hervorgehoben wurde, sogar im Falle der *relativen* Ruhe, die doch im Bereiche der wirklichen Beobachtung liegt, die fernere Einwirkung aufhören müsste. Es mag noch ausdrücklich ausgesprochen werden, dass die soeben berührten Schwierigkeiten lediglich in den Grundanschauungen liegen. Die Formeln (4), die man aus der einen wie aus der andern Grundanschauung ableiten kann, enthalten die vollständige Beschreibung des Bewegungsablaufes ohne alle Dunkelheit. Die Differentialquotienten der Coordinaten nach der Zeit können in ihnen von positiven zu negativen Werthen durch o hindurch übergehen.

1561

Alexander Ziwet

Programm

des

städtischen Realgymnasiums

zu Königsberg i. Pr.,

mit welchem zur

öffentlichen Prüfung seiner Schüler

Freitag den 28. März, 9 Uhr morgens,

im Namen des Lehrer-Kollegiums

ergebenst einladet

Prof. Hugo Kleiber,
Direktor.

Königsberg, 1890.

Hartungsche Buchdruckerei.

1890. Progr. Nr. 20.

Beiträge zur Mechanik.

I. Euler stellt in der Einleitung zu seiner Theoria motus corporum solidorum in Abschnitt 131 bis 136 die Thatsache fest, dass die Undurchdringlichkeit der Masse Ursache ist des Entstehens von Kräften, solcher nämlich, welche die gegenseitige Durchdringung der Körper verhindern. In Abschn. 137 findet er es dann höchst wahrscheinlich, dass ganz allein auf diese Ursache, also auf die Undurchdringlichkeit in allen Fällen sich zurückführen lasse das Entstehen von Kräften; da er weiter hinzusetzt, dass man von diesem Entstehen und von der Wirksamkeit solcher Kräfte nichts behaupten könne, bevor man die Einwirkung von Kräften auf Massen ganz im allgemeinen untersucht habe, so ist wohl klar, dass schon Euler die wichtige Aufgabe, die Einwirkung von Kräften auf Massen ohne irgend welche beschränkende Voraussetzung zu untersuchen, in ihrer ganzen Bedeutung erkannt habe. Und doch hat er mit dieser Frage in allgemeinster Fassung sich gar nicht weiter beschäftigt; wo er die Bewegung von Massen durch Kräfte behandelt, da nimmt er für die letzteren es als selbstverständlich an, dass sie auf bewegte Massen ebenso einwirken wie auf ruhende. Nun hat zwar die nur in dieser Beschränkung ausgeführte Bearbeitung der Frage für die Physik heute immer noch dieselbe Bedeutung wie vor 150 Jahren; wird doch noch heute für die Fernwirkung der Schwere, des Magnetismus und der Elektricität jene selbe Voraussetzung gemacht, die schon damals als selbstverständlich angenommen wurde; Zeit ist es aber, dass endlich auch in der allgemeinsten Form, ohne irgend welche zweifelhafte Voraussetzung jene schon von Euler richtig angedeutete Frage vorgenommen werde: Wie hängt bei der Einwirkung einer beliebig grossen Kraft auf eine beliebig grosse Masse die sich ergebende Bewegung ab von der Grösse der Kraft und der Massen?

II. Auf welche unzweifelhaft zuverlässigen Unterlagen darf die Bearbeitung dieser Aufgabe gegründet werden? Was darf als notwendige Eigenschaft der Masse und der Kraft vorausgesetzt werden? Nun, für die Masse ist diese Frage leicht beantwortet: Sie muss undurchdringlich sein, wenn sie wirklich vorhanden, nicht aber nur ein bloss gedachtes Gebilde sein soll, wie solche ja in der Mathematik öfters behandelt werden; an einem bestimmten Orte des gerade der Betrachtung unterworfenen Raumes darf sich also nur eine einzige Masse befinden — s. Euler a. a. O. Abschn. 123 bis 128 —; untrennbar verbunden mit der Undurchdringlichkeit ist aber auch die Ausdehnung; und so wie endlich eine Masse irgend einer auf sie einwirkenden Ursache ausgesetzt wird, sofort zeigt sich an ihr eine neue notwendige Eigenschaft: die Masse hat dann Trägheit oder Beharrungsvermögen — Euler a. a. O. 92 bis 96.

Nun wird zwar zuweilen die Undurchdringlichkeit als wesentliche Eigenschaft der Masse ganz geleugnet, und wer statt ausdedehnter Massenteilchen nur Kraftmittelpunkte zur Bildung aller endlichen Massen notwendig annimmt, der kann aus den abstossenden Wirkungen solcher

Kraftmittelpunkte die thatsächlich vorhandene Undurchdringlichkeit den Beobachtungen entsprechend erklären, der hat ausserdem noch das Vergnügen, für die feinsten Hilfsmittel der höheren Mathematik eine sonst kaum zu beschaffende Menge von Übungsaufgaben auf dem Gebiete der Physik zu finden; für die eigentliche Wissenschaft der Physik ist aber diese Auffassung und Behandlung der Undurchdringlichkeit ganz ohne Wert. Wären nämlich durch irgend einen Zufall zwei — durchdringlich angenommene — Massen an einen und denselben Ort des Raumes geraten, an welchen Eigenschaften wollte man wohl sie von einander unterscheiden, wie könnte diese Komödie der Irrungen sich wieder lösen? Wer die Undurchdringlichkeit nicht als notwendige Eigenschaft der Masse ansieht, der verzichtet gleichzeitig darauf, eine gegebene Masse unzweideutig von jeder andern zu unterscheiden, der verzichtet damit auf jede wissenschaftliche Behandlung der Physik. Wenn wir also die Ausdehnung, die Undurchdringlichkeit und die Trägheit als notwendige Eigenschaften der Masse ansehn, so beschränken wir dadurch unsere Aufgabe noch nach keiner Richtung hin, offen bleibt vielmehr noch die Frage, ob wir mit jenen Eigenschaften der Masse schon ihr ganzes Wesen erschöpfend dargestellt haben? Das kann sich erst später bei einem Vergleiche der gezogenen Folgerungen mit der Wirklichkeit zeigen.

Von Voraussetzungen über das Wesen der Kraft und der Bewegung darf abgesehen werden; Kraft an sich kann es nicht geben, Bewegung an sich ebenso wenig; für beide Begriffe ist das Vorhandensein von Masse die unentbehrliche Voraussetzung; wie dem Begriffe der Bewegung zu Grunde liegt der des Raumes, so muss das Wesen der Kraft sich ableiten lassen aus dem der Masse, diese Ableitung ist der nächste notwendige Schritt.

III. Aus dem Wesen der Masse ergiebt sich schon eine wichtige Folgerung für die Wirksamkeit von Kräften.

Thatsächlich kann jede Masse von Kräften angegriffen, d. h. in ihrer Bewegung beeinflusst werden.

Jede Masse muss demnach dem Angreifen einer Kraft dauernd irgend eine Handhabe darbieten.

Diese Handhabe muss eine wesentliche Eigentümlichkeit des Massenteilchens sein, so dass es sich nur an ihr von dem bloss gedachten Körper oder dem ausgedehnten Raumteilchen unterscheidet; dieses letztere wird nämlich n i c h t von Kräften angegriffen.

Von dem ausgedehnten Raumteilchen unterscheidet das Massenteilchen sich nur durch Undurchdringlichkeit und Trägheit; eine dieser beiden Eigenschaften muss also für das Angreifen von Kräften die Möglichkeit liefern.

Die Trägheit der Masse wird erst dann wirklich, wenn die Masse schon durch eine Kraft angegriffen wird; diese Trägheit also, die eine, jede Krafteinwirkung begleitende und voraussetzende Äusserung der Masse ist, sie kann nicht selbst Voraussetzung für diese selbe Einwirkung sein.

Übrig bleibt dann nur noch die Undurchdringlichkeit; sie ist die einzige Eigenschaft des Massenteilchens, die den Angriff irgend einer Kraft auf die Masse ermöglicht. Nur vermöge seiner Undurchdringlichkeit kann demnach das Massenteilchen von einer Kraft angegriffen werden oder eine Bewegungsänderung erleiden; diese Undurchdringlichkeit kann nur in Wirkung treten in einer Masse bei unmittelbarer Berührung mit einer zweiten Masse; das Einzige also, was wir hier als Kraft, d. h. als Ursache einer Bewegungsänderung für unsere Aufgabe behandeln dürfen, das ist die Wirkung des Stosses. Sollte es auch Kräfte geben, die wie die Schwere und die magnetische Anziehung scheinbar unvermittelt in die Ferne wirken, für die vorliegende Aufgabe, für die wir der Masse keine besondere Eigenschaft ausser den notwendigen beilegen wollten, sind solche Fernwirkungen von Kräften durchaus unbrauchbar; um unserer Bearbeitung der vorliegenden Frage die erstrebte Allgemeinheit zu bewahren, dürfen wir nur solche Kräfte uns wirksam denken, die, wie Stoss oder Druck, auf ein Massenteilchen nur deshalb einwirken, weil dieses vermöge seiner Undurchdringlichkeit die ungestörte Bewegung einer

andern undurchdringlichen Masse unmöglich macht, somit Anlass zu Bewegungsänderungen liefert oder mit andern Worten eine Kraft hervorbringt. Zu einer anschaulichen Vorstellung solcher Kräfte zu gelangen, ist recht leicht.

Die Pulverladung eines Geschützes liefert während ihres Aufbrennens bekanntlich bewegende Kraft sowohl für das Geschütz wie für das Geschoss; die aus dem kleinen Raume des festen Pulvers sich entwickelnden Verbrennungsgase haben das Bestreben, sich auf einen sehr viel grösseren Raum auszudehnen; ihre Ausdehnung findet an den undurchdringlichen Oberflächen der umgebenden Körper eine Schranke und giebt deshalb Anlass zur Kraftentwicklung; so unbekannt auch der eigentliche innere Hergang bei der Verbrennung des Pulvers uns noch ist, die Wirkung nach aussen auf Geschütz und Geschoss ist augenscheinlich und leicht verständlich.

Die Muskelkraft eines Schiffsjungen, der sich mit seinem Boote von der Schiffswand abstösst, ist zwar ihrem innersten Wesen nach uns noch ein Rätsel; ihre Wirkung nach aussen ist aber nur deshalb möglich, weil die Schiffswand für das gegen sie gestemmte Ruder undurchdringlich ist, und weil auf der anderen Seite die Bretter des Bootskörpers ebenso undurchdringlich sind für die Füsse des gegen sie drückenden Jungen; der durch die Muskelkraft hervorgebrachte, mit Hilfe des Ruders zwischen Boot und Schiffswand wirkende Druck muss in den beweglichen Massen Geschwindigkeit erzeugen.

In den vielfach als Spielzeug hergestellten Luftpistolen treibt eine zusammengepresste stählerne Feder bei ihrer Verlängerung den Pfeil oder das Schrotkorn aus dem Laufe; wie in den kleinsten Teilchen des Stahles die Spannung entsteht und erhalten wird, darüber fehlt uns jede Vorstellung; wie aber die Feder nach aussen wirkt, das bedarf kaum mehr einer Erklärung; weil der Stahl und die seiner Verlängerung im Wege liegenden Körper undurchdringlich sind, deshalb muss jeder Verlängerung der Stahlfeder entsprechen eine Bewegung in mindestens einem der Körper, die jener Verlängerung im Wege lagen.

Wie in diesen drei Beispielen die Massen nur vermöge ihrer Undurchdringlichkeit in Bewegung gesetzt wurden, ebenso muss für unsere ganze Betrachtung allein die Undurchdringlichkeit der Masse Anlass geben zum Angriffe von Kräften. Hieraus ergiebt sich aber eine wichtige Folgerung. Für uns ist hier nicht mehr die Annahme zulässig, die Euler ohne Bedenken in Bezug auf das Wesen oder vielmehr die Wirksamkeit der Kräfte voraussetzt. In der Theoria motus werden nur solche Kräfte weiter behandelt, die auf einen bewegten Körper ebenso einwirken wie auf einen ruhenden — s. Abschn. 139 —; bewegt sich aber im Geschützrohre das Geschoss schon ebenso schnell wie die aufflammenden und sich ausdehnenden Pulvergase — ob dies möglich ist, gehört nicht hierher — so kann es durch sie nicht weiter beschleunigt werden; eine Kraft, die auf ein Massenteilchen nur vermöge seiner Undurchdringlichkeit einwirkt, muss eine sich schon bewegende Masse anders angreifen als eine ruhende. Unbrauchbar ist deshalb auch für uns die von Euler verwendete Einheit für das Messen von Kräften, denn auch bei der Feststellung dieser Einheit ist benutzt dieselbe für uns unzulässige Annahme. Nicht zu entbehren ist daher für die vorliegende Frage die Festsetzung hier brauchbarer Einheiten für Kräfte und Massen.

IV. Wenn in einem Geschütze von 450 kg Gewicht eine Pulverladung von 1,5 kg dem 7 kg schweren Geschosse eine Geschwindigkeit von etwa 440 m giebt, dann muss unter sonst gleichen Umständen in einem Geschütze von 900 kg Gewicht eine Ladung von 3 kg Pulver dem Geschosse von 14 kg Gewicht wieder jene selbe Geschwindigkeit von 440 m erteilen; eine im Verhältnis grössere Pulverladung wird eine grössere Geschwindigkeit liefern, eine kleinere Ladung auch eine kleinere Geschwindigkeit. Die hier vorausgesetzte Gleichheit der Nebenumstände lässt sich so genügend genau erreichen, dass schon lange für die Artillerie verwendet werden darf der Begriff des sog. Ladungsquotienten, d. h. des Quotienten aus Pulvergewicht durch Geschossgewicht. Unentbehrlich für den Artilleristen ist eigentlich die Kenntnis, wie die Geschossgeschwindigkeiten abhängen von der aus dem verbrennenden Pulver entstehen-

den Kraft; als Krafteinheit müsste er also wählen diejenige Kraft, welche aus der Gewichtseinheit Pulver gewonnen werden kann; statt dessen nimmt er thatsächlich, indem er den Ladungsquotienten verwendet, als Einheit diejenige Kraft, welche der Gewichtseinheit des Geschosses die Einheit der Geschwindigkeit erteilt. Für unsere Aufgabe hier wollen wir ähnlich dem Artilleristen feststellen, wie die Geschwindigkeit einer Masse abhängt von der Grösse der diese Bewegung veranlassenden Kraft; wir werden daher am besten thun, als Einheit der Kraft diejenige festzusetzen, welche der beliebig gewählten Masseneinheit die Einheit der Geschwindigkeit erteilt. Hierbei zeigt sich aber eine eigentümliche Schwierigkeit.

Eine Kraft in dem hier angenommenen Sinne ist möglich nur zwischen mindestens zwei Massen. Der Druck der sich ausdehnenden Pulvergase kann nur dann einem Geschosse Geschwindigkeit geben, wenn eine zweite träge Masse vorhanden ist, z. B. die des Geschützrohrs; wo ein wirkliches Geschützrohr fehlt, wie bei den Raketen, da liefert die Masse der umliegenden Luft den zur Bewegung erforderlichen Widerstand. Ein Schiffsjunge kann sein Boot nur dann durch seine Muskelkraft in Bewegung setzen, wenn er an irgend einer andern Masse Widerstand findet; freilich kann diese andere Masse statt einer Schiffswand auch nur das von dem Ruder getroffene Wasser sein. Eine sich ausdehnende Sprungfeder kann mit dem einen Ende nur dann einer Masse Geschwindigkeit erteilen, wenn am entgegengesetzten Ende eine zweite Masse — und sei es auch nur die der Feder selbst — durch ihre Trägheit den nötigen Widerstand liefert. Kurz, Wirkung ist nicht möglich ohne Gegenwirkung; eine einzige Masse der Einwirkung einer Kraft unterwerfen zu wollen, ist bei unserer Anschauung von der Wirksamkeit der Kräfte unmöglich; die Undurchdringlichkeit kann erst dann in einem Massenteilchen sich wirksam zeigen, wenn seine Oberfläche gegen die eines zweiten Teilchens schlägt; nicht bei einer Masse können wir also die Abhängigkeit der Bewegung von der Grösse der erregenden Kraft behandeln wollen, nein, mindestens zwei müssen wir gleichzeitig der Betrachtung unterwerfen. Gerade diese Thatsache liefert aber ein sicheres Hilfsmittel für die Messung von Massen. Bei der Wirkung irgend einer Kraft auf oder zwischen zwei Massen ist eine Verschiedenheit des Erfolges in den beiden Massen sicher zu erwarten, wenn sie irgend eine Verschiedenheit zeigen; diese Verschiedenheit kann nur beruhen in einer Verschiedenheit der Grössen; eine Kraft also, die zwischen zwei gleichen Massen wirkt, muss in beiden eine gleich grosse Bewegungsänderung hervorrufen. Ob Massen einander gleich sind, das können wir demnach sicher erkennen, sowie wir zwischen ihnen irgend eine Kraft wirken lassen; nehmen wir dann noch eine beliebige Masse als Einheit, so macht das Messen verschiedener Massen keine Schwierigkeit mehr. Damit haben wir aber auch einen Weg gefunden, wie wir zur Messung von Kräften gelangen. In der Wahl der Einheit sind wir nicht beschränkt; im folgenden soll also als Einheit der Kraft diejenige angenommen werden, die zwischen zwei gleichen Massen von je einer halben Masseneinheit wirkend, jeder derselben die Geschwindigkeit 1 giebt, gerechnet nach entgegengesetzten Richtungen; lassen wir dann k solcher Krafteinheiten nebeneinander oder nacheinander auf die vorhandenen Massen einwirken, so ist im ganzen die Kraft k verwendet, auch das Messen von Kräften macht dann keine weitere Schwierigkeit: zu beachten ist nur, dass die so festgestellte Krafteinheit nicht auch im gewöhnlichen engeren Sinne eine Kraft, sondern eine Arbeit ist.

Genauer ist auch noch die Richtung zu bestimmen für die durch eine Kraft veranlasste Bewegung. Ein Bootsmann kann sich nicht nur von einem Fahrzeuge mit seinem Boote abstossen, er kann sich auch an dasselbe heranziehen; eine Stahlfeder kann, wenn sie ausgereckt worden ist, durch ihr Zusammenziehen auch zwei Massen einander nähern; die Einwirkung einer Masse auf eine andere vermöge der Undurchdringlichkeit beider muss aber stets eine Vergrösserung ihres Abstandes — diesen gerechnet zwischen den Berührungsstellen — zur Folge haben; nur so soll im folgenden die Wirkung einer Kraft zwischen zwei Massen verstanden werden, dass stets der Abstand derselben voneinander durch jene Einwirkung vergrössert wird.

V. Man denke sich 2p unserer Krafteinheiten, jede wirkend zwischen je zwei halben Masseneinheiten; dann muss jede der bewegten Massen die Geschwindigkeit 1 bekommen, wobei wir die Verschiedenheit der Richtungen noch unberücksichtigt lassen. Nimmt man die 2p geraden Linien, auf denen alle Bewegungen geschehen, einander parallel und so nahe an, dass die 2p halben Masseneinheiten, die nach derselben Richtung sich hin bewegen, zu einer Masse p vereinigt werden können, so findet man als erstes unzweifelhaftes Ergebnis, dass die Kraft 2p, wirksam zwischen zwei gleichen Massen von je p Einheiten, jeder derselben die Geschwindigkeit 1 giebt, so dass sie sich nach entgegengesetzten Richtungen hin fortbewegen. Zu lösen haben wir aber nur folgende Aufgabe: Wenn die Kraft 2p wirksam ist zwischen zwei ungleichen Massen von r und q Einheiten, welche Geschwindigkeit giebt sie dann jeder derselben? Ich fange mit möglichst einfachen Fällen an; auch nehme ich der Einfachheit wegen die Massen von so regelmässiger Gestalt an, dass die Richtungen der wirkenden Kräfte immer durch die Massenmittelpunkte hindurchgehen; dann darf ich von allen drehenden Bewegungen absehen.

Man denke sich zwei ruhende Massen M_1 und M_2, jede gleich 1; zwischen ihnen werde wirksam die Kraft 2; dann erhält jede der Massen die Geschwindigkeit 1, nur nach entgegengesetzten Richtungen. Um diese Richtungen auseinander zu halten, rechne ich auf der die Massenmittelpunkte verbindenden Geraden die positive Richtung von M_2 nach M_1 hin, die negative entgegengesetzt; dann hat die Masse M_1 die Geschwindigkeit $+1$, die Masse M_2 die Geschwindigkeit -1.

Jetzt denke man sich M_1 zerschnitten in zwei gleiche Teile durch eine Ebene senkrecht zur Bewegungsrichtung; die vorangehende Hälfte heisse M_{11}, die nachfolgende M_{21}. Für einen Beobachter, der auf M_1 sich befindet, der nichts von M_2 wahrnimmt, dem also auch die Bewegung von M_1 unbekannt sein wird, für ihn müssen sicher vorhanden sein die beiden Massen M_{11} und M_{21}, nebeneinander ruhend, jede gleich $\frac{1}{2}$; wenn also dieser Beobachter in dem Raume, für den M_1 relativ in Ruhe ist, zwischen M_{21} und M_{11} auf der Verbindungslinie der Massenmittelpunkte die Kraft 1 wirksam anbringt, dann muss er der Masse M_{11} die neue Geschwindigkeit $+1$, der Masse M_{21} dagegen die neue Geschwindigkeit -1 geben. Die so erzielte Bewegung werde aber auch verfolgt von einem zweiten Beobachter, der sich die Anfangslage der ruhenden Massen M_1 und M_2 gemerkt hat, der also auch die durch die erste Kraft 2 hervorgebrachte Bewegung wahrgenommen hat. Für ihn hat jetzt die Masse M_2 unverändert die Geschwindigkeit -1; die Masse M_{21} hatte von der ersten Krafteinwirkung her die Geschwindigkeit $+1$; von der zweiten Kraft bekommt sie hinzu die Geschwindigkeit -1; sie wird folglich zuletzt in Ruhe sein. Die Masse M_{11} endlich hatte von der ersten Krafteinwirkung her die Geschwindigkeit $+1$ erhalten; bei der zweiten Krafteinwirkung kommt hinzu die neue Geschwindigkeit $+1$; als Endgeschwindigkeit ergiebt sich also für die Masse M_{11} die Grösse $+2$. Das Gesamtergebnis des bisherigen Verfahrens ist also: Nach Verwendung der Gesamtkraft 3 auf die Gesamtmasse 2 hat eine Masse 1 die Geschwindigkeit -1 erhalten, eine andere Masse $\frac{1}{2}$ hat die Geschwindigkeit $+2$, die noch übrig bleibende Masse $\frac{1}{2}$ ist in Ruhe.

Mit dieser zuletzt noch ruhenden Masse $\frac{1}{2}$ will ich jetzt ebenso verfahren wie vorher mit der Masse 2. Die Masse ist nur $\frac{1}{4}$ mal so gross wie die vorher, folglich werde ich auch nur $\frac{1}{4}$ der Kraft verwenden; das Ergebnis muss dann sein: Nach Verwendung der Gesamtkraft $\frac{3}{4}$ auf die Gesamtmasse $\frac{1}{2}$ hat eine Masse $\frac{1}{4}$ die Geschwindigkeit -1 erhalten, eine andere Masse $\frac{1}{8}$ hat die Geschwindigkeit $+2$; die noch übrig bleibende Masse $\frac{1}{8}$ ist in Ruhe.

Mit dieser zuletzt noch ruhenden Masse $\frac{1}{8}$ will ich wieder ebenso verfahren, wie vorher mit der Masse $\frac{1}{2}$; die Masse $\frac{1}{8}$ ist nur $\frac{1}{4}$ mal so gross wie die vorher, folglich werde ich

auch nur $\frac{1}{4}$ der Kraft verwenden; das Ergebnis muss dann sein: Nach Verwendung der Gesamtkraft $\frac{3}{16}$ auf die Gesamtmasse $\frac{1}{8}$ hat eine Masse $\frac{1}{16}$ die Geschwindigkeit -1 erhalten; eine andere Masse $\frac{1}{32}$ hat die Geschwindigkeit $+2$, die noch übrig gebliebene Masse $\frac{1}{32}$ ist in Ruhe.

Wenn ich dieses Verfahren mit den zuletzt in Ruhe bleibenden Massen unendlich oft wiederhole, so ist zuletzt die ganze Masse 2 in Bewegung gesetzt. Verbraucht sind die Kraftmengen $3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} +$ u. s. f. $= 4$.

Von bewegter Masse sind vorhanden
mit der Geschwindigkeit -1 die Massen $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} +$ u. s. f. $= \frac{4}{3}$
mit der Geschwindigkeit $+2$ die Massen $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} +$ u. s. f. $= \frac{2}{3}$
Die beiden durch die Kraft 4 angegriffenen Massen sind hier nicht mehr gleich, die eine ist doppelt so gross wie die andere: das Ergebnis der Krafteinwirkung ist, dass die doppelt so grosse Masse, abgesehen vom Vorzeichen, halb so grosse Geschwindigkeit hat wie die kleinere. Nehme ich ferner, um einfachere Zahlen zu erhalten, die Massen $\frac{3}{2}$pmal so gross, lasse auf sie aber auch $\frac{3}{2}$pmal so grosse Kraft einwirken, so ergiebt sich: Wenn die Kraft 6p in der vorher angegebenen Weise auf die Gesamtmasse 3p wirkt, dann erhält die Masse 2p die Geschwindigkeit -1, die Masse 1p dagegen die Geschwindigkeit $+2$.

Ehe ich zu allgemeineren Werten übergehe, führe ich erst das vorher behandelte Zahlenbeispiel weiter aus. Die Masse $\frac{4}{3}$ hatte die Geschwindigkeit -1, die Masse $\frac{2}{3}$ die Geschwindigkeit $+2$. Eben ist schon darauf hingewiesen, dass bei der Einwirkung einer Kraft auf Massen, die sich verhalten wie 1 : 2, die erzeugten Geschwindigkeiten sich umgekehrt verhalten wie die Massen. Ich will die entsprechende Beziehung aufsuchen für den Fall, dass die bewegten Massen sich verhalten wie 1 : 3, wie 1 : 4 u. s. f.; ich will also die schon mit verschiedenen Geschwindigkeiten sich bewegenden Massen noch weiter teilen und die durch neue Krafteinwirkungen erzielten Geschwindigkeiten feststellen. Ich denke mir deshalb die Masse $\frac{2}{3}$ zerlegt nach dem Verhältnisse 1 : 2, also in $\frac{2}{9}$ und $\frac{4}{9}$; die teilende Ebene liege wieder senkrecht zur Bewegungsrichtung; voran gehe in der positiven Richtung die Masse $\frac{4}{9}$. Mit diesen beiden Massen $\frac{2}{9}$ und $\frac{4}{9}$, die doch die gleiche Geschwindigkeit $+2$ haben, bewege sich mit ein Beobachter, der nur diese Massen wahrnimmt, nichts aber von den anderen Massen oder irgend welchen festen Punkten weiss; für ihn werden die Massen $\frac{2}{9}$ und $\frac{4}{9}$ ruhig neben einander liegen. Wenn also dieser Beobachter zwischen den für ihn ruhenden Massen $\frac{2}{9}$ und $\frac{4}{9}$ die Kraft $\frac{4}{3}$ wirken lässt, so müssen sich, genau entsprechend den vorher durchgeführten Zahlenbeispielen, die erzielten Geschwindigkeiten wie 2 : 1 verhalten, da ja die bewegten Massen sich wie 1 : 2 verhalten; wie vorher die Kraft 4 den beiden Massen $\frac{4}{3}$ und $\frac{2}{3}$ die entsprechenden Geschwindigkeiten -1 und $+2$ gab, so muss hier die Kraft $\frac{4}{3}$ den Massen $\frac{2}{9}$ und $\frac{4}{9}$ die entsprechenden Geschwindigkeiten -2 und $+1$ erteilen. Die so hervorgerufene Bewegung werde aber auch verfolgt von einem zweiten Beobachter, der als festen Punkt seines Raumes die Ruhelage der Massen M_1 und M_2 sich gemerkt hat. Für ihn hatten die Massen $\frac{2}{9}$ und $\frac{4}{9}$ vor der Einwirkung der Kraft $\frac{4}{3}$ beide die Geschwindigkeit $+2$; durch die Einwirkung der Kraft $\frac{4}{3}$

erhält die Masse $\frac{2}{9}$ hinzu die Geschwindigkeit -2, ihre Endgeschwindigkeit ist also Null; die Masse $\frac{4}{9}$ dagegen bekommt durch die Kraft $\frac{4}{3}$ hinzu die Geschwindigkeit $+1$, ihre Endgeschwindigkeit ist folglich $+3$.

Jetzt fasse ich zusammen, was bisher bei den Massen M_1 und M_2 erreicht ist. Nach Verwendung von $4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$ Krafteinheiten bei zwei Masseneinheiten habe ich der Masse $\frac{4}{3}$ die Geschwindigkeit -1, der Masse $\frac{4}{9}$ die Geschwindigkeit $+3$ gegeben, die noch übrige Masse $\frac{2}{9}$ ist in Ruhe. Diese zuletzt noch ruhende Masse $\frac{2}{9}$ kann ich genau so wie die eben behandelte Masse 2 mir zerspalten und durch Kräfte angegriffen denken; da sie $\frac{1}{9}$mal so gross ist, wie die ursprüngliche Masse 2, so werde ich auch die Kraft $\frac{1}{9}$mal so gross wählen; ich will also durch Verwendung von $\frac{16}{27}$ Krafteinheiten die Masse $\frac{2}{9}$ zerspalten in $\frac{4}{27}$, die mit der Geschwindigkeit -1 weitergehen, in $\frac{4}{81}$, die mit der Geschwindigkeit $+3$ sich weiter bewegen, und in noch übrige $\frac{2}{81}$, die in Ruhe bleiben. Wenn ich die zuletzt noch ruhende Masse $\frac{2}{81}$ in der bisher durchgeführten Art wieder zerspalte und dieses Verfahren unendlich oft wiederhole, so erhalte ich als Endergebnis folgendes: Verwendet ist die Kraft $\frac{16}{3} + \frac{16}{27} + \frac{16}{243} +$ u. s. f. $= 6$.

Bewegte Massen sind vorhanden

mit der Geschwindigkeit -1: $\frac{4}{3} + \frac{4}{27} + \frac{4}{243} +$ u. s. f. $= \frac{3}{2}$

mit der Geschwindigkeit $+3$: $\frac{4}{9} + \frac{4}{81} + \frac{4}{729} +$ u. s. f. $= \frac{1}{2}$

Man sieht, die bewegten Massen verhalten sich hier wie $1:3$, die erzielten Geschwindigkeiten, abgesehen vom Vorzeichen, wie $3:1$.

Um einfachere Zahlen zu erhalten, nehme ich hier statt der Masse 2 die Masse 4p; nehme ich auch die Kraft 2pmal so gross, so kann ich sagen: Wenn in der eben durchgeführten Art die Kraft 12p wirkt auf die Masse 4p, dann erhält die Masse 3p die Geschwindigkeit -1, die Masse p die Geschwindigkeit $+3$.

Ich könnte auf dem bisher gewählten Wege weiter gehen, um auch noch für den Fall die entstehenden Geschwindigkeiten festzustellen, wenn die Massen sich verhalten wie $1:4$; ich will aber schon jetzt lieber die Frage allgemein lösen; um zu einem Schlusse zu gelangen, vergleiche ich die bisher gefundenen Zahlen.

Die Kraft 2p gab der Masse p die Geschwindigkeit -1, der Masse p die Geschwindigkeit $+1$.
Die Kraft 6p gab der Masse 2p die Geschwindigkeit -1, der Masse p die Geschwindigkeit $+2$.
Die Kraft 12p gab der Masse 3p die Geschwindigkeit -1, der Masse p die Geschwindigkeit $+3$.

Diese Zahlen führen auf die Vermutung, dass

die Kraft $n(n+1)p$ der Masse np die Geschwindigkeit -1, der Masse p die Geschwindigkeit $+n$ geben wird.

Um die Richtigkeit dieser Vermutung in Bezug auf den Zusammenhang zwischen Grösse der bewegten Massen, erzielten Geschwindigkeiten und verwendeter Kraft nachzuweisen, muss ich feststellen, ob diese Vermutung sich für $n+1$ als sicher richtig nachweisen lässt, wenn ich sie für n als giltig angenommen habe; gelingt mir dies, so darf ich nur darauf hinweisen, dass für $n = 1, = 2, = 3$ die vermutete Beziehung schon nachgewiesen ist, dass sie folglich für jeden ganzzahligen Wert von n gelten muss.

Nun also: Durch Verwendung der Kraft $n(n+1)$ soll nach der Annahme die Masse n die Geschwindigkeit -1, die Masse 1 die Geschwindigkeit $+n$ erhalten. Diese letzte Masse 1 teile ich nach dem Verhältnisse $1:n$, also in die Teile $\frac{1}{n+1}$ und $\frac{n}{n+1}$; der Theil $\frac{n}{n+1}$ gebe in der

positiven Richtung voran, und die teilende Ebene liege wie immer senkrecht zur Bewegungsrichtung. Zwischen diesen Massen $\frac{1}{n+1}$ und $\frac{n}{n+1}$ lasse ich nun wirken die Kraft n; dann bekommt — ich habe nur von den Massen und der Kraft in unserer Annahme den $n+1^{\text{ten}}$ Teil genommen — die Masse $\frac{1}{n+1}$ den Geschwindigkeitszuwachs — n, die Masse $\frac{n}{n+1}$ dagegen den Geschwindigkeitszuwachs + 1. Im ganzen habe ich dann verwendet die Kraft $n(n+1)+n = n^2+2n$; infolge hievon bewegt sich die Masse n mit der Geschwindigkeit — 1, die Masse $\frac{1}{n+1}$ ist in Ruhe, und die Masse $\frac{n}{n+1}$ bewegt sich mit der Geschwindigkeit $n+1$. Die zuletzt noch ruhend gebliebene Masse $\frac{1}{n+1}$ zerspalte ich jetzt genau so, wie vorher die ganze Masse $n+1$ zerspalten ist, und setze dieses Verfahren bis ins Unendliche fort; dann habe ich an Kraft verbraucht im ganzen

$$n^2 + 2n + \frac{n^2 + 2n}{(1+n)^2} + \frac{n^2 + 2n}{(1+n)^4} + \text{u. s. f.} = (n+1)^2$$

Bewegte Massen sind vorhanden

mit der Geschwindigkeit — 1: $n + \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+1)^4} + \text{u. s. f.} = \frac{n \cdot (n+1)^2}{n^2+2n} = \frac{(n+1)^2}{n+2}$

mit der Geschwindigkeit $n+1$: $\frac{n}{n+1} + \frac{n}{(n+1)^3} + \frac{n}{(n+1)^5}$ u. s. f. $= \frac{n(n+1)}{n^2+2n} = \frac{n+1}{n+2}$

Um die Ausdrücke übersichtlicher zu machen, d. h. um die Nenner zu beseitigen, mache ich die Masse $\frac{n+2}{n+1}$ mal so gross und gleichzeitig auch die verwendete Kraft $\frac{n+2}{n+1}$ mal so gross. Dann erhalte ich für die verwendete Kraft die Zahl $(n+1)(n+2)$; von bewegten Massen ist dann vorhanden

mit der Geschwindigkeit -1: $n+1$
mit der Geschwindigkeit $n+1$: 1.

Die drei eben gefundenen Ausdrücke erhalte ich aber aus der vorher aufgestellten Annahme, wenn ich nur statt der Zahl n die Zahl $n+1$ setze; ist folglich die oben ausgesprochene Vermutung richtig für ein bestimmtes n, so ist sie sicher auch richtig für $n+1$: nachgewiesen ist sie als richtig für $n = 1, = 2$ und $= 3$, folglich ist sie richtig für alle ganzzahligen Werte von n.

VI. Die eben gegebene Ableitung liefert aber noch nicht ein unbeschränkt brauchbares Ergebnis. Die Kraft $n(n+1)$ giebt den Massen n und 1 die entsprechenden Geschwindigkeiten — 1 und + n vorläufig nur in dem besonderen Falle, wenn die Zerteilung der Massen und die Einwirkung der einzelnen Kraftmengen genau so erfolgte, wie wir für unsere Betrachtung es uns vorstellten, noch nichts haben wir bisher für den viel wichtigeren Fall gefunden, dass die Kraft $n(n+1)$ unzerteilt zwischen den Massen 1 und n wirkt, für diesen Fall wissen wir noch nichts von den entstehenden Geschwindigkeiten. Unbeschränkt brauchbar wird die oben gegebene Betrachtung erst, wenn wir nachweisen können, dass, wie mannigfach wir auch die Art der Einwirkung der Kraft auf die Massen abändern mögen, immer die erzielten Geschwindigkeiten nur abhängig sind von der Grösse der Massen und der verwendeten Kraft, nicht aber auch von der Art der Krafteinwirkung. Zunächst will ich dies noch in einem Zahlenbeispiele durchführen.

Man lasse die Kraft 2 wirken zwischen zwei bis dahin ruhenden Massen, deren jede gleich 1 ist; dann bewegt die eine Masse 1 sich mit der Geschwindigkeit — 1, die andere Masse 1 mit der Geschwindigkeit + 1. Auf die letzte Masse, die schon die Geschwindigkeit + 1 hat, verwende ich, nachdem ich sie in der bisher besprochenen Weise in zwei gleiche Teile gespalten habe, die neue Kraft 1; dann habe ich statt einer Masse 1 mit der Geschwindig-

keit $+1$ jetzt eine Masse $\frac{1}{2}$ mit der Geschwindigkeit 0 und eine Masse mit der Geschwindigkeit $+2$. Bis jetzt bin ich genau so vorgegangen wie am Anfang von V; im weiteren wähle ich ein anderes Verfahren. Die Masse $\frac{1}{2}$ mit der Geschwindigkeit 0 lasse ich vorläufig unangegriffen; die andere Masse $\frac{1}{2}$ mit der Geschwindigkeit 2 zerspalte ich in zwei gleiche Teile und lasse zwischen diesen die Kraft $\frac{1}{2}$ wirken; dann erhalte ich statt der Masse $\frac{1}{2}$ mit der Geschwindigkeit $+2$ eine Masse $\frac{1}{4}$ mit der Geschwindigkeit $+3$ und eine Masse $\frac{1}{4}$ mit der Geschwindigkeit $+1$. Diese letzte Masse $\frac{1}{4}$ mit der Geschwindigkeit $+1$ zerspalte ich durch die Kraft $\frac{1}{4}$ in zwei gleiche Massen; die eine, $\frac{1}{8}$, hat die Geschwindigkeit 0, die andere, $\frac{1}{8}$, hat die Geschwindigkeit $+2$. Diese letzte Masse $\frac{1}{8}$ mit der Geschwindigkeit $+2$ zerspalte ich durch die Kraft $\frac{1}{8}$ in zwei gleiche Massen: das eine $\frac{1}{16}$ hat dann die Geschwindigkeit $+3$, das andere $\frac{1}{16}$ die Geschwindigkeit $+1$. Dieses letzte $\frac{1}{16}$ zerspalte ich durch die Kraft $\frac{1}{16}$ in eine Masse $\frac{1}{32}$ mit der Geschwindigkeit 0 und in ein anderes $\frac{1}{32}$ mit der Geschwindigkeit $+2$. Dieses Verfahren wiederhole ich unendlich oft; ich lasse die Massen mit den Geschwindigkeiten 0 und $+3$ unangegriffen, die Massen dagegen mit den Geschwindigkeiten $+1$ und $+2$ halbiere ich immer wieder; zuletzt sind dann Massen mit den Geschwindigkeiten $+1$ und $+2$ nicht mehr vorhanden. Verwendet ist dann im ganzen die Kraft $2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ldots=4$; bewegte Massen erhalte ich

mit der Geschwindigkeit -1 die Masse 1

mit der Geschwindigkeit 0 die Masse $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+$ u. s. f. $=\frac{2}{3}$

mit der Geschwindigkeit $+3$ die Masse $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}$ u. s. f. $=\frac{1}{3}$

Lassen wir nun die ruhende Masse $\frac{2}{3}$ ganz ausser Betracht, sehen wir nur auf die wirklich bewegten Massen, so finden wir, dass die Kraft 4 der Masse 1 die Geschwindigkeit -1 und der Masse $\frac{1}{3}$ die Geschwindigkeit $+3$ gegeben hat; genau dasselbe Ergebnis fanden wir in V, obgleich dort die Geschwindigkeiten auf ganz anderem Wege wie hier erzielt worden sind.

Was dieses Zahlenbeispiel für einen besonderen Fall zeigt, dass nämlich bei gegebener Kraft und gegebenen Massen die hervorgebrachten Geschwindigkeiten unabhängig sind von dem Verfahren, das man gerade zufällig gewählt hat, dies muss jetzt endlich allgemein bewiesen werden.

Man denke sich, zwei gleiche Massen von je k Einheiten bewegen sich mit derselben Geschwindigkeit c hintereinander längs derselben graden Linie; man lasse zwischen ihnen wirken die Kraft 2 k. Dann muss — s. V am Anfange — diese Kraft 2 k, wirkend zwischen zwei gleichen Massen von k Einheiten jeder derselben die Geschwindigkeit 1 geben, nur nach entgegengesetzten Richtungen; hier fällt dann die Richtung der neu auftretenden Geschwindigkeit mit der der schon vorhandenen c zusammen oder ist ihr entgegengesetzt; von den beiden gleichen Massen muss folglich jetzt die vorangehende die Geschwindigkeit $c+1$ haben, die nachfolgende die Geschwindigkeit $c-1$. Für diese so veränderte Bewegung bilde man nun für die Zeit vor und nach der Kraftеinwirkung den Ausdruck, den man gewöhnlich „Bewegungsgrösse“ nennt — der freilich durchaus nicht die Grösse der Bewegung darstellt — das Produkt nämlich aus bewegter Masse und ihrer Geschwindigkeit, summiert für alle vorhandenen Massen. Vor der Einwirkung der Kraft 2 k ist die Bewegungsgrösse der Masse 2 k bei der

Geschwindigkeit c gleich 2kc. Nach der Einwirkung der Kraft 2k bekommt diese Bewegungsgrösse den Ausdruck $k(c+1) + k(c-1)$; dies ist aber wieder gleich 2k, genau so gross wie vorher; die sogenannte Bewegungsgrösse der Masse 2k ist also nicht geändert worden dadurch, dass die Kraft 2k zwischen gleichen Massen von je k Einheiten wirksam angebracht wurde. Was für eine solche Krafteinwirkung richtig ist, das muss ganz ebenso gelten für beliebig oft wiederholte solche Einwirkungen; ich darf beliebig oft die Kraft 2k zwischen zwei Massen von je k Einheiten wirken lassen, wenn nur immer die neu auftretenden Geschwindigkeiten längs derselben Geraden liegen, auf der die Anfangsgeschwindigkeit c gemessen wird, immer bleibt dann die gesamte Bewegungsgrösse ungeändert. Nun haben wir aber schon gefunden, dass bei passender Verwendung von Kräften an gehörig zerteilten Massen — auch wenn man immer eine Kraft 2k zwischen zwei Massen von je k Einheiten wirken lässt, so dass die neu auftretenden Geschwindigkeiten nur +1 und —1 sind — es möglich ist, eine ruhende Masse zu zerspalten in zwei ungleiche Teile, die dann mit ungleichen Geschwindigkeiten weitergehen; auch für dieses beliebig wechselnd eingerichtete Verfahren darf die vorhandene Bewegungsgrösse nicht durch die Einwirkung irgend welcher Kräfte geändert werden. Wenn also durch passende Zerlegung der Massen und richtige Verwendung von Kräften es dahin gebracht ist, dass zwei Massen 1 und n, die sich mit der Geschwindigkeit c hintereinander auf einer und derselben Geraden bewegen, nach Einwirkung von Kräften zuletzt die entsprechenden Geschwindigkeiten v_1 und v_2 haben, dann muss die Gleichung gelten

$$1 \cdot v_1 + n v_2 = (1+n)\, c.$$

Um eine zweite Gleichung für v_1 und v_2 zu finden, nehme ich wieder zuerst zwei gleiche Massen k mit gleicher Geschwindigkeit c längs derselben Geraden sich fortbewegend an; zwischen ihnen werde wirksam die Kraft 2k, und nun bilde ich wieder für die Zeit vor und nach der Krafteinwirkung einen bestimmten Ausdruck, jetzt nämlich das, was man die lebendige Kraft der Bewegung nennt; ich bilde also das Produkt aus Masse und Quadrat der zugehörigen Geschwindigkeit und summiere dies Produkt für alle vorhandenen Massen. Vor der Einwirkung der Kraft 2k hatte jede der Massen k die Geschwindigkeit c, also ist die gesamte lebendige Kraft gleich $2kc^2$. Nach der Einwirkung der Kraft 2k hat die eine der Massen k die Geschwindigkeit $c+1$, die andere die Geschwindigkeit $c-1$; die gesamte lebendige Kraft ist folglich $k(c+1)^2 + k(c-1)^2 = 2kc^2 + 2k$.

Durch die Einwirkung der Kraft 2k ist also die lebendige Kraft der angegriffenen Massen genau um dieselbe Zahl 2k gewachsen, welche die Grösse der verwendeten Kraft darstellt; und was für eine solche Krafteinwirkung gilt, dass lässt sich sofort auf beliebig viele ausdehnen: Wenn zwischen Massen, die längs einer und derselben Geraden sich bewegen, beliebig oft Kräfte der Art wirken, dass die durch jede neue Krafteinwirkung neu hinzukommende Geschwindigkeit nur dieselbe Richtung und den Wert +1 oder —1 hat, immer ist dann die lebendige Kraft am Schlusse grösser als die lebendige Kraft am Anfange um genau dieselbe Zahl, die die im ganzen verwendete Kraft darstellt. Andererseits haben wir schon erkannt und benutzt die Thatsache, dass wir, auch wenn wir Kräfte 2k nur zwischen gleichen Massen von je k Einheiten wirken lassen, es doch erreichen können, dass zum Schlusse verschieden grosse Massen mit verschiedenen Geschwindigkeiten weitergehen; wir können hieraus den Schluss ziehen: Wirkt auf die Masse $1+n$, die mit der Geschwindigkeit c sich bewegt, in einer Reihe von Einzelangriffen eine Gesamtkraft K so ein, dass zuletzt die Masse 1 die Geschwindigkeit v_1, die Masse n die Geschwindigkeit v_2 erhält — beide Bewegungen sollen erfolgen längs derselben Geraden, auf der c gemessen wurde — dann gilt die Gleichung

$$1 \cdot v_1^2 + n v_2^2 = (1+n) c^2 + K.$$

Aus den beiden Gleichungen

$$1 \cdot v_1 + n v_2 = (1+n)\, c$$
$$1 \cdot v_1^2 + n v_2^2 = (1+n) c^2 + K$$

müssen die beiden Grössen v_1 und v_2 zu berechnen sein, wenn alles übrige gegeben ist.

Es ergiebt sich

$$v_1 = c \pm \sqrt{K\frac{n}{n+1}}$$
$$v_2 = c \mp \sqrt{K\frac{1}{n(n+1)}}$$

Von diesen beiden Wertpaaren ist aber für die zu behandelnde physikalische Aufgabe das eine unbrauchbar. Haben nämlich vor der Einwirkung der Kraft k die Massen 1 und n sich mit der Geschwindigkeit c auf einer Geraden bewegt, die man als die positive Bewegungsrichtung ansieht, liegen ferner nach der Krafteinwirkung die Massen n und 1 so, dass die von n nach 1 gezogene Gerade die positive Richtung angiebt, dann muss nach unserer Vorstellung von der Wirkung der Kräfte v_2 kleiner als c sein, v_1 dagegen grösser als c; bei den eben angegebenen Lösungen ist folglich nur das obere Vorzeichen bei dem zweiten Gliede brauchbar, für v_1 und v_2 giebt es also nur ein einziges mögliches Wertpaar. Hieraus folgt aber unmittelbar: So mannigfach ich auch die Einwirkung der Kraft K auf die Massen $1+n$ abändern mag, wenn nur zuletzt die mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegten Massen 1 und n sind, dann sind immer die zuletzt erhaltenen Geschwindigkeiten v_1 und v_2 unabhängig von dem zufällig gewählten Verfahren.

Setzen wir nun, um auf die Formeln von V zurückzukommen, in die eben für v_1 und v_2 gefundenen Werte für c den Wert o, für K den Wert $n(n+1)$ dann erhalten wir

$$v_1 = +n$$
$$v_2 = -1$$

Genau dieselben Werte sind schon am Anfange von VI aufgestellt; dort war aber ihre Giltigkeit noch an gewisse Bedingungen geknüpft; bei der eben gegebenen Ableitung haben wir uns von allen Beschränkungen befreit und somit die am Anfange von VI ausgesprochenen Bedenken erledigt.

VII. In V ist gezeigt, wie die Masse $n+1$ durch die Kraft n^2+n so in Bewegung gesetzt werden kann, dass die Masse n die Geschwindigkeit -1, die Masse 1 die Geschwindigkeit $+n$ bekommt. Allgemein ist die vorliegende Aufgabe erst dann gelöst, wenn man eine Kraft auf eine Masse $n+q$ so wirken lässt, dass die Masse n mit der Geschwindigkeit v_1 und die Masse q mit der Geschwindigkeit v_2 weitergeht, und wenn dann v_1 und v_2 sicher bestimmt werden können. Diese Verallgemeinerung ist aber leicht durchführbar.

Man denke sich, die Masse $1+n$ sei schon so von Kräften angegriffen, wie es in V durchgeführt ist, es habe also die Masse 1 etwa die Geschwindigkeit $-n$, die Masse n habe die Geschwindigkeit $+1$. Nun zerspalte ich die Masse n wieder nach demselben Verfahren in die vorangehende Masse q und in die nachfolgende Masse $n-q$; zwischen ihnen bringe ich eine Kraft so an, dass die Masse $n-q$ die neue Geschwindigkeit -1 erhält; vorher hatte sie schon die Geschwindigkeit $+1$, sie wird folglich zuletzt in Ruhe sein. Die vorangehende Masse q muss aber neu hinzubekommen die Geschwindigkeit $\frac{n-q}{q}$; sie hatte vorher schon die Geschwindigkeit $+1$, die Gesamtgeschwindigkeit wird demnach $\frac{n-q}{q}+1$ oder $\frac{n}{q}$. Wir haben jetzt von wirklich bewegten Massen erstens die Masse 1 mit der Geschwindigkeit $-n$ und zweitens die Masse q mit der Geschwindigkeit $+\frac{n}{q}$. Ob man nun auch noch die bis jetzt ruhend gebliebene Masse $n-q$ weiter zerspaltet in bewegte Massen oder ob man sich mit dem schon bisher Erreichten begnügt, das ist für das folgende gleichgiltig; sicher ist nämlich, dass man auf dem hier angedeuteten Wege durch passende Kraftverwendung beliebig grossen Massen beliebige Geschwindigkeiten zu erteilen vermag. Auch ist durchaus nicht mehr nötig, durch genaue Verfolgung des im einzelnen Falle gewählten Verfahrens die sich ergebenden Endgeschwindigkeiten festzustellen; für sie findet man leichter und vollkommen zuverlässig die Werte

aus der Betrachtung der Bewegungsgrösse und der lebendigen Kraft. Wenn nämlich zwischen zwei bis dahin ruhenden Massen von r und q Einheiten die Kraft K wirksam wird, wenn infolge davon die Masse r die Geschwindigkeit v_2, die Masse q die Geschwindigkeit v_1 bekommt, dann müssen die zwei Gleichungen gelten:

$$qv_1 + rv_2 = 0$$
$$qv_1^2 + rv_2^2 = K.$$

Aus ihnen ergiebt sich

$$v_1^2 = \frac{Kr}{q(q+r)} \quad ; \quad v_2^2 = \frac{Kq}{r(q+r)}$$

Rechnet man die positive Bewegungsrichtung von r nach q hin, dann muss v_1 positiv sich ergeben, v_2 dagegen negativ; wir finden also

$$v_1 = +\sqrt{\frac{Kr}{q(q+r)}} \quad ; v_2 = -\sqrt{\frac{Kq}{r(q+r)}}$$

wobei die Quadratwurzel an sich nur positiv genommen werden darf. Hiermit ist die am Anfange von V gestellte Aufgabe vollständig gelöst.

VIII. Zur Bestimmung der Geschwindigkeiten v_1 und v_2 sind zwei Gleichungen aufgestellt, die einer besonderen Betrachtung wert sind; ich nehme sie in allgemeinerer Form noch einmal eingehender vor.

Bewegen zwei beliebige Massen q und r sich mit gleicher Geschwindigkeit c auf derselben Geraden, wird dann zwischen ihnen eine beliebige Kraft angebracht, die die Massen q und r auf die entsprechenden neuen Geschwindigkeiten v_1 und v_2 bringt, dann muss die Bewegungsgrösse der Massen nach der Einwirkung der Kraft genau so gross sein wie vorher, also

$$qc + rc = qv_1 + rv_2.$$

In dieser Form gilt diese Gleichung nur für den bisher allein behandelten Fall, dass die durch eine Kraft k neu erregte Bewegung längs derselben Geraden geschieht, auf der die bisherige Geschwindigkeit c lag. Es ist aber leicht, von dieser Einschränkung sich zu befreien und auch für eine nach beliebiger Richtung wirkende Kraft eine entsprechende Gleichung aufzustellen; ich will dies zunächst durchführen für den Fall, dass die neu hinzutretende Bewegung senkrecht liegt zu der schon vorhandenen.

Man denke sich eine Masse q+r mit der Geschwindigkeit c fortgehend nach der positiven x-Richtung eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Diese Masse zerteile man durch eine Schnittebene, gelegt senkrecht zur y-Axe so, dass nach der positiven y-Richtung hin die Masse q zu liegen kommt, nach der negativen y-Richtung hin die Masse r. Zwischen diesen Massen q und r lasse man dann in dem Raume, für welchen sie ruhen, eine Kraft wirken, die ihnen die entsprechenden Geschwindigkeiten v_1 und v_2 längs der y-Richtung geben wird; die Masse q wird also — zu der schon vorhandenen nach der x-Richtung gehenden Geschwindigkeit c — neu hinzubekommenen die Geschwindigkeit v_1 in der Richtung der y-Axe; r wird ebenso neu hinzubekommen die neue Geschwindigkeit v_2, die hier nur negativ sein kann, so dass die Bewegung von r thatsächlich nach der negativen y-Richtung hin erfolgt; für diese Grössen v_1 und v_2 gilt die eben aufgestellte Gleichung

$$qv_1 + rv_2 = 0;$$

denn da q und r vor der Einwirkung der Kraft nur die Geschwindigkeit c nach der x-Richtung hatten, so hatten sie für den Raum, in welchem wir die neue Kraft wirken liessen, die Geschwindigkeit 0, folglich ist ihre Bewegungsgrösse vor wie nach der Krafteinwirkung gleich Null. Jetzt sind aber Bewegungen vorhanden auf zwei voneinander unabhängigen Richtungen; die Masse q bewegt sich auf der Diagonale des Rechtecks mit den Seiten c und v_1, die Masse r auf der Diagonale eines zweiten Rechtecks mit den Seiten c und v_2; der Ausdruck für die sogenannte Bewegungsgrösse lässt sich folglich nicht mehr hier in derselben einfachen Gestalt bilden wie früher. Berechnen wir aber hier das Produkt aus bewegter Masse und Geschwindigkeit nach einer bestimmten Richtung hin und summieren wir dieses Produkt für die

vorhandenen Massen, dann finden wir für diesen Ausdruck eine genau dem früheren entsprechende Thatsache. Nehmen wir als willkürliche Richtung zuerst die der positiven x-Axe, so ist nach der Einwirkung der Kraft wie vor derselben die Geschwindigkeit jeder Masse gleich c; der Ausdruck $qc + rc$, den wir wohl Bewegungsgrösse im allgemeineren Sinne nennen dürfen, ist durch die Einwirkung der Kraft nicht geändert. Nehmen wir dagegen als willkürliche Richtung die der positiven y-Axe; die Masse q hat die Geschwindigkeit v_1, die Masse r die Geschwindigkeit v_2, die gesamte Bewegungsgrösse nach der y-Richtung ist also $qv_1 + rv_2$, und diese Grösse ist, wie kurz vorher gesagt ist, gleich Null; genau ebenso gross war diese Bewegungsgrösse auch vor der Krafteinwirkung.

Hier wirkte die neue Kraft schon senkrecht zu der vorhandenen Geschwindigkeit, und doch blieb die Bewegungsgrösse nach verschiedenen Richtungen unverändert; zu untersuchen bleibt nur noch der Fall, wenn die neue Kraft eine Bewegung erzeugt schiefwinklig zu der schon vorhandenen.

Man denke sich wieder die Masse $q+r$ mit der Geschwindigkeit c fortgehend nach der positiven x-Richtung. Zwischen q und r lasse man eine Kraft so wirken, dass diese Massen neu hinzubekommen die entsprechenden Geschwindigkeiten v_1 und v_2 längs einer Geraden, die mit der x-Richtung den Winkel α bildet. Dann muss wieder wie vorher die Gleichung gelten

$$qv_1 + rv_2 = 0.$$

Nun bilde man für die vorhandenen Massen die Bewegungsgrösse nach der positiven x-Richtung. Zu der schon vorhandenen Geschwindigkeit c ist neu hinzugekommen bei q die Geschwindigkeit $v_1 \cdot \cos\alpha$, bei r die Geschwindigkeit $v_2 \cdot \cos\alpha$; die gesamte Bewegungsgrösse nach der x-Richtung ist also

$$q(c + v_1 \cos\alpha) + r(c + v_2 \cos\alpha);$$

dies lässt sich schreiben als

$$qc + rc + \cos\alpha(qv_1 + rv_2).$$

Da nun $qv_1 + rv_2 = 0$, so ist die Bewegungsgrösse in der x-Richtung nach der Krafteinwirkung genau so gross wie vor derselben.

Ich bilde zweitens die Bewegungsgrösse nach der positiven y-Richtung. Vor der Krafteinwirkung hatten q und r keine Geschwindigkeit nach der y-Richtung; nachher hat q die Geschwindigkeit $v_1 \sin\alpha$ und r die Geschwindigkeit $v_2 \sin\alpha$; die Bewegungsgrösse ist also $q v_1 \sin\alpha + r v_2 \sin\alpha$ oder $\sin\alpha\,(q v_1 + r v_2)$ also wieder gleich Null. Wie sich diese Betrachtung ausdehnen lässt auf den Raum mit seinen drei von einander unabhängigen Richtungen, das bedarf wohl keiner weiteren Ausführung; bewissen ist vielmehr schon die Thatsache: Wie auch die durch irgend eine Kraft hervorgerufene Bewegung gerichtet sein mag mit Bezug auf die schon vorhandene Bewegung, Kräfte, wie wir sie hier angenommen haben, sind ganz ohne Einfluss auf die gesamte Bewegungsgrösse der angegriffenen Massen.

Bekannt ist dieser Satz schon recht lange; das dritte Gesetz in den Newtonschen Principien stellt ihn in verschiedenen Formen auf; bewiesen ist er aber bisher nirgends. Was Newton sehr eingehend und ausführlich zu seinem dritten Gesetze vorbringt, das hat zwar anfangs die äussere Form eines Beweises, seinem inneren Wesen nach liefert es aber nur eine recht deutliche Veranschaulichung einer Thatsache, die vorläufig nur aus — zum Schlusse genau beschriebenen — Beobachtungen gefolgert ist. Die in den „Principien" gegebene Besprechung des dritten Gesetzes ist öfters für einen Beweis desselben gehalten; — Newton selbst hat sie nicht dafür ausgegeben —; es lohnt also, genauer auf diese wichtige Stelle einzugehen.

Das dritte Gesetz heisst bekanntlich: „Jeder Wirkung ist entgegengesetzt und gleich die Gegenwirkung; oder, die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind immer gleich und entgegengesetzt gerichtet." Auf diesen wohl unangreifbaren Satz folgt nach einigen Beispielen als weitere Ausführung: „Wenn ein Körper gegen einen andern schlägt und durch seine Einwirkung die Bewegung jenes zweiten Körpers irgendwie ändert, dann muss er selbst durch die

Einwirkung des andern in seiner eigenen Bewegung dieselbe Veränderung nach entgegengesetzter Richtung erleiden.“ Auch hiergegen wird kaum etwas erinnert werden; desto mehr gegen das folgende: „Durch diese Einwirkungen der Körper aufeinander entstehen gleiche Veränderungen nicht der Geschwindigkeiten, sondern der Bewegungen; denn die Änderungen der Geschwindigkeiten, nach entgegengesetzten Richtungen eintretend, müssen sich, da die Bewegungen gleichmässig geändert werden, umgekehrt wie die Massen verhalten.“ Der Zusammenhang zwischen dem letzten Satze und dem vorhergehenden wird erst klar, wenn man hinzunimmt die zweite Definition, welche den Begriff der Bewegungsgrösse festsetzt. Sie heisst: Bewegungsgrösse ist das Mass der Bewegung, genommen als Produkt aus Geschwindigkeit und Masse. Dem Wortlaute nach hat Newton hier zweifellos die sogenannte Bewegungsgrösse als ein Mass für die Grösse der Bewegung angesehen, was sie bekanntlich nicht ist; wenn er denselben Fehler auch bei seiner Besprechung des dritten Gesetzes gemacht hat, dann hat seine Überlegung einen einfachen klaren Zusammenhang. Bei der Einwirkung zweier Körper aufeinander müssen ihre Bewegungen gleiche Änderungen erleiden; die Bewegungen werden gemessen durch die sogenannte Bewegungsgrösse, folglich müssen auch diese Bewegungsgrössen gleiche Änderungen erleiden; Bewegungsgrösse ist aber das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit, folglich müssen die Änderungen der Geschwindigkeiten umgekehrt proportional sein den Massen. Dem Wortlaute nach enthalten die Principien scheinbar nur die oben gegebene Überlegung; und doch hat Newton vor dem in ihr steckenden Fehler sorgfältig sich gehütet; er hält sein drittes Gesetz noch gar nicht für allgemein bewiesen und stellt deshalb eine grosse Zahl von Beobachtungen an, die ihm unter den verschiedensten Umständen nur das als Ergebnis liefern, was er dann als drittes Gesetz oder Axiom ausspricht. Wie Newton selbst haben dann auch seine Nachfolger — besonders in England — die hier noch auszufüllende Lücke deutlich empfunden; gelungen ist der Versuch, sie zu beseitigen, meines Wissens bisher noch nicht, wohl nur deshalb, weil man bisher sich nicht entschliessen konnte, von den herkömmlichen Annahmen über das Wesen der Kraft sich vollständig frei zu machen: die hier gegebene Ableitung beantwortet also eine von Newton gestellte Frage in allgemeinster Form und hoffentlich auch endgiltig.

IX. Von derselben Bedeutung für unsere Aufgabe wie die Bewegungsgrösse war die **lebendige Kraft der bewegten Massen.**

Wirkt auf die Massen q und r, die mit der Geschwindigkeit c längs derselben Geraden sich bewegen, eine Kraft K so ein, dass q und r zuletzt die entsprechenden Geschwindigkeiten v_1 und v_2 haben, dann gilt die Gleichung

$$q\,v_1^2 + r\,v_2^2 = q\,c^2 + r\,c^2 + K;$$

d. h. durch die Einwirkung der Kraft K wird die lebendige Kraft der bewegten Masse vermehrt, um genau denselben Betrag K. Bisher ist dieser Satz bewiesen nur für den besonderen Fall, dass die durch die neue Kraft K hervorgerufene neue Bewegung dieselbe Richtung hat wie die schon vorhandene; von dieser Beschränkung können wir uns befreien.

Man denke sich die Masse $q + r$ in Bewegung mit der Geschwindigkeit c längs der positiven x-Axe eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Zwischen q und r bringe man in Wirksamkeit die Kraft K so, dass q und r neu hinzubekommen die entsprechenden Geschwindigkeiten v_1 und v_2 längs einer Geraden, die mit der positiven x-Richtung den Winkel α bildet. Die Geschwindigkeit der Masse q ist jetzt Diagonale eines Parallelogramms, dessen Seiten c und v_1 sind: der von diesen eingeschlossene Winkel ist α; das Quadrat der Geschwindigkeit von q ist demnach $c^2 + v_1^2 + 2\,cv_1 \cos\alpha$. Die Geschwindigkeit der Masse r ist Diagonale eines Parallelogramms mit den Seiten c und v_2; der eingeschlossene Winkel ist, wenn man die Seiten des Parallelogramms nur als Strecken auffasst, gleich 2 Rechte weniger α; da wir aber in dem Werte von v_2 schon das negative Vorzeichen berücksichtigt haben müssen, so muss jener Winkel des Parallelogramms auch gleich α gerechnet werden; das Quadrat der Geschwindigkeit für die Masse r ist also $c^2 + v_2^2 + 2\,cv_2 \cos\alpha$. Bilden wir nun für die vorhan-

denen Massen die gesamte lebendige Kraft, d. h. das Produkt aus Masse und Quadrat der Geschwindigkeit, summiert für alle Massen, so finden wir $q\,(c^2+v_1{}^2+2\,cv_1\cos\alpha)+r\,(c^2+v_2{}^2+2\,cv_2\cos\alpha)$. Dies lässt sich schreiben als $qc^2+rc^2+(qv_1{}^2+rv_2{}^2)+2\,c\cos\alpha\,(qv_1+rv_2)$. Nun müssten aber — s. VII — v_1 und v_2 so bestimmt sein, dass die Gleichungen erfüllt sind:

$$qv_1+rv_2=0$$

$qv_1{}^2+rv_2{}^2=K$, folglich wird die lebendige Kraft der Massen q und r nach der Einwirkung der Kraft K dargestellt durch den Ausdruck $(q+r)\,c^2+K$.

Das erste Glied dieser Summe stellt die lebendige Kraft der Massen q und r vor dem Angriffe der Kraft K dar, ganz allgemein ist daher jetzt der Satz bewiesen: Wirkt zwischen zwei Massen q und r, die längs derselben Geraden mit gleicher Geschwindigkeit sich bewegen, eine irgendwie gerichtete Kraft K, so wächst die lebendige Kraft der bewegten Massen um genau diesen selben Betrag K. Schon in dieser Fassung giebt der Satz zu wichtigen Folgerungen Anlass.

1. Man nehme zunächst den Fall, auf zwei ruhende Massen q und r wirke die Kraft K; die entstehenden Geschwindigkeiten seien entsprechend v_1 und v_2. Da nun, wie eben nachgewiesen ist, die Gleichung gilt:

$qv_1{}^2+rv_2{}^2=K$, so ändert sich bei wechselndem K jede der Geschwindigkeiten v_1 und v_2 nicht proportional K selbst, sondern nur proportional der Quadratwurzel aus K; fanden wir doch in VII die Werte $v_1=+\sqrt{\frac{K\,r}{q\,(q+r)}}$; $v_2=-\sqrt{\frac{K\,q}{r\,(q+r)}}$

Die in diesen Formeln ausgesprochene Thatsache ist zwar schon recht lange bekannt, spricht doch schon s' Gravesande in seinen Elementen der Physik (Leyden 1725) sie aus und liefert sogar eine das Richtige andeutende Ableitung; da aber die für diese Gleichungen unentbehrliche Art der Kraftmessung wesentlich abweicht von der seitdem fast allgemein üblich gewordenen, so ist jene Thatsache sehr zum Schaden der Physik in Vergessenheit geraten, so vollständig, dass die neuere Artillerie aus Beobachtungen an den gezogenen Geschützen sich den neuen Erfahrungssatz ableiten konnte: Bei sonst gleichen Umständen wird bei n mal so grosser Pulverladung die Geschossgeschwindigkeit nur $\sqrt{n}$ mal so gross! Irgend welche Begründung oder Ableitung dieses Erfahrungssatzes ist bisher nicht versucht worden, bei unsern Betrachtungen ergiebt er sich als die unmittelbare Folgerung aus allgemeingiltigen Gleichungen.

2. Man denke sich n Massen m_1, m_2 bis m_n; die entsprechenden Geschwindigkeiten seien v_1, v_2 bis v_n. Wenn alle diese Massen ursprünglich in Ruhe gewesen sind und erst durch die Einwirkung von Kräften im Gesamtbetrage K in Bewegung gesetzt worden sind, dann muss die Gleichung gelten

$$m_1\,v_1{}^2+m_2\,v_2{}^2+\text{u. s. f.}+m_n\,v_n{}^2=K.$$

Solche bewegte Massen werden bekanntlich verwendet, wo man nur durch Bewegung gewisse Wirkungen erzielen will. Soll z. B. der Artillerist eine Mauer zerstören, so schleudert er gegen sie Geschosse mit grossen Geschwindigkeiten; während ein Geschoss an der widerstehenden Mauer seine Geschwindigkeit verliert, bohrt es gleichzeitig ein entsprechend tiefes Loch ein; statt der verschwundenen Bewegung der Geschosse zeigt sich nachher als Leistung die zerstörende Einwirkung auf die Mauer. Für den Artilleristen ist nun äusserst wichtig die Antwort auf die Frage: Wie hängt die Leistungsfähigkeit der Geschosse ab von ihrer Geschwindigkeit? Wenn die Antwort hier allein der Erfahrung entnommen wird, wenn also für die verschiedenen Geschossgeschwindigkeiten die entsprechende Eindringungstiefe nur durch Versuche festgestellt wird, so wird dies ja für den Dienst der Artillerie ausreichen; wenn wir aber hier ganz allgemein die Leistungsfähigkeit einer bewegten Masse feststellen wollen, so müssen wir zunächst ein brauchbares Mass finden für die durch eine bewegte Masse geleistete Arbeit; ich verwende hierzu eine der Vorstellungen, die in III zur Veranschaulichung des Kraftbegriffes benutzt worden sind.

Eine zusammengepresste Feder kann durch ihre Ausdehnung Bewegung liefern, also als Kraft wirken; dieselbe Feder kann aber auch benutzt werden zur Zerstörung von Bewegungen, wenn man nämlich die Bewegung von Massen dazu verbraucht, jene Feder zusammenzudrücken, zu spannen. Eine Feder sei so stark, dass sie bis zu gewisser Spannung zusammengedrückt, die Kraft 2 zu liefern vermag; diese Feder wird dann, in diesem gespannten Zustande zwischen zwei ruhende Massen von der Grösse je 1 gebracht, durch ihre Ausdehnung jeder der Massen die Geschwindigkeit 1 geben nach entgegengesetzten Richtungen. Dann wird diese selbe Feder, in ungespanntem, ausgedehntem Zustande ruhend zwischen zwei Massen gebracht, die, jede von der Grösse 1, mit entgegengesetzt gerichteten Geschwindigkeiten 1 gegeneinander sich bewegen, die Geschwindigkeiten beider Massen zerstören, indem dadurch eine Spannung und Verkürzung auf das vorher angenommene Mass eintritt. Ob es eine vollkommen elastische Feder in Wirklichkeit giebt oder nicht, das lasse ich hier unentschieden; ich will ihr Vorhandensein nur der bequemeren Rechnung und Vorstellung wegen annehmen; eine neue physikalische Voraussetzung will ich damit nicht einführen; die Zusammenpressung vollkommen elastischer Federn soll mir nur ein leichter verwendbares Mass für die Leistungsfähigkeit bewegter Massen liefern, als der Artillerist es der Tiefe seiner Brescheschüsse entnimmt. Denkt man sich nun eine Feder, die 2 k Krafteinheiten liefern kann; sie muss, gespannt zwischen zwei ruhende Massen von je k Einheiten gebracht, bei ihrer Ausdehnung jeder der Massen die Geschwindigkeit 1 geben; wird diese selbe Feder ungespannt, verlängert zwischen zwei Massen von je k Einheiten gebracht, die mit den Geschwindigkeiten +1 und —1 gegeneinander sich bewegen, dann muss die Feder zusammengedrückt und gespannt werden, während sie die Bewegung jener beiden Massen vollkommen zerstört; wird dann die Ausdehnung der Feder verhindert, so ist in ihr aufgespeichert ein Kraftvorrat im Betrage von 2 k Einheiten, genau entsprechend der verschwundenen lebendigen Kraft 2 k der vorher bewegten Massen; ich darf also sagen: Wird die lebendige Kraft der vorhandenen Bewegung durch Einschaltung zusammendrückbarer elastischer Federn vermindert um den Betrag 2 k, so wird gleichzeitig in diesen Federn aufgespeichert die Kraftmenge 2 k. Den eben beschriebenen Hergang kann ich bei den bewegten Massen wiederholen, so lange als noch Geschwindigkeit da ist; nach der vorher aufgestellten Annahme sollten alle n Massen m_1 bis m_n vor der Einwirkung der Kraft K in Ruhe gewesen sein; es muss also möglich sein, einen Endzustand zu erreichen, für den wieder jede einzelne Masse ruht. Für jede einzelne Verwandlung von Bewegung in Spannung gilt aber der Satz, dass statt der verschwundenen lebendigen Kraft 2 k angesammelt wird in den Federn ein Kraftvorrat 2 k; wie oft also auch die Verwandlung von Bewegung in Spannung erfolgen mag, immer tritt statt der verschwundenen Bewegung auf ein gleichwertiger Betrag von aufgespeicherter Kraft; wenn zuletzt alle n Massen m_1 bis m_n ihre Geschwindigkeiten verloren haben, dann ist ein Kraftbetrag in den Federn aufgespeichert von

$$K = \sum m_h \, v_h^2$$

Dieses K ist, wie oben gezeigt wurde, nicht notwendig immer eine wirklich in Federn aufgespeicherte Kraft, es ist vielmehr nur ein bequemer Ausdruck für die Leistungsfähigkeit der bewegten Massen; wie die Massen m_1 bis m_n nach der hier verwendeten Vorstellung Federn gespannt haben, ebenso gut können sie andere Widerstände irgend welcher Art überwunden, z. B. Löcher in Mauerwerk gebohrt haben, wie es ja beim Brescheschiessen geschieht. Ganz unabhängig von der hier verwendeten Veranschaulichung finden wir also den Satz: Die Leistungsfähigkeit einer bewegten Masse ist dargestellt durch die sogenannte lebendige Kraft.

Dieser heute überall bekannte Satz ist schon von s' Gravesande a. a. O., also schon 1725, durch eine Reihe sorgfältiger Beobachtungen festgestellt, seitdem ist er aber länger als ein Jahrhundert hindurch so gut wie unbekannt geblieben. Der Name „Bewegungsgrösse" für das Produkt aus bewegter Masse und Geschwindigkeit verführte dazu, dieses Produkt als Mass für die Grösse der Bewegung anzusehn; Versuche von gleicher Zuverlässigkeit, wie s' Grave-

sande sie durchgeführt hat, wurden nicht angestellt, und so konnte, ungestört durch die Erfahrung, die Vorstellung sich festsetzen, als ob die Leistungsfähigkeit einer bewegten Masse dargestellt werde durch jene Bewegungsgrösse. In einem mir vorliegenden Lehrbuche der Artillerie aus dem Jahre 1851 finde ich folgenden Satz: Eine Kugel von sechs Pfund Gewicht und 800′ Endgeschwindigkeit hat eben solche Perkussionskraft, als wenn dieselbe Kugel zwölf Pfund Gewicht und 400′ Endgeschwindigkeit hätte. Ja, noch im Jahre 1859 enthält ein Leitfaden zum Unterricht in der Artillerie die Behauptung: Die Perkussionskraft eines Geschosses ist das Produkt aus der Geschwindigkeit des Geschosses und seinem Gewichte. Fehler dieser Art sind heute kaum mehr möglich; auch der Artillerist misst die Durchschlagskraft der Panzergranaten heute nur noch an ihrer lebendigen Kraft, nicht mehr an ihrer Bewegungsgrösse. Die Berechtigung hiezu entnimmt er aber bisher allein dem reichlich angesammelten Beobachtungsstoffe; noch ist ein allgemein anerkannter Beweis für die Richtigkeit der aus den Beobachtungen gefolgerten Erfahrungsthatsache nicht vorhanden. Auch an dieser Stelle füllt demnach die vorliegende Untersuchung eine lange empfundene Lücke endlich aus.

X. Man denke sich zwei Massen m_1 und m_2 bewegt mit den beliebigen Geschwindigkeiten c_1 und c_2 längs derselben Geraden. Wirkt dann zwischen ihnen eine beliebige Zahl von Kräften im Gesamtbetrage K, so bleibt, wie in V gezeigt ist, erstens die Bewegungsgrösse unverändert, zweitens wird die lebendige Kraft vermehrt um den Betrag K. Liefern andererseits die Massen m_1 und m_2 irgend eine Arbeit K_1, dann sinkt die lebendige Kraft um den Betrag K_1, und die Bewegungsgrösse bleibt, wie aus dem Früheren leicht zu entnehmen ist, wieder unverändert.

Bei allen Vorgängen dieser Art, bei jeder Veränderung der Geschwindigkeiten in den Massen kommt in Wirksamkeit nur eine einzige ihrer Eigenschaften; nur weil die Masse undurchdringlich ist, weil sie durch eine andere vorliegende oder in die Quere kommende Masse nicht hindurch kann, nur deshalb müssen die aufeinander treffenden Massen auf ihren bisherigen Bewegungszustand ändernd einwirken; deshalb muss auch jede Masse als Bewegungsursache d. h. als Kraft erscheinen, so wie sie gegen eine andere Masse schlägt.

Die Undurchdringlichkeit ist aber nicht eine nur zufällige Eigenschaft der Masse, sie wird nicht erst hervorgerufen durch die Einwirkung von Kräften oder durch das Entnehmen von Arbeit, nein, sie ist untrennbar verbunden mit dem Wesen der Masse; sie muss folglich auch dann vorhanden und wirksam sein, wenn zwischen den betrachteten Massen gar keine Kraft wirkt, wenn ihnen keine Arbeit entnommen wird. Ich stelle dies noch genauer mit Hilfe der Gleichungen fest.

Wenn die Massen m_1 und m_2 nach der Einwirkung einer Kraft K die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 haben — vorher waren ihre Geschwindigkeiten c_1 und c_2 — dann gelten die beiden Gleichungen

$$m_1 c_1 + m_2 c_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$
$$m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2 + K = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2$$

Die Grösse K kann hier jeden beliebigen positiven Wert annehmen; auch negativ darf sie werden; dann stellt sie, abgesehen vom Vorzeichen, den Betrag der Arbeit dar, welche den bewegten Massen entnommen ist. K darf beliebig klein werden seinem absoluten Zahlenwerte nach; es kann sich dem Werte Null beliebig nähern und zwar ebenso gut aus dem Negativen her, wie von der Seite des Positiven aus; die Gleichungen müssen folglich auch gelten für den besonderen Fall $K = 0$; sie liefern dann folgende Thatsache: Wenn zwei Massen m_1 und m_2 ohne Einwirkung einer neuen Kraft, ohne nach aussen hin Arbeit zu leisten, allein durch die Wirksamkeit ihrer Undurchdringlichkeit von den Anfangsgeschwindigkeiten c_1 und c_2 kommen auf die Endgeschwindigkeiten v_1 und v_2, dann gelten die Gleichungen

$$m_1 c_1 + m_2 c_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$
$$m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2$$

Den Hergang, dass zwei Massen ihre Geschwindigkeiten c_1 und c_2 ohne Einwirkung neuer Kräfte und ohne Arbeitsleistung nur vermöge ihrer Undurchdringlichkeit ändern in v_1 und v_2, ihn nennen wir den Stoss dieser Massen gegeneinander; stossen folglich zwei Massen m_1 und m_2 mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 aufeinander, so ergeben die Endgeschwindigkeiten v_1 und v_2 sich aus den zuletzt aufgestellten Gleichungen. Nun sind aber diese Gleichungen genau dieselben, die man schon lange für den Stoss vollkommen elastischer Körper abgeleitet hat, wir finden hienach die wichtige Thatsache, dass für den Stoss die nur undurchdringlich angenommene Masse sich verhalten muss wie ein vollkommen elastischer Körper.

Noch vor kurzer Zeit wäre die eben ausgesprochene Behauptung fast von allen Physikern als ganz grundlos und unhaltbar zurückgewiesen worden; sagt doch z. B. Browne — Philosophical Magazine 1881 I, S. 380 — gelegentlich einer allgemeinen Streitfrage: „Es handelt sich einfach um zwei gleiche Massenteilchen, die mit entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeiten aufeinander treffen. Man wird zugeben, dass beide zur Ruhe kommen werden.“ Und sein Gegner Lodge erklärt — ebenda 1881 I, S. 529 —: „Zwei gleiche Massenteilchen, welche mit entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeiten gegen einander schlagen, verlieren sofort ihre Bewegung.“ In der Vorstellung dieser beiden Physiker — auch noch anderer — ist demnach die Masse an sich vollkommen weich, vollkommen unelastisch; und doch widerspricht diese Anschauung gründlich der unbestrittenen Erfahrung der letzten 50 Jahre. Nachdem Joule die durch Reibung scheinbar zerstörte Bewegung als in Form von Wärme immer noch vorhanden nachwies, nachdem er mit der bisher durch alle Erfahrungen bestätigten Feststellung des mechanischen Wärmeäquivalents die Unzerstörbarkeit der Bewegung endgiltig aussprach seitdem ist es nicht mehr möglich, die kleinsten Teilchen der Masse als unelastisch anzunehmen. Wer heute noch, gegenüber den immer noch sich mehrenden Erfahrungsthatsachen, aus denen gleichmässig die Erhaltung der Bewegung sich ergiebt, die Masse an sich als unelastisch sich denken will, dem bleibt nur der eine Ausweg übrig, dass er den allgemein anerkannten und seit Joule kaum mehr bezweifelten Satz strenge genommen für falsch erklärt und das Beobachtete nur als eine ungenaue Annäherung an das Wirkliche ansieht — vergl. Isenkrahe, Rätsel der Schwerkraft, S. 130 u. f. Dieser Schritt der Verzweiflung ist aber ganz unnötig; die hier gegebene Ableitung der letzten beiden Gleichungen giebt dem, was Joule durch sorgfältige Beobachtung gefunden hat, auch die unerlässliche allgemeine Begründung; hoffentlich wird endlich die Erhaltung der Bewegung nicht weiter in Zweifel gezogen werden, da die vorliegende Ableitung nicht nur einen äusserlich unanfechtbaren Beweis, sondern vielmehr eine auf dem innersten Wesen des Massenbegriffes ruhende Begründung liefert. Dass beim Stosse undurchdringlicher Massen die Bewegungsänderung genau so erfolgt wie bei elastischen Körpern, das ist schon früher auf anderem Wege gefunden, siehe Programm des Realgymnasiums 1886; auch die oben aufgestellten Gleichungen für die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 sind in genau derselben Gestalt schon damals abgeleitet. Als richtig erkannt sind diese Gleichungen aber damals nur daran, dass sie die einzig möglichen waren, die einer Reihe von berechtigten Forderungen nicht widersprachen; dass die Stossformeln nicht anders lauten konnten, dies liess sich strenge nachweisen, nicht der geringste Zusammenhang liess sich aber auffinden zwischen der neuen Thatsache, dass die Masse an sich beim Stosse wie ein elastischer Körper sich verhalten muss, und zwischen irgend einer schon bekannten Eigenschaft der Masse; unangreifbar war wohl jene Ableitung, sie lieferte aber nur Formeln, nicht auch eine verständliche Erklärung. Von diesem Gesichtspunkte aus betrachtet leistet die vorliegende Ableitung desselben Satzes wesentlich mehr.

Die Gleichung $m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2$ — sie ist die den elastischen Stoss kennzeichnende Formel — ist nur ein besonderer Fall für den allgemeingiltigen Satz:

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2 + K.$$

Für diese letzte Gleichung ist nun nur benutzt worden die Trägheit der Masse, nicht auch ihre Undurchdringlichkeit. Zwar haben wir die Undurchdringlichkeit herangezogen, als wir

uns eine Vorstellung davon bilden wollten, wie irgend eine Kraft auf ein Massenteilchen einwirkt; wenn wir aber eine solche Vorstellung nicht verwenden wollen, wenn wir vielleicht sie ganz entbehren zu können meinen, wie ja eine grosse Zahl von Physikern an unvermittelter Fernwirkung der Kräfte keinen Anstoss mehr nimmt, dann fällt aus unserer ganzen bisherigen Betrachtung die Undurchdringlichkeit heraus, jene Gleichung $m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2 + K$ bleibt aber unverändert bestehen; man denke sich statt der in unserer Betrachtung erwähnten gespannten Stahlfedern etwa die Wirkungen genügend starker gleichnamig elektrischer Ladungen und man wird zugeben, dass sich an den Ableitungen der letzten Gleichung nichts ändert, obgleich dann von Undurchdringlichkeit nicht mehr die Rede sein muss. Die Verwandlung aber der allgemeinen Gleichung $m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2 + K$ in die besondere Gleichung $m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2$ durch die besondere Annahme $K = 0$, sie ist nur möglich unter Voraussetzung der Undurchdringlichkeit. Wollen wir nämlich die letzte Gleichung als eine Formel für den Stoss zweier Massen verwenden, dann müssen wir uns doch zu der Anschauung entschieden und bekannt haben, dass ein solcher Stoss zweier Massen wirklich denkbar ist; im Gegensatz zu den Physikern, die sich das Massenteilchen nur als einen Kraftmittelpunkt ohne Ausdehnung, ohne Undurchdringlichkeit denken, müssen wir doch, da wir Fernwirkung einer Kraft nicht verwenden dürfen, für den Stoss als unentbehrliches Hilfsmittel die Undurchdringlichkeit der Masse herbeiziehen. Weil eine Masse m_1 von der sie einholenden Masse m_2 nicht durchdrungen werden kann, weil beide Massen undurchdringlich sind und die Masse m_2 die Eigenschaft der Trägheit hat, deshalb muss die Masse m_1 beschleunigt werden, weil aber auch m_1 träge ist, deshalb muss m_2 verlangsamt werden; die Eigenschaft der Trägheit ist nur deshalb Anlass zur Bewegungsänderung im Stosse, weil beide Massen undurchdringlich sind. Die vor dem Stosse schnellere Masse m_2 giebt im Augenblicke des Stosses der von ihr eingeholten Masse m_1 neue Geschwindigkeit, sie wirkt also als Kraft, giebt Arbeit ab; nur genau so viel Arbeit giebt aber m_2 ab, als von m_1 aufgenommen wird: eine Arbeitsleistung nach aussen hin ist ausgeschlossen, Krafteinwirkung von aussen her ist ebenfalls unmöglich, die Grösse K der allgemeineren Gleichung ist wirklich gleich Null, und wir dürfen endlich sagen: Für den Stoss zweier Massen gilt die Gleichung

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2$$

oder dieser Stoss erfolgt genau so, als ob die Masse an sich vollkommen elastisch wäre, nur deshalb, weil die Masse undurchdringlich ist; aus der Undurchdringlichkeit der Masse folgt ihre Elasticität.

Es wiederholt sich hier die Entwickelung einer Vorstellung von den Eigenschaften der Masse aus einer anderen ähnlich so, wie seit mehr als 200 Jahren der Begriff der Trägheit erwachsen ist aus dem Begriffe der Beweglichkeit. Dass jede Masse beweglich ist, das ist wohl schon seit dem Anfange der Physik bekannt; dass jede Masse, weil beweglich, auch träge sein muss, das ist wohl erst seit Galilei und Kepler so weit ins Bewusstsein der Physiker eingedrungen, dass man nicht mehr versucht, diese Trägheit irgendwie zu erklären; genau ebenso wird man sich allmählich in die Anschauung hineinfinden müssen, dass die Elasticität der Masse nicht weiter eine Erklärung erfordert, dass sie vielmehr notwendig aus der Undurchdringlichkeit gefolgert werden muss. Mit dieser Vorstellung von dem Wesen der Elasticität steht dann auch ganz im Einklange die Erfahrungsthatsache, dass wir keinen für unsere sinnliche Wahrnehmung vollkommen elastischen Körper kennen; elastisch ist die Masse doch nur, weil sie undurchdringlich ist; eine für unsere sinnliche Wahrnehmung vollkommen undurchdringliche Masse kennen wir nicht, da jeder uns bekannte Körper noch leere Zwischenräume enthält; dieser nicht vollkommen undurchdringliche Körper ist folglich auch nicht vollkommen elastisch. Wo wir vollkommene Elasticität vorfinden — die Wärmelehre zeigt, dass die Atome bei ihren Zusammenstössen sich wie vollkommen elastische Körper verhalten — da schliessen wir daraus auf vollkommene Undurchdringlichkeit: Zum Wesen des Atoms gehört stetige Raumausfüllung, folglich vollkommene Undurchdringlichkeit.

XI. In II liessen wir die Frage ganz unentschieden, ob mit den Eigenschaften der Undurchdringlichkeit und Trägheit schon völlig erschöpft sei das Wesen der Masse; dieser Untersuchung können wir jetzt etwas näher treten.

Wir kennen Massen, die ausser Undurchdringlichkeit und Trägheit keine weiteren Eigenschaften haben; der sogenannte Weltäther überträgt die Wellenbewegung des Lichtes und der Wärme nur vermöge der Undurchdringlichkeit und Trägheit seiner kleinsten Teilchen. Dieser Äther ist aber nicht sinnlich wahrnehmbar, er wird deshalb meistens bei der Betrachtung des Massenbegriffes ausser acht gelassen.

Seit Newton steht die Thatsache fest, dass das, was man gewöhnlich Masse nennt, von dem Lichtäther scharf geschieden wird durch die Eigenschaft der gegenseitigen Anziehung; da diese neue Eigenschaft thatsächlich jeder sinnlich wahrnehmbaren Masse ohne Ausnahme zukommt, so haben viele Physiker, unter ihnen auch Kant, die gegenseitige Anziehung als eine neue wesentliche, notwendige Eigenschaft der Masse, als eine unentbehrliche Ergänzung des Massenbegriffes aufgefasst; andere Physiker dagegen sind auf dem Eulerschen Standpunkte geblieben, dass es unmöglich sei, die Masse, die doch träge sei, zugleich als Sitz einer jede andere Masse anziehenden Kraft sich zu denken, sie haben sich demnach bemüht, die thatsächlich beobachtete Erscheinung der sogenannten gegenseitigen Anziehung zurückzuführen auf leicht verständliche Ursachen wie auf Bewegung und Stoss von Massen. Bis zu ihren äussersten Einzelheiten ist die Eulersche oder Huyghenssche Vorstellung bisher noch nicht ausgearbeitet worden, noch ist es z. B. nicht gelungen, für die Newton'sche Anziehung die vollständige Formel abzuleiten ohne irgend welche Hilfsannahme allein aus dem Stosse bewegter Massen; so weit ist man aber doch schon gekommen, dass heute die Kantsche Auffassung von der allgemeinen Massenanziehung wohl endgiltig verlassen ist. Wir empfinden heute nicht mehr das Bedürfnis, dem Massenbegriffe mehr Inhalt zu geben durch Einfügung der allgemeinen gegenseitigen Anziehung; für uns gehören zu den notwendigen, das Wesen der Masse erschöpfenden Eigenschaften nur Ausdehnung, Undurchdringlichkeit, Beweglichkeit, Beharrungsvermögen und endlich Elasticität. Wir können sogar noch einen Schritt weiter gehen. Wenn heute von neuem vorgenommen würde die schon von Euler behandelte Frage „ob der Masse die Fähigkeit zu denken zugestanden werden könne oder nicht“, so ist es möglich, dass die Antwort — anders als bei Euler — lautete: In dem Begriffe der Masse ist nichts vorhanden, was der Fähigkeit zu denken notwendig widerspricht, die Masse als solche kann folglich Sitz oder Grundlage des Denkens sein; und dennoch würde man fortan nicht etwa das Denken als eine neue Seite des Massenbegriffes auffassen, man müsste vielmehr sich bemühen, die thatsächlich an der Masse beobachtete Fähigkeit zu denken abzuleiten aus ihren oben aufgeführten notwendigen Eigenschaften.

Hugo Fritsch.

Schulnachrichten.

I. Die allgemeine Lehrverfassung der Schule.

1. Übersicht über die einzelnen Lehrgegenstände und die für jeden derselben bestimmte wöchentliche Stundenzahl.

	VI.	V.	IV.	IIIB.	IIIA.	IIB.	IIA.	I. A u. B	Summa.
Christliche Religionslehre	3	2	2	2	2	2	2	2	17
Deutsch	3	3	3	3	3	3	3	3	24
Latein	8	7	7	6	6	5	5	5	49
Französisch	—	5	5	4	4	4	4	4	30
Englisch.....................	—	—	—	4	4	3	3	3	17
Geschichte und Geographie......	3	3	4	4	4	3	3	3	27
Rechnen und Mathematik	5	4	5	5	5	5	5	5	39
Naturbeschreibung	2	2	2	2	2	2	—	—	12
Physik	—	—	—	—	—	3	3	3	9
Chemie......................	—	—	—	—	—	—	2	2	4
Schreiben....................	2	2	—	—	—	—	—	—	4
Zeichnen	2	2	2	2	2	2	2	2	16
Summa	28	30	30	32	32	32	32	32	248

In der Vorklasse: 2 St. Religion, 7 Deutsch, 5 Rechnen, 4 Schreiben.

3. Übersicht der Verteilung der Stunden unter die einzelnen Lehrer.

a) Im Sommerhalbjahr 1889.

Lehrer.	Ord. von	I.	IIa.	IIb.	IIIa.	IIIb.	IV.	V.	VI.	Vorklasse.	Sa.
1. Prof. **Kleiber**, Direktor.	I.	5 Math.	5 Math.					1 geom. Zeichnen			11
2. Prof. **Fritsch**, 1. Oberlehrer.		3 Physik	3 Physik	3 Physik			(5 Math.)		5 Rechn.		19
3. **Lahrs**, 2. Oberlehrer.	IIa.	2 Relig. 4 Franz.	2 Relig. 4 Franz.	2 Relig. 4 Franz.	2 Relig.						20
4. **Michelis**, 3. Oberlehrer		2 Chemie	2 Chemie	2 Naturb.	2 Naturb.	2 Naturb.	2 Naturb.	2 Geogr. 2 Naturb.	2 Geogr. 2 Naturb.		20
5. **Rohse**, 4. Oberlehrer.	V.	3 Gesch.	3 Gesch. u. Geogr.				3 Deutsch (4 Gesch. u. Geogr.)	7 Latein 1 Gesch.			21
6. **Geffroy**, 1. ord. Lehrer.	IIb.			5 Math.	5 Math.	5 Math. 3 Deutsch		(3 Rechn.)			21
7. **Rosikat**, 2. ord. Lehrer.	IV.	3 Deutsch 5 Latein	3 Deutsch			2 Relig.	2 Relig. 7 Latein				22
8. **Boenig**, 3. ord. Lehrer.	VI.		(5 Latein)	(5 Latein)					8 Latein 3 Deutsch 1 Gesch.		22
9. **Gerschmann**, 4. ord. Lehrer.		3 Engl.	3 Engl.		4 Franz.	4 Engl.		3 Deutsch 5 Franz.			22
10. Dr. **Dreyer**, 5. ord. Lehrer.	IIIa.			3 Deutsch 3 Engl.	3 Deutsch 4 Engl.	4 Franz.	5 Franz.				22
11. Dr. **Stettiner**, wiss. Hilfslehrer.	IIIb.			3 Gesch. u. Geogr.	6 Latein 4 Gesch. u. Geogr.	6 Latein (4 Gesch. u. Geogr.)					23
12. Dr. **Lehmann**, cand. prob., Mitgl. d. pädag. Sem.			5 Latein	5 Latein							10
13. Dr. **Sommerfeldt**, cand. prob., Mitgl. d. pädag. Sem.						4 Geogr. u. Gesch.	4 Gesch. u. Geogr.				8
14. **Stieren**, cand. prob., Mitgl. d. pädag. Sem.							5 Math.	3 Rechn.			8
15. **Hittcher**, Vorschullehrer.	Vorklasse.							2 Relig. 2 Schreib.	3 Relig. 2 Schreib.	2 Relig. 7 Deutsch 5 Rechn. 4 Schreib.	27
16. Landschaftsmaler **Siemering**.		2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn	2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.		16
17. Kantor **Richter**, Gesanglehrer.		1 Singen (Selekta)						2 Singen	2 Singen	$^2/_3$ Singen.	6

b) Im Winterhalbjahr 1889/90.

Lehrer.	Ord. von	I.	IIa.	IIb.	IIIa.	IIIb.	IV.	V.	VI.	Vorklasse.	Sa.
1. Prof **Kleiber**, Direktor.	I.	5 Math.	5 Math.					1 geom. Zeich.			11
2. Prof. **Fritsch**, 1. Oberlehrer.		3 Physik	3 Physik	(3 Physik)			(5 Math.)		5 Rechn.		19
3. **Lahrs**, 2. Oberlehrer.	IIa.	2 Relig. 4 Franz.	2 Relig. 4 Franz.	2 Relig. 4 Franz.	2 Relig						20
4. **Michelis**, 3. Oberlehrer.		2 Chemie	2 Chemie	2 Naturb.	2 Naturb.	2 Naturb.	2 Naturb.	(2 Geogr.) 2 Naturb.	(2 Geogr.) 2 Naturb.		20
5. **Rohse**, 4. Oberlehrer.	V.	3 Gesch.	(3 Gesch. u. Geogr.)				3 Deutsch 4 Gesch. u. Geogr.	7 Latein 1 Gesch.			21
6. **Geffroy**, 1. ord. Lehrer.	IIb.			5 Math.	5 Math.	3 Deutsch 5 Math.		3 Rechn.			21
7. **Rosikat**, 2. ord. Lehrer.	IV.	3 Dtsch. 5 Latein	3 Dtsch.			2 Relig.	2 Relig. 7 Latein				22
8. **Boenig**, 3. ord. Lehrer.		beurlaubt									
9. **Gerschmann**, 4. ord. Lehrer.		3 Engl.	3 Engl.		4 Franz.	4 Engl.		3 Deutsch 5 Franz.			22
10. Dr. **Dreyer**, 5. ord. Lehrer.	IIIa.			3 Deutsch 3 Engl.	3 Deutsch 4 Engl.	4 Franz.	5 Franz.				22
11. Dr. **Stettiner**, wiss Hilfslehrer	IIIb.			3 Gesch. u. Geogr.	(6 Latein) 4 Gesch. u. Geogr.	6 Latein 4 Gesch. u. Geogr.					23
12. Dr. **Lehmann**, komm. wiss. Hilfslehrer.	VI.		5 Latein.	5 Latein					8 Latein 3 Deutsch 1 Gesch.		22
13. Dr. **Sommerfeldt**, cand. prob., Mitgl. des päd. Seminars.			3 Gesch. u. Geogr.					2 Geogr.	2 Geogr.		7
14. **Stieren**, cand. prob., Mitgl. des päd. Seminars.				3 Physik			5 Math.				8
15. **Müller**, cand. prob., Mitgl. des päd. Seminars.					6 Latein						6
16. **Hittcher**, Vorschullehrer.	Vorklasse							2 Relig. 2 Schreib.	3 Relig. 2 Schreib.	2 Relig. 7 Deutsch 5 Rechn. 4 Schreib.	27
17. Landschaftsmaler **Siemering**.		2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.	2 Zeichn.		16
18. Kantor **Richter**, Gesanglehrer.		1 Singen (Selekta)						2 Singen	2 Singen	2/2 Singen	6

3. Übersicht über die während des abgelaufenen Schuljahrs absolvierten Pensen.

Prima. Ordinarius: Der Direktor.

1. Religionslehre, 2 St. Erklärung der Augsburgischen Konfession, verbunden mit der Wiederholung des Lutherischen Katechismus. Lektüre des Johannesevangeliums. Wiederholung der biblischen Einleitung und der Kirchengeschichte. — Lahrs.

2. Deutsch, 3 St. Im S.: Übersicht über Goethes Leben und Werke. Mehrere schwierigere Gedichte besprochen, einige derselben gelernt. In der Klasse gelesen: Von deutscher Baukunst, Torquato Tasso, Iphigenie auf Tauris, im Anschluss an letzteres Drama das gleichnamige von Euripides in der Übersetzung. Kurze Übersicht über Entstehung und Entwickelung des griechischen Dramas.

Im W.: Mehrere Gedichte Schillers philosophischen Inhalts erklärt, einige gelernt. Die Dramen wurden eingehend besprochen. In der Klasse gelesen: Teile der Abhandlung über naive und sentimentalische Dichtung, über den Gebrauch des Chors in der Tragödie, die Braut von Messina, im Anschluss daran König Ödipus von Sophokles in der Übersetzung. — Dispositionsübungen. — Rosikat.

Themata zu den Aufsätzen: 1. „Begreifst du aber, wie viel andächtig schwärmen leichter, als gut handeln ist?" — 2. Inwiefern sagt Leonore in Goethes Tasso von Tasso und Antonio zutreffend: „Zwei Männer sind's, ich hab' es lang gefühlt, — Die darum Feinde sind, weil die Natur — Nicht Einen Mann aus ihnen beiden formte." 3. „Dass ihr gehorchet, ist schon gut, — Doch fragt man noch, warum ihr's thut." 4. Welche religiösen Vorstellungen in Goethes Iphigenie sind antik, welche modern? 5. Non accepimus brevem vitam, sed facimus. 6. „In dir ein edler Sklave ist, — Dem du die Freiheit schuldig bist." 7. Welche Anschauungen vom Wesen der Poeten finden sich in Schillers lyrisch-didaktischen Gedichten? 8. Das Wesen der sentimentalischen Dichtung nach Schiller. 9. Welche Motive des Sophokleischen König Ödipus benutzte Schiller in seiner Braut von Messina? — 3 und 5 wurden in der Klasse angefertigt.

Themata zu den Abiturientenprüfungen: Mich. 1889: Das Mittelmeer als Vermittler der Kultur bis zur Entdeckung Amerikas. Ostern 1890: Warum ist es oft schwerer, ein Glück zu bewahren, als es zu erringen?

3. Latein, 5 St. Sallust bell. Jugurth. — Livius lib. I. — Cicero de imperio Cn. Pompei. — Vergil Aen. lib. III. — Ausgewählte Oden des Horaz. — Übungen im Extemporieren aus Livius. — Grammatische Repetitionen nach Bedürfnis. Das Wichtigste aus der Verslehre. Alle 14 Tage wurde eine schriftliche Übersetzung aus dem Lateinischen, in jedem Vierteljahr eine aus dem Deutschen in der Klasse angefertigt. — Rosikat.

4. Französisch, 4 St. Gelesen: Delavigne, Louis XI. und Erzählungen aus Guizot, Récits historiques, tirés de l'histoire de France. — Wiederholung der Schulgrammatik von Ploetz. Mündliche Übersetzungen ins Französische nach Probst, zweiter Teil. Häusliche und Klassenarbeiten; Aufsätze und freie Vorträge; Retroversionen und Sprechübungen im Anschluss an die Lektüre. — Lahrs.

Themata zu den Aufsätzen: 1. Thémistocle. — 2. Alexandre le Grand (Klassenarbeit). — 3. Campagne de 1813. — 4. Henri I. roi d'Allemagne. — 5. Frédéric-Guillaume, le grand électeur de Brandebourg. — 6. Marius. — 7. Henri IV., roi d'Allemagne (Klassenarbeit). — 8. Gustave-Adolphe, roi de Suède. — 9. Les lois de Lycurgue.

Themata zu den Abiturientenprüfungen: Mich. 1889: Pélopidas et Epaminondas. Ostern 1890: Napoléon en Russie.

5. Englisch, 3 St. Macaulay: Warren Hastings beendigt, Byron, Machiavelli. Sprechübungen. Grammatische Repetitionen. In drei Wochen abwechselnd eine häusliche und eine Klassenarbeit. — Gerschmann.

6. Geschichte, 3 St. Geschichte der Neuzeit bis 1714. Wiederholung der Geschichte des Altertums und des Mittelalters. — Rohse.

7. Mathematik, 5 St. Wiederholung und Erweiterung der Stereometrie. Fundamentalsätze der beschreibenden Geometrie. — Analytische Geometrie der Ebene (nach Gandtner-Gruhl, Elem. der anal. Geom.). — Neun häusliche und vier Klassenarbeiten. — Der Direktor.

Aufgaben zu den Abiturientenprüfungen: Michaelis 1889: 1. Von einem geraden Kreiscylinder kennt man das Volumen V und die Oberfläche F: wie gross ist der Radius r der Grund-

fläche und die Höhe h des Cylinders? $F = 15$, $V = 4$. — 2. Wie gross ist der Inhalt eines geraden Kegelstumpfs, wenn die Radien der Grundkreise sich wie $m : n$ verhalten und die Seitenlinie s mit der Grundfläche den Winkel α bildet? Beispiel: $m : n = 20 : 7$; $s = 2{,}72947$; $\alpha = 55^0$. — 3. Von einem Dreieck sind gegeben: die Mittellinie t_a und die Winkel, welche dieselbe mit den beiden andern Mittellinien bildet; wie gross ist die Seite a? Beispiel: $t_a = 794{,}33$; $\measuredangle (t_a, t_b) = 40^0 44{,}^1 8$; $\measuredangle (t_a, t_c) = 77^0 7^1$. — 4. An die Ellipse $5y^2 + 3x^2 = 15$ ist eine Tangente zu legen, welche der Geraden $3y - 4x + 1 = 0$ parallel läuft. Welches ist die Gleichung derselben? — Ostern 1890; 1. Die Oberflächen zweier gleich grossen Kugeln mit dem Radius $r = 3$ dm durchschneiden sich. Der Inhalt der entstehenden Linse ist $J = 2\pi$ cdm. Wie dick ist die Linse? — 2. Gegeben ist ein Halbkreis mit dem Radius r, dem Mittelpunkt M und dem Durchmesser AB. Wie gross ist die parallel zu AB gezogene Sehne $CD = x$, wenn bei der Rotation des Halbkreises um AB das durch das Segment CD erzeugte Volumen gleich dem durch $\triangle$ CMD erzeugten ist? — 3. Von dem Mittelpunkte des einem Dreiecke umbeschriebenen Kreises sind die Lote auf die Seiten des Dreiecks gefällt. Es ist das eine Lot a_1, die Summe der beiden andern $s = b_1 + c_1$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel δ gegeben. Wie gross sind die Winkel und Seiten des Dreiecks? Beispiel: $a_1 = 4$; $s = 5$; $\delta = 126^0 25$. — 4. An die Parabel $y^2 = 3\frac{1}{2}x$ sind zwei Tangenten gelegt, deren Berührungspunkte $x_1 = \frac{8}{7}$, $y_1 < o$; $x_2 = 14$, $y_2 < o$ sind. Welchen Winkel schliessen die Tangenten und welchen Winkel die nach den Berührungspunkten gezogenen Brennstrahlen ein?

8. Physik, 3 St. Wärmelehre, Wurfbewegung, Gleichgewicht von Kräften bei starren Körpern. Wiederholung der Elektricität mit genauer Ableitung des Ohmschen Gesetzes. Zwei häusliche Arbeiten und eine Klassenarbeit im Vierteljahre. — Fritsch.

Aufgaben zu den Abiturientenprüfungen: Michaelis 1889: 1. Die Anfangsrichtung eines geworfenen Körpers bildet mit der Wagrechten den Winkel, dessen Sinus $\frac{4}{5}$ ist; nach gewisser Zeit bildet seine Bahn mit der Wagrechten den Winkel 45^0; eine Sekunde später ist er 3100 m hoch: wie gross ist die Anfangsgeschwindigkeit, wann erscheint er vom Anfangspunkte aus gesehen über der Wagrechten um einen Winkel, dessen Tangente $\frac{26}{27}$ ist, und in welcher Höhe hat er die Geschwindigkeit 400 m? 2. Welchen Brechungsexponenten muss ein gleichseitig dreiseitiges Prisma haben wenn es in Wasser liegend die senkrecht auf eine Fläche auffallenden Strahlen an der andern total reflektiert, wie gross ist in ihm die Lichtgeschwindigkeit? Brechungsexponent des Wassers $\frac{4}{3}$. Ostern 1890: 1. Welche Temperatur müsste ein Stück Platin haben, wenn nach dem Eintauchen desselben in ein mit Wasser und Eis gefülltes Gefäss am Schlusse des Wärmeausgleiches der Stand der Wasseroberfläche derselbe sein soll wie vorher? Spezifisches Gewicht des Platins 21,5; spezifisches Gewicht des Eises 0,916; spezifische Wärme des Platins 0,0324. 2. Ein dünner gleichförmiger Stab von der Länge L und dem spezifischen Gewichte s ist um den einen Endpunkt frei beweglich aufgehängt, hm über einer Wasseroberfläche; welchen Winkel bildet er mit der Senkrechten? $h < L$; $s < 1$.

9. Chemie, 2 St. Im Sommer Krystallographie; die wichtigsten Mineralien und Felsarten; kurzer Abriss der Mineralogie. Im Winter die Metalloide und die leichten Metalle. — Michelis.

10. Zeichnen, 2 St. Nach schwereren plastischen Ornamenten Zeichnen im Umriss und in ganzer Ausführung. — Siemering.

Sekunda A. Ordinarius: Oberlehrer Lahrs.

1. Religionslehre, 2 St. Lektüre des Galater- und Epheserbriefes, das Leben Jesu nach den synoptischen Evangelien. Wiederholung des lutherischen Katechismus und der biblischen Einleitung. — Lahrs.

2. Deutsch, 3 St. Ausgewählte Gedichte Schillers erklärt, einige derselben gelernt. Maria Stuart gelesen. Von Lessing gelesen: Abschnitte der Abhandlung über die Fabel, Minna von Barnhelm, Emilia Galotti. Von Goethe: Reineke Fuchs, Herrmann und Dorothea. Wöchentliche Vorträge aus Homers Ilias, welche die Schüler in der Übersetzung privatim lasen. — Dispositionsübungen. — Rosikat.

Themata zu den Aufsätzen: 1. Was treibt die Menschen in die Ferne? 2. Charakteristik Paulets in Schillers Maria Stuart. 3. Welche Einrichtungen aus dem Leben der Menschen weist das

Tierreich in Goethes Reinecke Fuchs auf? 4. Die gute Sache stärkt den schwachen Arm. 5. Das Werk lobt den Meister. 6. Auf welchem Wege gelangt Lessing zu seiner Definition der Fabel? 7. Der Mensch als Sohn und als Herr der Zeit. 8. Charakteristik Tellheims in Lessings Minna von Barnhelm. 9. Der Garten des Apothekers und der Garten des Wirtes in Goethes Hermann und Dorothea. Ein Vergleich.

3. Latein, 5 St. Wiederholung und Erweiterung des syntaktischen Pensums von IIb. Ut und quod. Orat. obl., Partic., Ablat. absol., Gerund., Supinum (Grammatik: Siberti-Meiring). Lektüre: Cicero, Catil., I., III. Sallust Coni. Catil. Ovid Met. II., 845—75, III., 1—137. Ausgewählte Elegien aus Ovid, Catull, Tibull, Properz. Das Wichtigste über das epische und elegische Versmass. Geeignete Stellen wurden memoriert. Alle 14 Tage ein Extemporale. Vierteljährlich ein Exercitium und eine schriftliche Übersetzung aus dem Lateinischen. — Lehmann.

4. Französisch, 4 St. Gelesen: Erckmann-Chatrian, Histoire d'un conscrit de 1813, und Corneille, le Cid. — Ploetz, Schulgrammatik, Lekt. 66 bis zu Ende. Häusliche und Klassenarbeiten. Retroversionen und gelegentliche Sprechübungen im Anschluss an die Lektüre. — Lahrs.

5. Englisch, 3 St. Lektüre: Dickens, „A christmas Carol" und Süpfle IV, 4, 5, 8; VII, 1, 3. Grammatik nach Gesenius, Kap. 5, 6, 7. Alle drei Wochen abwechselnd eine häusliche und eine Klassenarbeit. — Gerschmann.

6. Geschichte und Geographie, 3 St. Geschichte des Mittelalters. Wiederholung der Geschichte des Altertums. Geogr. Repetition aller Erdteile, speciell Europas einschl. Deutschland. — S.: Rohse. — W.: Sommerfeldt.

7. Mathematik, 5 St. Sätze von Pol und Polare (Lieber und Lühmann I, § 142—146), von den Potenzlinien (§ 147—152). Die Ähnlichkeitspunkte am Kreise (§ 153—158). Die Apollonischen Berührungsaufgaben. Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Arithmetische und geometrische Reihen erster Ordnung. Rentenrechnung. Einiges von den Kettenbrüchen. Diophantische Gleichungen. — Ebene Trigonometrie. — Stereometrie. — Neun häusliche und vier Klassenarbeiten. — Der Direktor.

8. Physik, 3 St. Akustik. Allgemeine Eigenschaften der Körper in mathematischer Behandlung. Im Vierteljahre zwei häusliche Arbeiten und eine Klassenarbeit. — Fritsch.

9. Chemie, 2 St. Die wichtigsten Erscheinungen aus dem Gebiete der unorganischen Chemie, besonders bei den Metalloiden. — Michelis.

10. Zeichnen, 2 St., wie in I. — Siemering.

Sekunda B. Ordinarius: Realgymnasiallehrer Geffroy.

1. Religionslehre, 2 St. Einleitung ins Alte und Neue Testament, verbunden mit der Lektüre wichtiger Bibelstellen und Sprüche, die auch zum Teil auswendig gelernt wurden. — Lahrs.

2. Deutsch, 3 St. Kurze Übersicht über Schillers und Goethes Leben und Werke. Ausgewählte Gedichte Schillers wurden erklärt, mehrere derselben, darunter das „Lied von der Glocke" gelernt. Gelesen Jungfrau von Orleans und Minna von Barnhelm; als Privatlektüre Homers Odyssee gelesen und besprochen. Monatlich ein Aufsatz. — Dreyer.

Themata zu den Aufsätzen: 1. Not entwickelt Kraft. 2. Die vier Weltalter. 3. Die Kraniche des Ibykus, Bericht eines Festgenossen (Klassenarbeit). 4. Welches Bild von den Zuständen Frankreichs erhalten wir im Prolog der Jungfrau von Orleans? 5. Geringes ist die Wiege des Grossen. 6. Welche Beziehung zum Hauptzweck des Dramas hat die Montgomery-Scene in der Jungfrau von Orleans (Klassenarbeit). 7. Die beiden Hauptbestandteile des Liedes von der Glocke und ihr Inhalt. 8 a) Was treibt den Menschen in die Ferne? b) Die beiden Monologe in der Jungfrau von Orleans. 9. Gedankengang im zweiten Aufzuge von Lessings Minna von Barnhelm. 10. Riccaut de la Marlinière und Major Tellheim.

3. Latein, 5 St. Wiederholung der Formenlehre. Wiederholung und Erweiterung der Casuslehre. Vom Gebrauch der Tempora. Consec. temp., Indic., Conjunct. Lektüre: Caesar im Kampfe gegen die Germanen. Caes. b. g. I, 30—54; IV, 1—19; VI, 9—29. Ovid. Met.

I, 207—415; II, 675—707; III, 577—667; VI, 313—381. Geeignete Stellen wurden memoriert. Das Wichtigste über das epische Versmass. Alle 14 Tage eine Klassenarbeit, vierteljährlich eine häusliche Arbeit. — Lehmann.

4. Französisch, 4 St. Gelesen: Ploetz, Manuel: die Auszüge aus Le Sage, Bossuet und Fénelon. — Ploetz, Schulgrammatik, Lektüre 39—59. Häusliche und Klassenarbeiten; regelmässige Retroversionen des Gelesenen. — Lahrs.

5. Englisch, 4 St. Lektüre 2 St. Gemischte Stücke aus Süpfles Chrestomathie III, 2. 3. 4. 7. 11, 12; IV, 1. 3. 7. 8; V, 5; VIII, 1; IX, 1. 7. 10. 15. 33. 34. Grammatik: Nach Gesenius, Kap. I—IV. Dreiwöchentlich eine häusliche und eine Klassenarbeit. — Dreyer.

6. Geschichte und Geographie, 3 St. Griechische und römische Geschichte. Wiederholungen aus der preussisch-brandenburgischen Geschichte. — Allgemeine Geographie. Wiederholungen. — Stettiner.

7. Mathematik, 5 St. Geometrie im S. 2 St., im W. 3 St. Wiederholung der wichtigsten Sätze des Pensums der Ober-Tertia. Die Transversalen und die merkwürdigen Punkte im Dreieck. Berechnung gerader Linien in Dreiecken und Vierecken. Berechnung regelmässiger Figuren und des Kreises. Der goldene Schnitt. Harmonische Punkte. Arithmetik im S.: 3 St., im W.: 2 St. Potenzen. Logarithmen, Zinseszinsrechnung. Quadratische Gleichungen mit einer und zwei Unbekannten. Aufgaben zur Bildung von Gleichungen ersten und zweiten Grades. Arithmetische und geometrische Reihen. Alle drei Wochen eine häusliche Arbeit. — Geffroy.

8. Physik, 3 St. Allgemeine Eigenschaften der Körper. Wichtigste Erscheinungen im Gebiete der Elektricität, des Magnetismus und der Wärme. Im S.: Fritsch, im W.: Stieren.

9. Naturgeschichte, 2 St. Im Sommer Anatomie und Physiologie der Pflanzen. Im Winter Lehre vom menschlichen Körper und Wiederholung der niederen Tiere. — Michelis.

10. Zeichnen, 2 St. Nach Vorlagen ausgeführte Zeichnungen von plastischen Ornamenten. Umrisszeichnen, auch leichte Schattenangabe. — Siemering.

Tertia A. Ordinarius: Realgymnasiallehrer Dr. Dreyer.

1. Religionslehre, 2 St. Einzelne Psalmen gelesen und gelernt (1, 19, 23, 90, 103 130 und 139). Das erste und zweite Buch Mosis mit Auswahl gelesen und erklärt. — Wiederholung der fünf Hauptstücke des Lutherischen Katechismus; wiederholende und erweiternde Erklärung des zweiten, vierten und fünften Hauptstücks, unter Berücksichtigung der zugehörigen Sprüche und Bibelstellen. — Lahrs.

2. Deutsch, 3 St. Im S.: Abschnitte aus den Nibelungen, Gudrun, Luise von Voss; eine Reihe von Goethes, Schillers und Uhlands Balladen aus Hopf und Paulsiek für III erklärt, sieben derselben wurden gelernt. Im W.: Wilhelm Tell und Körners Zriny. — Ausgewählte Prosastücke wurden gelesen und besprochen. — Wiederholung der Lehre vom Satze und der Interpunktionsregeln. Vierwöchentlich ein Aufsatz. — Dreyer.

3. Latein, 6 St. Wiederholung der wichtigsten Regeln von der Formen- und Kasuslehre. Die Tempora, Consecutio temporum, Indikativ, Konjunktiv, Infinitiv, orat. obl., Participium, Gerundium nach Siberti-Meiring. — Mündliche Übersetzungen aus Ostermann für III. — Alle 14 Tage eine Klassenarbeit, bisweilen eine häusliche Arbeit. — Lektüre: Cäs. B. G. I. 1—29. B. G. II. Ov. VI. 313—381. X. 1—77. — i. S.: Stettiner. — i. W.: Müller.

4. Französisch, 4 St. a) Grammatik 2 St. wöchentlich. Plötz, Schulgrammatik, Abschnitt 3 und 4. In 3 Wochen je eine häusliche und eine Klassenarbeit. b) Lektüre 2 St. J. Verne, „Le tour du monde en 80 jours.“ 1—14. — Gerschmann.

5. Englisch, 4 St. a) Grammatik, 2 St. wöchentlich. Beendigung von Gesenius, Elementargrammatik. Die meisten der zugehörigen englischen und deutschen Stücke übersetzt. Alle drei Wochen eine häusliche und eine Klassenarbeit. b) Lektüre, 2 St. Marryat: Settlers in Canada bis Kap. XIV. — Dreyer.

6. Geschichte und Geographie, 4 St. Brandenburgisch-Preussische Geschichte von 1648—1871. Wiederholung der deutschen Geschichte bis 1648. — Europa mit Ausschluss von Deutschland. Wiederholung der übrigen Erdteile. — Stettiner.

7. Mathematik, 5 St. Arithmetik, 2 St. Proportionen. Potenzen mit ganzen, positiven und negativen Exponenten. Quadrat- und Kubikwurzeln aus Buchstabenausdrücken und Zahlen. Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Aufgaben zur Bildung von Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Geometrie, 3 St., davon 1 St. systematisches Lösen von Konstruktionsaufgaben. Verhältnis von geraden Linien. Ähnlichkeit der Dreiecke. Verhältnis gerader Linien am Kreise. Verhältnis der Flächen. — Geffroy.

8. Naturbeschreibung, 2 St. Abschluss der Morphologie der Pflanzen und Beschreiben von Pflanzen nach dem natürlichen System. Im W.: die Mollusken, Echinodermen, Coelenteraten und Protozoen; Repetition der Arthropoda. — Michelis.

9. Zeichnen, 2 St. Wie in IIb. — Siemering.

Tertia B. Ordinarius: Dr. Stettiner.

1. Religionslehre, 2 St. Lektüre und Erklärung der Apostelgeschichte, dabei das Leben des Apostel Paulus, 6 Kirchenlieder gelernt. — Das zweite Hauptstück wurde erklärt, dazu passende Sprüche gelernt, einzelne Bibelstellen gelesen; viertes und fünftes Hauptstück gelernt. — Rosikat.

2. Deutsch, 3 St. Gedichte und Prosastücke nach Hopf und Paulsiek (für III) gelesen; im Anschluss daran Wiederholung des zusammengesetzten Satzes, der Interpunktionsregeln und Dispositionsübungen. Deklamationsübungen. Alle vierzehn Tage ein häuslicher oder Klassenaufsatz. — Geffroy.

3. Latein, 6 St. Wiederholung der Formenlehre. Wiederholung und Erweiterung der Kasuslehre. Die in der Erzählung häufiger gebrauchten Konjunktionen. Die „Dasssätze“. Mündliche Übersetzungen aus Ostermann für III. Lektüre: Nepos, Aristides, Miltiades, Cimon, Conon, Pelopidas, Hannibal. Alle vierzehn Tage eine Klassenarbeit, bisweilen eine häusliche Arbeit. — Stettiner.

4. Französisch, 4 St. Grammatik, 2 St. Plötz, Schulgrammatik, Lektion 1—23. Lektüre, 2 St.: Ahn, Französisches Lesebuch I. Teil, gemischte Stücke: Erster Kursus II, III, 12; zweiter Kursus II, 3, 4, 5; dritter Kursus I, 1, 4; II, 5; V, 1, 3, 5, 6, 31. Alle vierzehn Tage eine Klassenarbeit. — Dreyer.

5. Englisch, 4 St. Gesenius, Elementarbuch, Kap. 1—12; die zugehörigen Übungsstücke aus Reihe I meist übersetzt; ferner aus den englischen Stücken III. Kurze Diktate. Wöchentlich eine Klassenarbeit. — Gerschmann.

6. Geschichte und Geographie, 4 St. Deutsche Geschichte bis 1648. Geschichte des deutschen Ordens. Wiederholung der griechischen und römischen Geschichte. — Asien, Afrika, Amerika, Australien, Wiederholungen. — I. S.: Sommerfeldt, i. W.: Stettiner.

7. Mathematik, 5 St. Geometrie, 2 St. Wiederholung des Pensums von Quarta. Die Lehre vom Kreise. Die Lehre von der Gleichheit der Figuren. Konstruktionsaufgaben. — Arithmetik, 2 St. Die Buchstabenrechnung bis zu den Potenzen. Quadratwurzeln aus Buchstabenausdrücken und Zahlen. Zahlengleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten. Leichte Aufgaben zur Bildung von Gleichungen. — Rechnen, 1 St. Wiederholung der Rechnungen aus dem Pensum der Quarta. Schwierigere Aufgaben aus dem praktischen Leben. — Geffroy.

8. Naturbeschreibung, 2 St. Im S.: Beschreiben von Pflanzen nach dem natürlichen System; im W.: Repetition der niederen Wirbeltiere; die Arthropoden, besonders Insekten. — Michelis.

9. Zeichnen, 2 St. Nach Vorlagen schwierigere Flachornamente in verändertem Massstabe. Farbige Flächenverzierungen. — Siemering.

Quarta. Ordinarius: Realgymnasiallehrer Rosikat.

1. Religionslehre, 2 St. Lektüre des Matthäus-Evangeliums, Erklärung des ersten Hauptstücks, sechs Lieder und eine Anzahl Sprüche gelernt, das zweite Hauptstück wiederholt, das dritte neu gelernt. — Rosikat.

2. Deutsch, 3 St. Prosastücke und Gedichte aus Hopf und Paulsiek gelesen und erläutert. Gedichte gelernt, grammatische und Interpunktionsübungen im Anschluss an die Lektüre. In zwei Wochen ein Diktat, vierteljährlich zwei Aufsätze. — Rohse.

3. Latein, 7 St. Wiederholung und Erweiterung der Formenlehre. Das Wichtigste aus der Kasuslehre. Accus. c. Inf., Abl. abs. Die häufigsten Konjunktionen. Übersetzungen aus Ellendts Lesebuch und Ostermann (f. IV). Wöchentlich eine Klassenarbeit, bisweilen eine häusliche Arbeit. — Rosikat.

4. Französisch, 5 St. Nach Plötz, Elementarbuch der französischen Sprache, Lektion 41—91. Aus dem zugehörigen Lesebuche wurden eine Reihe von Stücken gelesen. Alle vierzehn Tage eine Klassenarbeit. — Dreyer.

5. Geschichte und Geographie, 4 St. Griechische und Römische Geschichte. Repetition der Sagen. — Europa. Repetition der aussereuropäischen Erdteile. — I. S.: Sommerfeldt, i. W.: Rohse.

6. Rechnen und Mathematik, 5 St. Wiederholung. Abgekürztes Rechnen mit Decimalbrüchen. Zinsrechnung. Tararechnung. Mischungsrechnung. Geometrie: Sätze vom Dreieck bis zur Kongruenz; Sätze vom Parallelogramm. — Stieren.

7. Naturbeschreibung, 2 St. Im S.: Selbständigeres Beschreiben von Pflanzen; Linnés System, zusammenfassende Wiederholung der morphologischen Grundbegriffe. Im W.: Systematik der Säugetiere und Vögel; kurze Übersicht über Reptilien und Amphibien. — Michelis.

8. Zeichnen, 2 St. Nach Vorlagen leichte Flachornamente im Umriss und in verändertem Massstabe. — Siemering.

Quinta. Ordinarius: Oberlehrer Rohse.

1. Religionslehre, 2 St. Die biblischen Geschichten des Neuen Testaments; das zweite Hauptstück vollständig; sechs Kirchenlieder; Geographie von Palästina. Nebenher ging die Wiederholung des Sextaner-Pensums. — Hittcher.

2. Deutsch, 3 St. Die neuesten Gedichte und Prosastücke aus Hopf und Paulsiek (für V) wurden gelesen und zum Teil reproduziert. Eine Anzahl Gedichte wurden gelernt. Regeln über Orthographie, Satzbau und Interpunktion. Wöchentlich ein Diktat. — Gerschmann.

3. Latein, 7 St. Regelmässige und unregelmässige Formenlehre (Grammatik Ellendt). Übersetzen aus Ostermann (für V), je zwei Wochen eine Klassenarbeit. — Rohse.

4. Französisch, 5 St. Plötz, Elementarbuch, Lektion 1—40; avoir, être und die beiden ersten Konjugationen. Wöchentlich eine Klassenarbeit. — Gerschmann.

5. a) Geschichte, 1 St. Biographische Erzählungen aus der römischen und der deutschen Geschichte. — Rohse.

b) Geographie, 2 St. Asien, Amerika, Afrika, Australien. Repetition von Europa. — Im S.: Michelis, im W.: Sommerfeldt.

6. a) Rechnen, 3 St. Wiederholung der Brüche und der einfachen Regeldetriaufgaben. Vollständige Regeldetriaufgaben. Decimalbrüche. Einfache Procentaufgaben. — Geffroy.

b) Zeichnen geometrischer Figuren zur Vorbereitung für den geometrischen Unterricht. 1 St. — Der Direktor.

7. Naturbeschreibung, 2 St. Im S.: Wiederholung und Erweiterung des Pensums von Sexta, im W.: wichtige Säugetiere, Vögel, Reptilien und Amphibien. — Michelis.

8. Schreiben, 2 St. Übungen in deutscher und lateinischer Schrift nach Vorschriften des Lehrers an der Wandtafel. — Hittcher.

9. Zeichnen, 2 St. Massenunterricht. Ebene geradlinige und krummlinige Gebilde nach Vorzeichnung und Erläuterung des Lehrers an der Wandtafel. — Siemering.

Sexta. Ordinarius: im S.: Realgymnasiallehrer Boenig, im W.: Dr. Lehmann.

1. Religionslehre, 3 St. Die wichtigsten biblischen Geschichten des Alten Testaments; die Festgeschichten des Neuen Testaments; die zehn Gebote mit der Erklärung Luthers nebst Schluss; sechs Lieder vollständig. — Hittcher.

2. Deutsch, 3 St. Lektüre aus Hopf und Paulsiek für VI und mündliche Wiedergabe des Gelesenen; eine Reihe von Gedichten wurde gelernt; wöchentlich ein Diktat. — Im S.: Boenig, im W.: Lehmann.

3. Latein, 8 St. Regelmässige Deklination der Substantiva und Adjektiva; Genusregeln; Komparation, Numeralia cardinalia und ordinalia; Pronomina; sum; die vier Konjugationen. Vokabellernen aus Ostermann, Voc. f. VI; Übungen im Übersetzen aus Ostermann, Übungsbuch f. VI. Monatlich drei Klassenarbeiten. — Im S.: Boenig, im W.: Lehmann.

4. a) Geschichte: 1 St. Griechische Mythologie. Die deutsche Kaiserfamilie. — Im S.: Boenig, im W.: Lehmann. — b) Geographie, 2 St. Kurze Übersicht über die ganze Erde; Länder Europas mit den Hauptstädten, specieller Deutschland und besonders Ostpreussen. — Im S.: Michelis, im W.: Sommerfeldt.

5. Rechnen, 5 St. Die vier Rechnungsarten mit Brüchen. Einfache Aufgaben mit Zurückgehen auf die Einheit. Übung der Begriffe: Summe, Unterschied, Produkt. — Fritsch.

6. Naturbeschreibung, 2 St. Im S.: Grundbegriffe der elementaren Morphologie, erläutert an lebenden Pflanzen. Im W.: die Hauptrepräsentanten der Säugetiere und Vögel. — Michelis.

7. Schreiben, 2 St. Übungen in deutscher und lateinischer Schrift nach Vorschriften des Lehrers an der Wandtafel. — Hittcher.

8. Zeichnen, 2 St. Massenunterricht. Ebene geradlinige Gebilde mit Anwendung von Lineal und Mass nach Vorzeichnung und Erläuterung des Lehrers an der Wandtafel. — Siemering.

Vorklasse. Ordinarius: Hittcher.

2. Religionslehre, 2 St. Ausgewählte Abschnitte der biblischen Geschichte aus dem Alten und Neuen Testament mit besonderer Berücksichtigung der Festgeschichten. Das erste Hauptstück ohne Luthers Erklärung. Einige Gebete, Sprüche und Strophen von Festliedern. — Hittcher.

2. Deutsch, 7 St. Tägliche Lese- und Memorierübungen, Abschriften und sonstige orthographische Übungen; wöchentlich ein Diktat; Kenntnis der Begriffswörter und Flexion derselben; der nackte und der erweiterte einfache Satz. — Hittcher.

3. Rechnen, 5 St. Die vier Species mit unbenannten und benannten ganzen Zahlen in engeren und erweiterten Zahlenkreisen, im Kopf und schriftlich. — Hittcher.

4. Schreiben, 4 St. Deutsche und lateinische Schrift nach Vorschriften des Lehrers an der Wandtafel. — Hittcher.

Vom Religionsunterricht waren nur diejenigen Schüler befreit, für welche der Konfirmationsunterricht auf dieselben Stunden fiel wie der Religionsunterricht in der Schule.

Mitteilungen über den technischen Unterricht.

a) Der Turnunterricht fand unter der Leitung des Herrn Sanitätsrat Dr. med. Müttrich und der Aufsicht des Herrn Oberlehrer Lahrs im städtischen Turnhause in zwei Abteilungen statt; jede Abteilung turnte 1 St. w.; ausserdem erhielten die Vorturner besonders Unterricht ($^1/_2$ St. w.). — Im Sommer turnten die Schüler der Vorklasse auf dem Schulhofe (Freiübungen), unter Leitung des Herrn Gymnasiallehrer Geffroy.

Im Sommer waren 13 Schüler, im Winter 18 Schüler vom Turnunterricht dispensiert.

b) Der Gesangunterricht wurde von Herrn Kantor Richter geleitet; die Vorklasse hatte wöchentlich 2 halbe Stunden, VI und V je 2 Stunden, eine Selekta, gebildet aus geeigneten Schülern aller Klassen, wöchentlich eine Stunde.

Verzeichnis der Lehrbücher,

welche in den einzelnen Klassen von Ostern 1890 ab gebraucht werden.

1. Für die Vorklasse: Woike-Triebel, biblische Historien. 80 Kirchenlieder. — Seltzsam, Lesebuch. — Neuer deutscher Liederkranz, Potsdam, Rentel.

2. Für Sexta: Woike-Triebel, biblische Historien. 80 Kirchenlieder. Lahrs, kleine Sitten- und Glaubenslehre. — Hopf und Paulsiek, Lesebuch für VI. Regeln und Wörterverzeichnis für die deutsche Orthographie. — Ellendt-Seyffert, lateinische Schulgrammatik. Ostermann, lateinisches Übungsbuch für VI. Ostermann, Vokabularium (I. Abteilung). — Krause, Sagen und Geschichten. — Debes' Schulatlas für die mittleren Unterrichtsstufen. — Pabst, das Notwendigste zum Gesangunterricht. Odenwald, Jugend-, Volks- und Vaterlandslieder 1. Heft.

3. Für Quinta: Woike-Triebel, wie in VI. 80 Kirchenlieder. Lahrs wie in VI. — Hopf und Paulsiek für V. Regeln und Wörterverzeichnis etc. — Ellendt-Seyffert, lateinische Schulgrammatik. Ostermann, lateinisches Übungsbuch für V. — Plötz, Elementarbuch der französischen Sprache. — Krause, wie in VI. — Seydlitz, Geographie, Ausgabe B, kleine Schulgeographie. — Atlas, wie in VI. — Bail, methodischer Leitfaden für den Unterricht in der Naturgeschichte, Zoologie Heft 1 und Botanik Heft 1. — Pabst und Odenwald, wie in VI.

4. Für Quarta: Bibel. 80 Kirchenlieder. Lahrs, wie in VI. — Hopf und Paulsiek für IV. Regeln u. s. w. wie in VI. — Weller, Herodot. Ellendt-Seyffert, lateinische Schulgrammatik. Ostermann, lateinisches Übungsbuch für IV. — Plötz, wie in V. — Jäger, Hilfsbuch für den Unterricht in der alten Geschichte. — Seydlitz und Atlas, wie in V. — Lieber und von Lühmann, Elemente der Mathematik I (Planimetrie). — Bail, wie in V.

5. Für Tertia B: Bibel. 80 Kirchenlieder. Lahrs, Leitfaden des evangelischen Religionsunterrichts und Lahrs, kleine Sitten- und Glaubenslehre. — Hopf und Paulsiek für III. Regeln u. s. w. wie in VI. — Siberti-Meiring-Fisch, lat. Schulgrammatik. Ostermann für III. Ein lateinisches Lexikon. — Ahn, französisches Lesebuch I. Plötz, Schulgrammatik der französischen Sprache. — Gesenius, Elementarbuch der englischen Sprache. — Lohmeyer und Thomas, deutsche Geschichte. — Seydlitz, wie in V. Debes' Schulatlas für die Oberklassen. Lieber und von Lühmann, Elemente der Mathematik I u. II. — Bail, Naturgeschichte, Zoologie, Heft 2 und Botanik Heft 2.

6. Für Tertia A: Alle Bücher wie in Tertia B ausser Ahn, französisches Lesebuch. Ein französisches Lexikon. — Lohmeyer und Thomas, brandenburgisch-preussische Geschichte.

7. Für Sekunda B: Bibel. 80 Kirchenlieder. Lahrs, wie in IIIb. — Herbst, deutsche Litteraturgeschichte. — Siberti, wie in IIIb. Ein lateinisches Lexikon. — Plötz, manuel de litt. franç. Plötz, Schulgrammatik. Französisches Lexikon. — Süpfle, englische Chrestomathie. Gesenius, Grammatik der englischen Sprache. Ein englisches Lexikon. — Herbst, historisches Hilfsbuch I. Alte Geschichte (für Realschulen). — Seydlitz und Atlas, wie in IIIb. — Lieber und von Lühmann, Mathematik I, II, III. August, Logarithmentafeln. — Bail, wie in IIIb. — Koppe, Anfangsgründe der Physik.

8. Für Sekunda A: Alle Bücher wie in IIb ausser Bail; ferner: Herbst, historisches Hilfsbuch II (Mittelalter). — Lorscheid, anorganische Chemie.

9. Für Prima: Bibel. 80 Kirchenlieder. Lahrs, wie in IIIb. — Siberti, wie in IIIb — Plötz, Manuel, wie in IIb. Probst, Übungsbuch II. Teil. — Gesenius, Grammatik wie in IIb. — Herbst, III (Neuere Geschichte). — Lieber und von Lühmann I, II, III. August, wie in IIb. Gandtner-Gruhl, Elemente der analytischen Geometrie. — Koppe, wie in IIb. — Lorscheid, wie in IIa.

II. Verfügungen der vorgesetzten Behörden.

A. Des Königlichen Provinzialschulkollegiums.

1889. 31. März. Der Schulamtskandidat Max Stieren wird dem Realgymnasium zur Ableistung seines Probejahres vom 1. April ab überwiesen.

29. April. Die katholischen Schüler erhalten fortan den Religionsunterricht von den Kaplänen Matthee (Stufe I und III) und Busan (Stufe II) im Königlichen Friedrichskollegium.

29. April. Nach Anordnung des Herrn Ministers wird im Monat Juni jeden Jahres in Königsberg eine Turnlehrerprüfung abgehalten werden.

6. Mai. Der Herr Minister hat angeordnet, dass über die Ergebnisse der schriftlichen Abiturientenprüfung Mitteilungen nur unter gewissen Bedingungen gemacht werden dürfen. Repetitionen für die Abiturientenprüfung dürfen seitens der Fachlehrer nicht veranstaltet werden.

1. Juli. Bei der ungewöhnlich grossen Hitze kann der Unterricht nachmittags und in den letzten Vormittagsstunden ausfallen. Besondere Aufmerksamkeit ist der Lüftung der Klassenräume zuzuwenden.

30. Juli. Mitteilung einer Verfügung des Ministeriums vom 23. November 1888, betreffend den Kopfgenickkrampf (meningitis cerebrospinalis). Bei dieser Krankheit treten bezüglich des Schulbesuchs die Bestimmungen der Min.-Verf. vom 14. Juli 1884, 1a in Kraft.

24. September. Der ordentliche Lehrer Bönig ist zum 7. Oktober zur Teilnahme an einem sechsmonatlichen Kursus an der Turnlehrerbildungsanstalt nach Berlin einberufen worden.

29. September. Die Vertretung des ordentlichen Lehrers Bönig durch den Schulamtskandidaten Dr. Lehmann wird genehmigt.

17. Oktober. Der Schulamtskandidat Johannes Müller wird dem R.-G. zur Ableistung seines Probejahres überwiesen.

16. Dezember. Die beantragte Einführung folgender Lehrbücher von Ostern 1890 ab wird genehmigt: 1. In VI und V Krause, Sagen und Geschichten; 2. zunächst in IIb (1891 in IIa, 1892 in I), Herbst, Hilfsbuch für den Unterricht in der deutschen Litteratur;

3. in IV Weller, Geschichten aus Herodot (statt Ellendt, lat. Übungsbuch); 4. in IIIb Lohmeyer und Thomas, deutsche Geschichte, in IIIa Lohmeyer und Thomas, brandenburgisch-preussische Geschichte (statt Heinel-Krosta, preuss. Geschichte).

1890. 5. Januar. Mitteilung der Ferienordnung für 1890 (s. unter VII).

7. Januar. Junge Leute, welche bereits Studenten gewesen sind, sollen zum Eintritt in die höheren Schulen von Universitätstädten nicht zugelassen werden.

15. Januar. Bei der Versetzung nach I ist mit grösster Strenge und Sorgfalt zu verfahren, im besonderen ist auf die Absicht der Schüler, nach erfolgter Versetzung abzugehen, nicht Rücksicht zu nehmen.

17. Januar. Klavier und Orgel sind auf das eingestrichene a mit 870 Schwingungen in der Sekunde zu stimmen.

8. Februar. Während der Osterferien findet in Berlin ein achttägiger archäologischer Kursus für Lehrer statt.

7. März. Der Herr Minister hat die Einführung folgender Lehrbücher von Ostern c. ab genehmigt: 1. Lahrs, kleine Sitten- und Glaubenslehre. 2. Lahrs, Leitfaden des evangelischen Religionsunterrichts an höheren Schulen.

10. März. Der unterm 27. November 1889 dem Kantor Richter gewährte Urlaub wird bis zum 1. April verlängert.

B. Des Magistrats.

1889. 8. April. Der Lohn des Schuldieners Kaiser ist von 600 Mk. auf 660 Mk. jährlich erhöht.

11. Mai. Die Erteilung des Turnunterrichts an die Schüler der Vorklasse während des Sommers auf dem Schulhofe durch den ordentlichen Lehrer Geffroy wird nach den Vorschlägen des Direktors genehmigt.

19. Juli. Für den Schuldiener ist eine neue Instruktion ausgearbeitet; derselbe ist darauf zu verpflichten.

13. September. Für das nächste Jahr wird ein botanischer Schulgarten 2. Wallgasse 6—11 eingerichtet werden.

16. September. Nach dem neuen Besoldungsplan für die Elementar-, Mittelschul- und Vorschullehrer vom 6. Juni 1889 wird das Gehalt des Herrn Hittcher auf 2700 Mk. erhöht.

9. Oktober. Die Vertretung des ordentlichen Lehrers Bönig für das Winterhalbjahr wird dem Schulamtskandidaten Dr. Lehmann gegen eine Remuneration von 120 Mk. monatlich übertragen.

22. November. Die beantragte Erhöhung des Wohnungsgeldes der ordentlichen Lehrer wird wiederum abgelehnt (vgl. Progr. 1888 und 1889).

1890. 8. Januar. Der Vorschullehrer wird fortan nach denselben Grundsätzen pensioniert werden, wie die anderen Lehrer.

21. Februar. Die jährlichen Zinsen der Simonstiftung von 1666,67 Mk. sollen am 15. Oktober jeden Jahres als Stipendium an einen armen würdigen Schüler des Realgymnasiums vom Magistrat auf Vorschlag des Lehrerkollegiums verliehen werden.

III. Chronik der Schule.

Das Schuljahr begann am Donnerstag den 25. April 1889 mit der Einführung des zum 5. ordentl. Lehrer berufenen Herrn Dr. Dreyer*) in sein Amt (vgl. Prog. 1889). — Somit waren alle etatsmässigen Stellen wieder besetzt; und trat eine Änderung während des Schuljahrs nicht ein.

Als Probekandidaten waren beschäftigt: von Michaelis 1888 bis 1889 Herr Dr. Lehmann, von Ostern 1889 bis 1890 Herr Dr. Sommerfeldt und Herr Stieren, von Michaelis 1889 ab Herr Müller.

Vom 1. Juni ab wurde Herr Oberlehrer Rohse zu einer achtwöchentlichen militärischen Übung einberufen. Da von der Übungszeit eine Woche in die Pfingst- und drei Wochen in die Sommerferien fielen, war derselbe nur während vier Wochen zu vertreten. Die Vertretung wurde im wesentlichen dem Probekandidaten Herrn Dr. Sommerfeldt gegen eine entsprechende, vom Magistrat bereitwilligs tgewährte Remuneration übertragen.

Eine grössere Störung erlitt der Unterricht durch die Teilnahme des ordentl. Lehrers Herrn Bönig an einem Kursus an der Königl. Turnlehrerbildungsanstalt in Berlin. Derselbe war infolgedessen für das Winterhalbjahr beurlaubt und wurde von dem Kandidaten des höhern Schulamts Herrn Dr. Lehmann — mit bestem Erfolge — vertreten. Die Vertretungskosten bewilligte auch in diesem Falle der Magistrat in wohlwollender Erkenntnis der Bedürfnisse der Anstalt, da dem Kollegium bisher kein geprüfter Turnlehrer angehörte.

Infolge andauernder Krankheit sah sich Herr Kantor Richter genötigt, den Gesangunterricht vom 15. November ab ganz aufgeben; er wurde bis zum Schluss des Schuljahrs beurlaubt und von Herrn Oberlehrer Michelis vertreten. Herr Kantor Richter hat zu Ostern d. J. seine Pensionierung beantragt, und wird nunmehr, nach 31jähriger Wirksamkeit als Gesanglehrer der Anstalt, in den wohlverdienten Ruhestand treten. Es sei mir gestattet, auch an dieser Stelle Herrn Kantor Richter für seine überaus gewissenhafte treue Pflichterfüllung während der langen Zeit seiner Lehrthätigkeit, für seine vielfach bethätigte kollegiale Gesinnung, sowie für das lebhafte Interesse zu danken, welches er an allen die Schule, die Lehrer und Schüler betreffenden Ereignissen nahm. Möge sein Gesundheitszustand sich bessern, die ungewöhnliche geistige Frische aber dem 79jährigen verehrten Manne noch viele Jahre erhalten bleiben!

Von den übrigen Lehrern wurde wegen Krankheit oder aus andern persönlichen Gründen im ganzen nur selten der Unterricht ausgesetzt; der Direktor fehlte eine Woche vor Beginn der Sommerferien wegen einer notwendigen Badereise, Herr Oberlehrer Lahrs musste gegen Ende des Schuljahrs wegen eigner Krankheit, Herr Siemering wegen Krankheit seiner Kinder für mehrere Wochen den Unterricht aussetzen.

Der Gesundheitszustand der Schüler war in diesem Jahre sehr ungünstig. Ausser den vor Weihnachten bis zu 20 pCt. der Schülerzahl sich steigernden Erkrankungsfällen an Influenza wurden sehr viele Schüler von Scharlach ergriffen. Glücklicherweise hat der Tod uns keinen der Erkrankten entrissen, aber es sind infolge der langen Schulversäumnis viele erheblich zurückgeblieben, und ist der Unterricht in einigen Klassen oftmals mit grossen Schwierigkeiten verbunden gewesen.

---

*) Karl Dreyer, geb. den 21. August 1859 zu Malchin in Mecklenburg, absolvierte Mich. 1878 das Realgymnasium zu Schwerin, studierte in Leipzig und Greifswald neuere Sprachen, wurde am 8. August 1882 in Greifswald zum Dr. phil. promoviert und war dann von Mich. 1882 bis Ostern 1884 in England (Birmingham) als Lehrer thätig. Im Nov. 1884 bestand er in Greifswald die Prüfung pro fac. doc., trat dann Ostern 1885 beim Realgymnasium zu Schwerin als cand prob. ein und wurde Mich. 1885 als dritter wissenschaftlicher Lehrer an die städt. höhere Mädchenschule in Tilsit berufen, wo er bis zum Übertritt an das städt. Realgymnasium in Königsberg thätig war. Von Mich. 1886 bis 1887 absolvierte er gleichzeitig sein Probejahr am Königl. Realgymnasium in Tilsit.

Wegen grosser Hitze fiel der Unterricht an den Nachmittagen des 24. Mai, 3. und 4. Juni aus.

Es fanden zwei Abiturientenprüfungen statt, am 5. September 1889 und 1. März 1890; in jeder erhielten fünf Abiturienten das Zeugnis der Reife (vgl. unten IV, 3). Bei der ersten führte den Vorsitz als Königl. Kommissarius der stellvertretende Prov.-Schulrat Herr Gymnasialdirektor Professor Dr. Kammer, bei der 2. der Direktor der Anstalt als Stellvertreter des Geheimen Regierungs- und Provinzialschulrats Herrn Trosien; beiden Prüfungen wohnte als Vertreter des Magistrats Herr Stadtschulrat Dr. Tribukait bei.

Während der Pfingstferien, vom 12. bis 14. Juni v. J., fand in Danzig die 12. Direktorenversammlung der vereinigten Provinzen Ost- und Westpreussen statt, bei welcher verhandelt wurde über: 1. Ziel und Methode des lateinischen Unterrichts auf dem Realgymnasium, 2. die griechischen Lehrbücher, 3. Mathematik und Rechnen an den höheren Lehranstalten, 4. das Französische am Gymnasium, 5. die Censurprädikate, 6. das Englische am Gymnasium. — Der Unterzeichnete nahm an diesen Verhandlungen teil, im besondern als Referent bei dem 3. Beratungsgegenstande.

Im Sommer unternahmen sämtliche Klassen einzeln unter Leitung verschiedener Lehrer kleine Ausflüge in die Umgegend.

Die patriotischen Feste und Gedenktage wurden in gewohnter Weise gefeiert. Herr Oberlehrer Lahrs hielt die Festrede am 2. September, Herr Oberlehrer Michelis am 27. Januar, dem Geburtstage Sr. Majestät unseres Kaisers und Königs. — Da der Todestag des hochseligen Kaisers Friedrich in die Ferien und des hochseligen Kaisers Wilhelm auf einen Sonntag fiel, wurde dieser Tage am 17. Juni bezw. 8. März im Anschluss an das gemeinsame Morgengebet durch Herrn Professor Fritsch gedacht. Der Geburtstag weiland Kaiser Friedrichs fiel in die Michaelisferien, der Direktor erinnerte daher an diesen Gedenktag des preussischen Volks bei Beginn des Winterhalbjahrs. An dem Geburtstag weiland Kaiser Wilhelms I. am 22. März, hielt Herr Gerschmann die Gedächtnisrede.

IV. Statistische Mitteilungen.

1. Übersicht über die Frequenz und deren Veränderung im Laufe des Schuljahres 1889/90.

	A. Realgymnasium.										B. Vorklasse.
	O.I	U.I	O.II	U.II	O.III	U.III	IV	V	VI	Sa.	
1. Bestand am 1. Februar 1889	8	11	15	26	34	48	44	51	54	291	33
2. Abgang bis zum Schluss des Schuljahres 1888/89	2	2	4	5	2	3	4	8	3	33	2
3a. Zugang durch Versetzung zu Ostern	3	11	14	26	38	35	33	44	25	229	—
3b. Zugang durch Aufnahme zu Ostern	—	—	—	—	1	1	4	2	16	24	17
4. Frequenz am Anfang des Schuljahres 1889/90	9	17	14	33	45	43	42	56	48	307	23
5. Zugang im Sommersemester	—	—	—	—	1	1	1	—	1	4	3
6. Abgang im Sommersemester	5	2	2	3	1	4	4	4	2	27	1
7a. Zugang durch Versetzung zu Michaelis	2	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—
7b. Zugang durch Aufnahme zu Michaelis	—	—	—	3	3	1	4	1	1	13	3
8. Frequenz am Anfang des Wintersemesters	6	13	12	33	48	41	43	53	48	297	28
9. Zugang im Wintersemester	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
10. Abgang im Wintersemester	—	2	1	—	2	1	1	1	—	8	—
11. Frequenz am 1. Februar 1890	6	11	11	33	46	40	42	52	48	289	29
12. Durchschnittsalter am 1. Februar 1890	20,2	18,5	17,5	17,0	16,0	14,5	13,5	11,9	11,1	—	9,9

2. Übersicht über die Religions- und Heimatsverhältnisse der Schüler.

	A. Realgymnasium.							B. Vorschule.						
	Evang.	Kath.	Dissid.	Juden.	Einh.	Ausw.	Ausl.	Evang.	Kath.	Dissid.	Juden.	Einh.	Ausw.	Ausl.
1. Am Anfange des Sommersemesters	279	8	3	17	222	83	2	21	—	—	2	18	5	—
2. Am Anfange des Wintersemesters	269	9	3	16	216	78	3	24	1	—	3	20	8	—
3. Am 1. Febr. 1890	262	8	3	16	210	76	3	25	1	—	3	21	8	—

Das Zeugnis für den einjährigen Militärdienst haben erhalten Ostern 1889: 19, Michaelis: 3 Schüler, davon sind zu einem praktischen Beruf abgegangen Ostern: 5, Michaelis: 3 Schüler.

3. Übersicht über die Abiturienten.

Laufende Nummer.	Des Geprüften				Stand und Wohnort des Vaters.	Dauer des Aufenthalts auf der Schule			Angabe des erwählten Berufs.
	Vor- und Zuname.	Konfession.	Datum der Geburt.	Ort der Geburt.		überhaupt (Jahre)	in der Prima (Jahre)	in Ober-Prima (Jahre)	
	Zu Michaelis 1889.								
1.	Johannes Brenner	ev.	4. Juli 1871	Swinemünde	Schlächtermeister in Swinemünde	$3^1/_2$	$2^1/_2$	$1^1/_2$	Studium des Maschinen-Ingenieur-Fachs.
2.	Eugen Kowski	ev.	11. Juni 1866	Königsberg	Schneidermeister in Königsberg	$3^1/_2$	$2^1/_2$	$1^1/_2$	Steuerfach.
3.	Oskar Makowka	ev.	5. Febr. 1867	Bromberg	†, königl. Beamter	$12^1/_2$	$3^1/_2$	$1^1/_2$	Studium der Chemie.
4.	Richard Schmaucks	ev.	17. April 1870	Alt-Pillau	Kantor in Alt-Pillau	$2^1/_2$	$2^1/_2$	$1^1/_2$	Postfach.
5.	Kurt Thiele	ev.	19. Novbr. 1868	Neisse	Fortifikations-Sekretär in Pillau	$2^1/_2$	$2^1/_2$	1	Militärdienst.
	Zu Ostern 1890.								
1.	Bruno Froelich	ev.	8. Juni 1872	Drengfurt	Sterbekassen-Collecteur in Königsberg.	$9^1/_2$	2	1	Will Feldmesser werden.
2.	Paul Neumann	ev.	20. Oktbr. 1866	Königsberg	Kaufmann in Königsberg.	4	3	2	Will Beamter werden.
3.	Ernst Rogner	ev.	21. Juni 1869	Königsberg	Malermeister in Königsberg	11	2	$^1/_2$	Will Kaufmann werden.
4.	Robert Siebrand	ev.	27. Januar 1870	Gr. Parlese, Kr. Rössel	Braumeister in Ponarth bei Königsberg	3	2	$^1/_2$	Will Kaufmann werden.
5.	Arthur Thurau*)	ev.	1. Januar 1870	Königsberg	†, Schuhmachermeister	2	2	1	Postfach.

*) Wurde von der mündlichen Prüfung befreit.

V. Sammlung von Lehrmitteln.

1. Die Lehrerbibliothek wurde vermehrt: a) Durch Fortsetzungen von Zeitschriften: Zarncke, Litterarisches Centralblatt. Wiedemann, Annalen der Physik und Beiblätter. Behaghel-Neumann, Litteraturblatt. Krumme, Pädagogisches Archiv. Ohrtmann, Jahrbücher der Mathematik. Wagner, Geographisches Jahrbuch. Geiger, Goethe-Jahrbuch. Gretschel-Bornemann, Jahrbuch der Erfindungen. Rethwisch, Jahresberichte über das

höhere Schulwesen. Centralorgan für die Interessen des Realschulwesens. Zeitschrift für Schulgesundheitspflege. Centralblatt für die gesamte Unterrichtsverwaltung Preussens. Schriften des Vereins für Reformationsgeschichte. Schriften der Goethegesellschaft. Verhandlungen der Direktorenkonferenzen in Ost- und Westpreussen. Schriften der Physikalisch-Ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. b) Durch Fortsetzungen von Lieferungswerken: Kirchhoff, Unser Wissen von der Erde. Oncken, Allgemeine Geschichte. Förster-Kenngott, Encyklopädie der Naturwissenschaften. Berghaus, Physikalischer Atlas. Heeren-Ukert, Geschichte der europäischen Staaten. Goethes Werke, herausgegeben im Auftrage der Grossherzogin Sophie. Murray, New English Dictionary. Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik. Ribbeck, Geschichte der römischen Dichtung. c) Durch Neuanschaffungen: Wenck, Deutschland vor 100 Jahren. Klussmann, Systematisches Verzeichnis der Programmabhandlungen. Alexander Schmidt, Gesammelte Abhandlungen.

2. Für die Schülerbibliothek wurden angeschafft:

Für I und II: nichts.

Für III: Rudolf Scipio, zu Wasser und zu Lande.

Für IV: nichts.

Für V: Horn, Orkan auf Cuba, Die Silberflotte, Das Büchlein vom Feldmarschall Blücher, Eroberung von Algerien, Blüchers Schützling. Herrchenbach, Die Jungfrau vom Drachenfels. F. Hoffmann, Böses Gewissen, Arbeit und Gold, Ein gutes Herz, Hass und Liebe, Rufe mich an in der Not, Das treue Blut, Aus vergilbten Papieren, Treue Kindesliebe, Aus dem Grabe, Recht muss Recht bleiben, Réné, Geierwally, Das wahre Glück, Ein treuer Freund. Koch, Rübezahl. Stober, Der Schneider von Gastein. Gräbner, Robinson. Schmidt, Hermann und Thusnelda, Die Türken vor Wien, Friedrich der Grosse. Nieritz, Betty und Toms, Jakob und seine Söhne, Der Ausgestossene, Köhler und Prinzen. Baron, Was der Mensch säet, das wird er ernten. Hölting, der Grossvater und sein Enkel. Musäus, Volksmärchen. Wagner, Zonenbilder. Schwab, Deutsche Volksbücher. Colshorn, Märchen und Sagen. Hebel, Schatzkästlein. Witt, Götter- und Heldengeschichten. Grimm, Insel Felsenburg. Stein, Ein getreuer Knecht. Schupp, Der Fürst und sein Hofprediger.

Für VI: Lausch, Kinder- und Volksmärchen. Kühn, Seydlitz. Hoffmann, Der alte Gott lebt noch, Réné. Höcker, Der alte Derfflinger. Buddeus, Jung Harald. Hoffmann, Furchtlos und treu, Brave Leute. Hofmann, Robinson. Kolb, Unsere Tierwelt. Leutemann-Specht, Tierbilderbuch. Wagner, Im Grünen. Topelius, Märchen und Erzählungen. Buddeus, Matthias und Franzl. Horn, Belagerung von Wien. Palm, Unter deutscher Flagge. Würdig, Hurra, Jung Preussenblut.

3. Für den physikalischen Unterricht wurde angeschafft: Ein Ruhmkorffscher Funkeninduktor.

4. Für den naturhistorischen Unterricht: Eine Sammlung von künstlichen Krystallen. Ergänzungen für verschiedene Teile der Sammlung.

5. Für den geographischen Unterricht: Stumme physikalische Schulwandkarte der Länder, bearbeitet von Richard Kiepert. 1. Deutschland, 2. Frankreich. Hoelzels geographische Charakterbilder, 10 Tafeln.

Stiftungen und Unterstützungen von Schülern.

1. Unterstützungsfonds (verwaltet von Herrn Oberlehrer Rohse).

A. Einnahme:

1. Barbestand ult. März 1889	33 Mk.	85 Pf.	
2. Zugang durch Beiträge der Schüler:			
von I	32 Mk.	80 Pf.	
„ IIa	17 „	30 „	
„ IIb	47 „	20 „	
„ IIIa	42 „	40 „	
„ IIIb	38 „	90 „	
„ IV	35 „	55 „	
„ V	30 „	55 „	
„ VI	36 „	— „	
Summa	280 Mk.	70 Pf.	
3. Zinsen v. 1200 Mk. zu $3^1/_2$ pCt.	42 „	— „	
Summa der Einnahme	356 Mk.	55 Pf.	

B. Ausgabe:

1. An den Buchhändler	85 Mk.	40 Pf.
2. An den Buchbinder	9 „	10 „
3. An Schulgeld	71 „	10 „
4. Bare Unterstützungen	117 „	15 „
Summa der Ausgabe	282 Mk.	75 Pf.

A. Einnahme	356 Mk.	55 Pf.
B. Ausgabe	282 „	75 „
bleibt Barbestand	73 Mk.	80 Pf.
Ferner besitzt d. Unterstützungs-Fonds in Wertpapieren	1200 „	— „
Also in Summa Bestand	1273 Mk.	80 Pf.

Den Eltern unsrer Schüler danke ich herzlich für diese Beiträge, mit deren Hilfe auch in diesem Jahre viele arme Schüler unterstützt werden konnten.

2. Von der Geheimrat Simonschen (älteren) Stiftung erhielten zu Weihnachten drei Primaner je 20 Mk. und ein Quartaner 10 Mk.

3. Von der hiesigen Friedensgesellschaft für Kunst und Wissenschaft erhielt ein Primaner ein jährliches Stipendium von 120 Mk., wofür ich zugleich im Namen des Empfängers der so überaus wohlthätigen Gesellschaft herzlich danke.

4. Der im Jahre 1888 verstorbene Geh. Kommerzienrat Simon hat testamentarisch den hiesigen Gymnasien ein Legat von 10 000 Mk. ausgesetzt, aus welchem dem Direktor des Realgymnasiums die Summe von 1666,67 Mk. in diesem Jahre gezahlt worden ist. Der Magistrat hat als Patron der Anstalt diese Summe in Verwaltung genommen und auf den Vorschlag des Direktors bestimmt, dass die jährlichen Zinsen zu einem Stipendium für einen armen würdigen Schüler des Realgymnasiums verwendet werden sollen. Das Stipendium wird am 15. Oktober j. J. auf Vorschlag des Lehrer-Kollegiums vom Magistrat verliehen werden. — So hat das an Stiftungen für Schülerunterstützungen so arme Realgymnasium eine namhafte Vermehrung seiner Unterstützungsmittel erfahren; dem hochherzigen Stifter bleibt der Dank der Schule bis in die fernsten Zeiten gesichert.

VII. Mitteilungen an die Schüler und deren Eltern.

1. Bezüglich der Schulversäumnisse der Schüler bitte ich dringend folgende Vorschriften zu beachten:

Wird ein Schüler durch Krankheit am Besuch der Schule gehindert, so muss dies dem Ordinarius so bald als möglich, spätestens am Morgen des zweiten Tages, angezeigt und beim Wiederbesuch der Schule eine Bescheinigung des Vaters oder dessen Stellvertreters über die Dauer der Krankheit und, falls der Direktor es verlangt, auch ein ärztliches Attest beigebracht werden. Nur von den Schülern der Prima und der Sekunda wird, solange sie sich des Vertrauens würdig zeigen, eine schriftliche Entschuldigung nicht gefordert.

Hat ein Schüler eine ansteckende Krankheit überstanden, oder ist jemand in seiner häuslichen Umgebung davon befallen, so hat er eine ärztliche Bescheinigung darüber beizubringen, dass sein Schulbesuch die andern Schüler nicht gefährdet.

Erkrankt ein Schüler während der Ferien, so dass er beim Wiederbeginn des Unterrichts die Schule nicht besuchen kann, so ist dies dem Direktor oder dem Ordinarius gleich am ersten Schultage anzuzeigen.

Zu jeder nicht durch Krankheit veranlassten Schulversäumnis muss vorher schriftlich oder mündlich beim Direktor Urlaub nachgesucht werden.

2. Für die Ferien des Jahres 1890 sind folgende Termine festgesetzt: Es dauern
die Osterferien vom 29. März bis 14. April,
die Pfingstferien vom 23. Mai nachm. bis 29. Mai,
die Sommerferien vom 5. Juli bis 4. August,
die Michaelisferien vom 4. Oktober bis 20. Oktober,
die Weihnachtsferien vom 20. Dezember bis 5. Januar 1891.

3. Die öffentliche Prüfung findet am Freitag den 28. März von 9 Uhr morgens ab nach folgender Ordnung statt:

9 Uhr	VII.	Deutsch, Herr Hittcher.
9 Uhr 20 Min.	VI.	Latein, Herr Dr. Lehmann.
9 Uhr 40 Min.	V.	Naturbeschreibung, Herr Oberlehrer Michelis.
10 Uhr	IV.	Latein, Herr R.-G.-L. Rosikat.
10 Uhr 20 Min.	IIIb.	Französisch, Herr R.-G.-L. Dr. Dreyer.
10 Uhr 40 Min.	IIIa.	Mathematik, Herr R.-G.-L Geffroy.
11 Uhr	IIb.	Geschichte, Herr Dr. Stettiner.
11 Uhr 15 Min.	IIa.	Physik, Herr Professor Fritsch.
11 Uhr 30 Min.	I.	Englisch, Herr R.-G.-L. Gerschmann.

Zwischen den einzelnen Lektionen Deklamationen der Schüler.

Von den Schülern angefertigte Zeichnungen sind in dem Klassenzimmer der Prima (1 Tr. h.) zur gefälligen Ansicht ausgestellt.

4. Sonnabend den 29. März, 8 Uhr, werden im Kreise der Schule die Versetzungen bekannt gemacht, die Abiturienten entlassen und die Zeugnisse erteilt.

5. Das neue Schuljahr beginnt Montag den 14. April um 8 Uhr, für die Vorklasse um 9 Uhr.

6. Die Aufnahme neuer Schüler findet am 31. März, 1. und 12. April, von 9—1 Uhr, im Schulgebäude (Münchenhofplatz 8) 1 Tr. h. statt, und zwar am 31. März nur für die Vorklasse (Septima), am 1. April nur für die Gymnasialklassen, am 12. April für alle Klassen.

Die Aufzunehmenden haben den Geburts- oder Taufschein, das Impf- oder Wiederimpfungsattest und, wenn sie von einer anderen Schule kommen, ein Abgangszeugnis vorzulegen.

7. In amtlichen Angelegenheiten bin ich an allen Schultagen von 12—1 Uhr in meiner Wohnung (Gymnasialgebäude, Eingang Bauhofsgasse) zu sprechen.

Kleiber.

Der

Jacobische Multiplicator

für die

Differentialgleichungen der Mechanik

bei

Existenz einer auch von den ersten Derivirten nach der Zeit abhängenden Kräftefunction.

Inaugural-Dissertation

der

philosophischen Facultät zu Jena

zur Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt

von

H. Koppe,

Lehrer an der städtischen Realschule zu Braunschweig.

Jena, 1879.

Druck von A. Neuenhahn.

Seinem lieben Schwager

G. Schmemann

in inniger Dankbarkeit

gewidmet

vom

Verfasser.

Einleitung.

In der Abhandlung: Theoria novi Multiplicatoris[1]) stellt Jacobi einen dem Eulerschen Multiplicator für eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Veränderlichen entsprechenden Multiplicator für ein System von n simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen mit $n+1$ Veränderlichen auf und leitet aus diesem unter Benutzung von $n-1$ Integralgleichungen des Systems den Eulerschen Multiplicator der allein noch übrig bleibenden Differentialgleichung zwischen zwei Veränderlichen ab, führt mithin die letzte Integration mit Hülfe des Multiplicators des Systems auf eine blosse Quadratur zurück. Dieses Resultat bezeichnet er mit dem Namen: „Das Princip des letzten Multiplicators."

Dasselbe wird (auch für Differentialgleichungen höherer Ordnung, da sich solche leicht in Differentialgleichungen erster Ordnung verwandeln lassen) anwendbar, sobald sich eine Lösung einer gewissen, den Jacobischen Multiplicator definirenden, nicht linearen partiellen Differentialgleichung finden lässt.

Eine solche Lösung hat nun Jacobi allgemein für die verschiedenen Formen der Differentialgleichungen der analytischen Mechanik abgeleitet unter der Voraussetzung, dass die Kräfte nur von den Coordinaten und der Zeit abhängen; doch lässt sich, wie die folgenden Untersuchungen zeigen, der Jacobische Multiplicator ebenfalls für solche Probleme aufstellen, bei denen eine auch von den ersten Derivirten nach der Zeit der Art abhängende Kräftefunction besteht, wie sie Professor Schering[2]) in die Wissenschaft eingeführt hat. Diese Kräftefunction ist, wenn wir bei

---

1) Crelle's Journal: Band XXVII u. XXIX; siehe auch: Vorlesungen über Dynamik von C. G. J. Jacobi herausgegeben von A. Clebsch. Berlin 1866. S. 71—143.

2) Hamilton-Jacobische Theorie für Kräfte, deren Maass von der Bewegung der Körper abhängt v. E. Schering. Göttingen 1873. S. 16.

einem Massensystem von n Punkten die rechtwinkeligen Coordinaten eines derselben mit x_i, y_i, z_i, die ersten Derivirten nach der Zeit mit x'_i, y'_i, z'_i, die längst der Axen auf denselben wirkenden Kräftecomponenten mit X_i, Y_i, Z_i und die Kräftefunction mit V bezeichnen, durch die Gleich. $\sum_i (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = \delta V$ $- \frac{d}{dt} \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial x'_i} \delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y'_i} \delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z'_i} \delta z_i \right)$ definirt.

Ehe wir zu unserer Aufgabe selbst übergehen, stellen wir noch kurz die für das Folgende wichtigen Resultate aus der Theorie des Multiplicators und dessen Anwendung zur Integration zusammen.

Ist das System von n gewöhnlichen simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$1)\quad dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \ldots : X_n$$

vorgelegt und bezeichnet M irgend eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$2)\quad \frac{\partial MX}{\partial x} + \frac{\partial MX_1}{\partial x_1} + \ldots \frac{\partial MX_n}{\partial x_n} = 0;$$

sind ferner n—1 Integrale

$$f_2 = a_2,\ f_3 = a_3,\ \ldots\ f_n = a_n$$

gefunden mit den willkürlichen Integrationsconstanten $a_2 \ldots a_n$, welche die linken Seiten nicht affiziren, und verstehen wir unter u und v zwei Functionen von x, $x_1 \ldots x_n$, setzen schliesslich

$$X \frac{\partial u}{\partial x} + X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots X_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = U$$

$$X \frac{\partial v}{\partial x} + X_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + \ldots X_n \frac{\partial v}{\partial x_n} = V$$

und bilden die Functionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial u}{\partial x_n} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial v}{\partial x_n} \\ \frac{df_2}{\partial x} & \frac{df_2}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_3}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{\partial (uvf_2 \ldots f_n)}{\partial (xx_1 \ldots x_n)},$$

dann ist $\frac{M}{\frac{\partial(uvf_2 \,..\, f_n)}{\partial(xx_1 \,..\, x_n)}}$ der Eulersche Multiplicator der Differentialgleichung

$$Vdu - Udv = 0;$$

es wird also die noch übrig bleibende Integration durch die Quadratur

$$3) \quad \int \frac{M\,(Vdu - Udv)}{\frac{\partial\,(uvf_2 \,..\, f_n)}{\partial\,(xx_1 \,..\, x_n)}} = \text{const.}$$

geleistet, wenn unter dem Integralzeichen M, U, V und die Functionaldeterminante in u, v und den Constanten $a_2 \,..\, a_n$ ausgedrückt werden.

Die partielle Differentialgleichung (2) lässt sich weiter mit Hülfe des vorgelegten Systems (1) leicht in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$4) \quad \frac{d \log M}{dx} + \frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) = 0$$

verwandeln, welche ihrerseits ebenfalls zur Bestimmung eines Multiplicatorwertes benutzt werden kann.

Hat sich nun für ein mechanisches Problem das folgende System von m Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit den von der Zeit t abhängigen Veränderlichen $\xi_1 \,\ldots\, \xi_m$ ergeben:

$$5) \quad \frac{d^2\xi_1}{dt^2} = A_1 \ldots\ldots \frac{d^2\xi_m}{dt^2} = A_m,$$

wo die rechten Seiten keine zweiten Derivirten enthalten sollen, und führen wir nach der Bezeichnungsweise von Lagrange die ersten Derivirten durch die Gleichungen

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \xi'_1 \ldots\ldots \frac{d\xi_m}{dt} = \xi'_m$$

ebenfalls als Veränderliche ein, so wird der Multiplicator des entstandenen Systems von 2m Differentialgleichungen erster Ordnung

$$6)\quad \left.\begin{array}{l} dt : d\xi_1 : d\xi'_1 \\ : d\xi_2 : d\xi'_2 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ : d\xi_m : d\xi'_m \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 1 : \xi'_1 : A_1 \\ : \xi'_2 : A_2 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ : \xi'_m : A_m, \end{array}\right.$$

welchen Jacobi auch als Multiplicator des Systems (5) bezeichnet, durch die Gleichung

$$\frac{d \log M}{dt} + \frac{\partial A_1}{\partial \xi'_1} + \ldots \frac{\partial A_m}{\partial \xi'_m} = 0$$

definirt oder, wenn wir

$$\frac{d^2 \xi_1}{dt^2} = \xi''_1 \ldots \frac{d^2 \xi_m}{dt^2} = \xi''_m$$

setzen, durch

$$7)\quad \frac{d \log M}{dt} + \frac{\partial \xi''_1}{d\xi'_1} + \frac{\partial \xi''_2}{\partial \xi'_1} + \ldots \frac{\partial \xi''_m}{\partial \xi'_m} = 0.$$

Kommt in den Gleichungen (5) oder (6) t nicht explicite, sondern nur als Differential dt vor, so besteht die letzte Integration, welche t einführt, schon von vornherein in einer Quadratur; ferner ist dann ein von t freier Multiplicator des Systems (6) auch ein Multiplicator des verkürzten, t nicht enthaltenden Systems

$$8)\quad \left.\begin{array}{l} d\xi_1 : d\xi'_1 \\ : d\xi_2 : d\xi'_2 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ : d\xi_m : d\xi'_m \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \xi'_1 : A_1 \\ : \xi'_2 : A_2 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ : \xi'_m : A_m \end{array}\right.$$

und umgekehrt, sodass sich also bei Kenntniss eines solchen Multiplicatorwertes schon die vorletzte Integration auf eine Quadratur zurückführen lässt.

Aehnliches gilt im entsprechend erweiterten Maasse, wenn in der Gleichung (5) oder (6) eine oder mehrere der Veränderlichen nicht selbst, sondern nur ihre Differentiale enthalten sind.

Der Jacobische Multiplicator

für

die verschiedenen Formen der Differentialgleichungen der analytischen Mechanik.

§. 1.

Der Multiplicator der Differentialgleichungen in der II. Lagrangeschen Form.

Wählen wir als Coordinaten der Punkte eines Massensystems, welches beliebigen Bedingungen unterworfen ist und von Kräften beeinflusst wird, für welche eine in der Einleitung näher angegebene allgemeine Kräftefunction V besteht, solche Grössen q_1, $q_2 \dots q_k$, die von einander unabhängig sind, die also, wenn die Bedingungen in Gleichungen ausgedrückt sind, diese identisch erfüllen, und bezeichnen wir die lebendige Kraft des Systems mit T, so gilt das Hamiltonsche Princip

$$1)\quad \delta\int(T+V)dt = 0,$$

und wir erhalten, wenn wir die Variation ausführen, die Differentialgleichungen in der II. Lagrangerschen Form

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T+V)}{\partial q'_1} - \frac{\partial(T+V)}{\partial q_1} = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T+V)}{\partial q'_k} - \frac{\partial(T+V)}{\partial q_k} = 0$$

oder, wenn wir allgemein

$$\frac{\partial(T+V)}{\partial q'_r} = p_r$$

setzen,

$$2)\quad \frac{dp_1}{dt} - \frac{\partial(T+V)}{\partial q_1} = 0, \dots \frac{dp_k}{dt} - \frac{\partial(T+V)}{\partial q_k} = 0.$$

Da diese Gleichungen, durch Ausführung der Variation (1) entstanden, nur einen speziellen Fall der allgemeinen isoperimetrischen Gleichungen bilden, so lässt sich der Multiplicator derselben durch Spezialisirung des allgemeinen Theorems aufstellen, welches Jacobi in Crelle's Journal, B. XXIX. S. 362—376 entwickelt hat. Wir wollen jedoch den Wert des Multiplicators aus den Gleichungen (2) direct ableiten, um uns auf die Einzelheiten dieser Ableitung später beziehen zu können.

Denken wir uns die Gleichungen (2) nach den zweiten Derivirten $q''_1 \,..\, q''_k$ aufgelöst, so wird der Multiplicator derselben nach Gleichung (7) der Einleitung bestimmt durch

$$\frac{d \log M}{dt} + \frac{\partial q''_1}{\partial q'_1} + \dots \frac{\partial q''_k}{\partial q'_k} = 0$$

oder

$$3) \quad \frac{d \log M}{dt} + \Sigma_s \frac{\partial q''_s}{\partial q'_s} = 0, \quad s = (1,2 \,..\, k).$$

Um den Wert von $\frac{\partial q''_s}{\partial q'_s}$ zu finden, setzen wir zur Abkürzung

$$\psi_1 = \frac{dp_1}{dt} - \frac{\partial (T+V)}{\partial q_1} = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\psi_k = \frac{dp_k}{dt} - \frac{\partial (T+V)}{\partial q_k} = 0$$

und erhalten durch Differentiation dieser Gleichungen nach q'_s, indem wir $q''_1 \,..\, q''_k$ als Functionen von q'_s zu betrachten haben, die Gleichungen

$$4) \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial q''_1}\frac{\partial q''_1}{\partial q'_s} + \dots \frac{\partial \psi_1}{\partial q''_s}\frac{\partial q''_s}{\partial q'_s} + \dots \frac{\partial \psi_1}{\partial q''_k}\frac{\partial q''_k}{\partial q'_s} + \frac{\partial \psi_1}{\partial q'_s} = 0$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial q''_1}\frac{\partial q''_1}{\partial q'_s} + \dots \frac{\partial \psi_2}{\partial q''_s}\frac{\partial q''_s}{\partial q'_s} + \dots \frac{\partial \psi_2}{\partial q''_k}\frac{\partial q''_k}{\partial q'_s} + \frac{\partial \psi_2}{\partial q'_s} = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial q''_1}\frac{\partial q''_1}{\partial q'_s} + \dots \frac{\partial \psi_k}{\partial q''_s}\frac{\partial q''_s}{\partial q'_s} + \dots \frac{\partial \psi_k}{\partial q''_k}\frac{\partial q''_k}{\partial q'_s} + \frac{\partial \psi_2}{\partial q'_s} = 0.$$

Führen wir hier ferner die Bezeichnung ein:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial q''_1} = a_{11}, \dots \frac{\partial \psi_1}{\partial q''_k} = a_{1k}; \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial q'_s} = b_{1s}$$

$$5)\ \frac{\partial \psi_2}{\partial q''_1} = a_{21}, \dots \frac{\partial \psi_2}{\partial q''_k} = a_{2k};\ \frac{\partial \psi_2}{\partial q'_s} = b_{2s}$$

. . . .

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial q''_1} = a_{k1}, \dots \frac{\partial \psi_k}{\partial q''_k} = a_{kk};\ \frac{\partial \psi_k}{\partial q'_s} = b_{ks},$$

so kommt das System von Gleichungen

$$a_{11} \frac{\partial q''_1}{\partial q'_s} + \dots + a_{1s} \frac{\partial q''_s}{\partial q'_s} + \dots a_{1k} \frac{\partial q''_k}{\partial q'_s} + b_{1s} = 0$$

$$6)\ a_{21} \frac{\partial q''_1}{\partial q'_s} + \dots + a_{2s} \frac{\partial q''_s}{\partial q'_s} + \dots a_{2k} \frac{\partial q''_k}{\partial q'_s} + b_{2s} = 0$$

. . . .

$$a_{k1} \frac{\partial q''_1}{\partial q'_s} + \dots a_{ks} \frac{\partial q''_s}{\partial q'_s} + \dots a_{kk} \frac{\partial q''_k}{\partial q'_s} + b_{ks} = 0.$$

Beachten wir nun, dass die Functionaldeterminante, gebildet aus den Grössen $a_{11} \dots a_{kk}$ nicht identisch verschwinden kann, ebenso wenig jede der Grössen $b_{1s} \dots b_{ks}$, weil sonst die Gleichungen (4) nicht von einander unabhängig sein könnten, so zeigt sich die Auflösbarkeit des letzten Gleichungssystems nach $\frac{\partial q''_s}{\partial q'_s}$.

Die Auflösung selbst ergibt, wenn die Functionaldeterminante

$$\frac{\partial(\psi_1, \psi_2 \dots \psi_k)}{\partial(q''_1, q''_2 \dots q''_k)} = R$$

gesetzt wird

$$R \frac{\partial q''_s}{\partial q'_s} + \frac{\partial R}{\partial a_{1s}} b_{1s} + \frac{\partial R}{\partial a_{2s}} b_{2s} + \dots \frac{\partial R}{\partial a_{ks}} b_{ks} = 0$$

oder

$$R \frac{\partial q''_s}{\partial q'_s} + \sum_r \frac{\partial R}{\partial a_{rs}} b_{rs} = 0;\ r = (1, 2, \dots k)$$

$$\frac{\partial q''_s}{\partial q'_s} = -\frac{1}{R} \Sigma \frac{\partial R}{\partial a_{rs}} b_{rs} = 0;\ r = (1, 2, \dots k).$$

Durch Einführung dieses Wertes verwandelt sich die Gleichung (3) für den Multiplicator in

$$7)\ \frac{d \log M}{dt} = \frac{1}{R} \sum_r \sum_s \frac{\partial R}{\partial a_{rs}} b_{rs}$$

$$r = (1, 2, \dots k);\ s = (1, 2, \dots k).$$

Diese Gleichung lässt sich weiter umformen, wenn wir auf die besonderen Eigenschaften der Grössen a_{rs} und b_{rs} Rücksicht nehmen. Es ist nämlich zunächst, wenn wir in

$$\psi_r = \frac{d}{dt} p_r - \frac{\partial(T+V)}{\partial q_r}$$

die vollständige Derivirte ausführen

$$\psi_r = \sum_i \frac{\partial p_r}{\partial q'_i} q''_i + \sum_i \frac{\partial p_r}{\partial q_i} q'_i + \frac{\partial p_r}{\partial t} - \frac{\partial(T+V)}{\partial q_r},$$

$$i = (1, 2, \ldots k);$$

mithin, wenn wir nach q''_s differentiiren

$$\frac{\partial \psi_r}{\partial q''_s} = \frac{\partial p_r}{\partial q'_s}$$

oder infolge der Gleichungen (5)

$$8)\quad a_{rs} = \frac{\partial \psi_r}{\partial q''_s} = \frac{\partial p_r}{\partial q'_s} = \frac{\partial^2(T+V)}{\partial q'_s \partial q'_r};$$

durch Vertauschung der Indices r und s erhalten wir weiter

$$8+)\quad a_{sr} = \frac{\partial \psi_s}{\partial q''_r} = \frac{\partial p_s}{\partial q'_r} = \frac{\partial^2(T+V)}{\partial q'_r \partial q'_s},$$

also

$$9)\quad a_{rs} = a_{sr}.$$

Ferner wird durch Differentiation nach q'_s

$$b_{rs} = \frac{\partial \psi_r}{\partial q'_s} = \sum_i \frac{\partial^2 p_r}{\partial q'_i \partial q'_s} q''_i + \sum_i \frac{\partial^2 p_r}{\partial q_i \partial q'_s} q'_i + \frac{\partial^2 p_r}{\partial t \partial q'_s} + \frac{\partial p_r}{\partial q_s} - \frac{\partial^2(T+V)}{\partial q_r \partial q'_s}$$

oder

$$10)\quad b_{rs} = \frac{\partial \psi_r}{\partial q'_s} = \frac{d}{dt}\frac{\partial p_r}{\partial q'_s} + \frac{\partial p_r}{\partial q_s} - \frac{\partial p_s}{\partial q_r}$$

und durch Vertauschung der Indices r und s

$$b_{sr} = \frac{\partial \psi_s}{\partial q'_r} = \frac{d}{dt}\frac{\partial p_s}{\partial q'_r} + \frac{\partial p_s}{\partial q_r} - \frac{\partial p_r}{\partial q_s}.$$

Durch Addition der beiden letzten Gleichungen ergibt sich

$$b_{rs} + b_{sr} = \frac{d}{dt}\frac{\partial p_r}{\partial q'_s} + \frac{d}{dt}\frac{\partial p_s}{\partial q'_r} = \frac{d}{dt} a_{rs} + \frac{d}{dt} a_{sr},$$

oder

$$10^+)\quad \frac{b_{rs} + b_{sr}}{2} = \frac{d}{dt} a_{rs} = \frac{d}{dt} a_{sr}.$$

Wegen Gleichung (9) ist nun

$$11)\quad \frac{\partial R}{\partial a_{rs}} = \frac{\partial R}{\partial a_{sr}}$$

und, wenn wir die Form der Determinante R, welche dadurch entsteht, dass wir gemäss der Gleichung (9) sämmtliche Elemente a_{sr}, für welche $r<s$ ist, ersetzen durch die ihnen gleichen Elemente a_{rs}, mit (R) bezeichnen, so wird bei Benutzung der Gleichung (11)

$$\frac{\partial(R)}{\partial a_{rs}} = \frac{\partial R}{\partial a_{rs}} + \frac{\partial R}{\partial a_{sr}} = 2\,\frac{\partial R}{\partial a_{rs}},\ r<s$$

$$\frac{\partial(R)}{\partial a_{ss}} = \frac{\partial R}{\partial a_{ss}}$$

Hiernach lässt sich die Doppelsumme in Gleichung (7) folgendermaassen umformen:

$$\begin{aligned}\sum_r\sum_s \frac{\partial R}{\partial a_{rs}} b_{rs} &= \sum_{ss} \frac{\partial R}{\partial a_{ss}} + \sum_{rs}\left(\frac{\partial R}{\partial a_{rs}} b_{rs} + \frac{\partial R}{\partial a_{sr}} b_{sr}\right),\ r<s \\ &= \sum_{ss} \frac{\partial R}{\partial a_{ss}} + \sum_{rs} \frac{\partial R}{\partial a_{rs}}\left(b_{rs} + b_{sr}\right) \\ &= \sum_{ss} \frac{\partial R}{\partial a_{ss}} + \sum_{rs} \frac{\partial(R)}{\partial a_{rs}} \frac{b_{rs} + b_{sr}}{2} \\ &= \sum_{rs} \frac{\partial(R)}{\partial a_{rs}} \frac{b_{rs} + b_{sr}}{2},\ r \leqq s.\end{aligned}$$

Dadurch geht die Gleichung (7) über in

$$\frac{d \log M}{dt} = \frac{1}{R} \sum_{rs} \frac{\partial(R)}{\partial a_{rs}} \frac{b_{rs} + b_{sr}}{2},\ r \leqq s$$

oder wegen (10^+)

$$\frac{d \log M}{dt} = \frac{1}{R} \sum_{rs} \frac{\partial(R)}{\partial a_{rs}} \frac{d}{dt} a_{rs}$$

$$12)\quad \frac{d \log M}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} = \frac{d}{dt} \log R.$$

Es ist also, wenn wir von einem constanten Factor absehen

$$M = R = \frac{\partial(\psi_1 \ldots \psi_k)}{\partial(q''_1 \ldots q''_k)}.$$

Beachten wir schliesslich noch die Gleichung (8), so erhalten wir als Multiplicator der Differentialgleichungen (2) in der II. Lagrangeschen Form den Wert

$$M = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2(T+V)}{\partial q'_1 \partial q'_1} & \frac{\partial^2(T+V)}{\partial q'_2 \partial q'_1} & \cdots & \frac{\partial^2(T+V)}{\partial q'_k \partial q'_1} \\ \frac{\partial^2(T+V)}{\partial q'_1 \partial q'_2} & \frac{\partial^2(T+V)}{\partial q'_2 \partial q'_2} & \cdots & \frac{\partial^2(T+V)}{\partial q'_k \partial q'_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2(T+V)}{\partial q'_1 \partial q'_k} & \frac{\partial^2(T+V)}{\partial q'_2 \partial q'_k} & \cdots & \frac{\partial^2(T+V)}{\partial q'_k \partial q'_k} \end{vmatrix}$$

$$13)\quad M = \left|{}^r \frac{\partial^2(T+V)}{\partial q'_r \, \partial q'_s} {}^s\right|.$$

Ist V eine ganze rationale Function zweiten Grades der ersten Derivirten $q'_1 \ldots q'_k$, so enthält $\frac{\partial^2(T+V)}{\partial q'_r \, \partial q'_s}$, da T stets eine ganze Function zweiten Grades von $q'_1 \ldots q'_k$ ist, die ersten Derivirten gar nicht mehr, mithin hat der Multiplicator dann einen nur von der Zeit t und den Coordinaten $q_1 \ldots q_k$ abhängigen Wert.

Ist V nur eine lineare Function der ersten Derivirten $q'_1 \ldots q'_k$ oder von denselben ganz unabhängig, wie bei der Anziehung nach dem Newton'schen Gesetze, so reduzirt sich, da in beiden Fällen

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q'_r \, \partial q'_s} = 0 \qquad \text{ist,}$$

der Multiplicator auf den von Jacobi aufgestellten Wert

$$M = \left|{}^r \frac{\partial^2(T)}{\partial q'_r \, \partial q'_s} {}^s\right|.$$

§. 2.

Der Multiplicator der Bewegungsgleichungen eines vollkommen freien Systems.

Bezeichnen wir die Masse eines der n Punkte eines vollkommen freien Systems mit m_i, seine rechtwinkeligen Coordinaten mit x_i, y_i, z_i und die darauf längst der Axen wirkenden Kräftecomponenten mit X_i, Y_i, Z_i, so lauten die Bewegungsgleichungen

$$1)\quad m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i;\; m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i;\; m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i.$$

$$i = (1, 2, 3 \ldots n).$$

Nun ist gemäss der Definition von V

$$\sum_i (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = \delta V - \frac{d}{dt} \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial x'_i} \delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y'_i} \delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z'_i} \delta z_i \right).$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i} \delta z_i \right)$$

$$+ \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial x'_i} \delta x'_i + \frac{\partial V}{\partial y'_i} \delta y'_i + \frac{\partial V}{\partial z_i} \delta z'_i \right)$$

$$- \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial x'_i} \frac{d}{dt} \delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y'_i} \frac{d}{dt} \delta y_i + \frac{\partial V}{\partial z'_i} \frac{d}{dt} \delta z_i \right)$$

$$- \sum_i \left(\left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial x'_i} \right\} \delta x_i + \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial y'_i} \right\} \delta y_i + \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial z'_i} \right\} \delta z_i \right)$$

oder, da

$$\delta x'_i = \frac{d}{dt} (\delta x_i) \qquad \text{ist,}$$

$$\sum_i (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial x'_i} \right) \delta x_i$$

$$+ \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial y'_i} \right) \delta y_i$$

$$+ \sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial z'_i} \right) \delta z_i.$$

Lassen wir hier, der Reihe nach ausgenommen δx_i, δy_i, δz_i, alle Variationen verschwinden, so kommt

$$X_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial x'_i}; \quad Y_i = \frac{\partial V}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial y'_i}; \quad Z_i = \frac{\partial V}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial z'_i},$$

und die Bewegungsgleichungen (1) gehen durch Einsetzung dieser Werte über in

$$2) \quad m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial x'_i}; \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial y'_i};$$

$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial z'_i}$$

$$i = (1, 2, \ldots n)$$

oder, wenn wir der Uebersicht halber

$$\sqrt{m_i}\, x_i = \xi_{3i-2}; \quad \sqrt{m_i}\, y_i = \xi_{3i-1}; \quad \sqrt{m_i}\, z_i = \xi_{3i}$$

setzen

$$3) \quad \frac{d^2 \xi_k}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial \xi_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \xi'_k}$$

$$k = (1, 2, 3 \ldots 3n).$$

Diese Gleichungen lassen sich zunächst folgendermaassen umformen:

$$\frac{d\xi'_k}{dt} = \frac{\partial V}{\partial \xi_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \xi'_k}$$

$$4)\quad \frac{d}{dt}\left\{\xi'_k + \frac{\partial V}{\partial \xi'_k}\right\} - \frac{\partial V}{\partial \xi_k} = o\,;\, k = (1,2\,..\,3n)$$

und weiter durch Einführung der lebendigen Kraft leicht auf die II. Lagrangesche Form bringen. Es ist nämlich

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i\,(x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i) = \frac{1}{2}\sum_k \xi_k'^2,$$

also

$$\frac{\partial T}{\partial \xi'_k} = \xi'_k \text{ und } \frac{\partial T}{\partial \xi_k} = o.$$

Bei Berücksichtigung dieser Werte gehen die Gleichungen (4) über in

$$5)\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial(T+V)}{\partial \xi'_k} - \frac{\partial(T+V)}{\partial \xi_k} = o\,;\, k = (1, 2, 3\,..\,3n).$$

Der Multiplicator dieser Differentialgleichungen, oder, was dasselbe sagt, der Gleichungen (3) hat nach dem vorigen Paragraphen den Wert

$$M = \left|\frac{\partial^2(T+V)}{\partial \xi'_r \partial \xi'_s}\right| \begin{matrix} r = (1, 2, 3\,..\,3n) \\ s = (1, 2, 3\,..\,3n) \end{matrix}$$

Da ferner

$$\frac{\partial^2(T)}{\partial \xi'_r \partial \xi'_s} = o \text{ ist für } r \gtrless s$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi'_r \partial \xi'_s} = 1 \text{ ist für } r = s,$$

so lässt sich die Determinante auch schreiben

$$M = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi'_1 \partial \xi'_1}, & \frac{\partial^2 V}{\partial \xi'_2 \partial \xi'_1}, & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial \xi'_{3n} \partial \xi'_1} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \xi'_1 \partial \xi'_2}, & 1 + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi'_2 \partial \xi'_2}, & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial \xi'_{3n} \partial \xi'_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \xi'_1 \partial \xi'_{3n}}, & \frac{\partial^2 V}{\partial \xi'_2 \partial \xi'_{3n}}, & \cdots & 1 + \frac{\partial^2 V}{\partial \xi'_{3n} \partial \xi'_{3n}} \end{vmatrix}$$

Es wird also der Multiplicator für die Differentialgleichungen eines vollkommen freien Systems in rechtwinkeligen Coordinaten

nur von den zweiten Differentialquotienten der Kräftefunction nach den Grössen $\xi'_1 \ldots \xi'_{3n}$ bestimmt; ist daher die letztere eine lineare Function dieser Grössen oder von ihnen ganz unabhängig, so erhält der Multiplicator den von Jacobi angegebenen Wert

$$M = \text{const.} = 1.$$

§. 3.

Der Multiplicator der Differentialgleichungen in der I. Lagrangeschen Form.

Ist die Bewegung des Systems von n Massenpunkten gewissen Bedingungen unterworfen, welche durch die folgenden m Gleichungen

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \ldots \varphi_m = 0$$

dargestellt sein mögen, und verstehen wir unter $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m$ m unbestimmte Factoren, so lauten die Differentialgleichungen der Bewegung in der I. Lagrangeschen Form

$$\begin{aligned} m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial x'_i} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} + \ldots \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} \\ 1) \quad m_i \frac{d^2y_i}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial y_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial y'_i} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_i} + \ldots \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial y_i} \\ m_i \frac{d^2z_i}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial z_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial z'_i} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_i} + \ldots \lambda^m \frac{\partial \varphi_m}{\partial z_i}, \end{aligned}$$

$$i = (1, 2, \ldots n).$$

Setzen wir hier wiederum

$$\sqrt{m_i}\, x_i = \xi_{3i-2}; \quad \sqrt{m_i}\, y_i = \xi_{3i-1}; \quad \sqrt{m_i}\, z_i = \xi_{3i},$$

so gehen die Gleichungen über in

$$2) \quad \frac{d^2\xi_r}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial \xi_r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \xi'_r} + \sum_g \lambda_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial \xi_r}$$

$$r = (1, 2 \ldots 3n),$$

und wenn wir analog dem Verfahren des vorigen Paragraphen die lebendige Kraft $T = \frac{1}{2} \sum_k \xi_k'^2$ einführen, erhalten wir als Bewegungsgleichungen

$$3) \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T(+V)}{\partial \xi'_r} - \frac{\partial (T+V)}{\partial \xi_r} - \sum_g \lambda_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial \xi_r} = 0.$$

$$r = (1, 2 \ldots 3n).$$

Infolge der Einführung der m unbestimmten Factoren $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_m$, welche als vorläufig noch unbestimmte Funktionen von $t, \xi_1 \ldots \xi_{3n}, \xi'_1 \ldots \xi'_{3n}$ anzusehen sind, ist dies ein System von $3n = k$ von einander unabhängiger Gleichungen, welche sich von den Gleichungen (2) des Paragraphen (1) nur durch Hinzutritt des Ausdrucks

$$\sum_g \lambda_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial \xi_r}$$

unterscheiden.

Der Multiplicator derselben wird bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{d \log M}{dt} + \frac{\partial \xi''_1}{\partial \xi'_1} + \frac{\partial \xi''_2}{\partial \xi'_2} + \ldots \frac{\partial \xi''_k}{\partial \xi'_k} = 0$$

$$4) \quad \frac{d \log M}{dt} + \sum_s \frac{\partial \xi''_s}{\partial \xi'_s} = 0.$$

$$s = (1, 2 \ldots k).$$

Setzen wir nun, um aus den Gleichungen (3) den Wert von $\frac{\partial \xi''_s}{\partial \xi'_s}$ zu bestimmen, entsprechend dem Verfahren im Paragraphen (1) allgemein

$$5) \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial(T+V)}{\partial \xi'_r} - \frac{\partial(T+V)}{\partial \xi_r} = \psi^+_r; \; \sum_g \lambda_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial \xi_r} = \psi^{++}_r,$$

$$\psi_r = \psi^+_r - \psi^{++}_r = \frac{d}{dt}\frac{\partial(T+V)}{\partial \xi'_r} - \frac{\partial(T+V)}{\partial \xi_r} - \sum_g \lambda_g \frac{\partial \varphi_g}{\partial \xi_r} = 0$$

und

$$6) \quad \frac{\partial \psi_r}{\partial \xi''_s} = a_{rs}; \; \frac{\partial \psi^+_r}{\partial \xi'_s} = b^+_{rs}, \; \frac{\partial \psi^{++}_r}{\partial \xi'_s} = b^{++}_{rs},$$

sodass also, da

$$\frac{\partial \psi^{++}_r}{\partial \xi''_s} = 0 \qquad \text{ist,}$$

$$\frac{\partial \psi_r}{\partial \xi''_s} = \frac{\partial \psi^+_r}{\partial \xi''_s} = a_{rs}$$

$$\frac{\partial \psi_r}{\partial \xi'_s} = \frac{\partial \psi^+_r}{\partial \xi'_s} - \frac{\partial \psi^{++}_r}{\partial \xi'_s} = b^+_{rs} - b^{++}_{rs}$$

wird, und differentiiren die Gleichungen $\psi_r = 0$, $r = (1, 2 \ldots 3n = k)$ nach ξ'_s, indem wir $\xi''_1, \xi''_2 \ldots \xi''_k$ als Functionen von ξ'_s betrachten, so kommt das System von $3n = k$ Gleichungen

$$
7)\quad
\begin{array}{l}
a_{11}\frac{\partial \xi''_1}{\partial \xi'_s}+a_{12}\frac{\partial \xi''_2}{\partial \xi'_s}+\ldots+a_{1s}\frac{\partial \xi''_s}{\partial \xi'_s}+\ldots a_{1k}\frac{\partial \xi''_k}{\partial \xi'_s}+b^{+}_{1s}-b^{++}_{1s}=0\\
a_{21}\frac{\partial \xi''_1}{\partial \xi'_s}+a_{22}\frac{\partial \xi''_2}{\partial \xi'_s}+\ldots+a_{2s}\frac{\partial \xi''_s}{\partial \xi'_s}+\ldots a_{2k}\frac{\partial \xi''_k}{\partial \xi'_s}+b^{+}_{2s}-b^{++}_{2s}=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{k1}\frac{\partial \xi''_1}{\partial \xi'_s}+a_{k2}\frac{\partial \xi''_2}{\partial \xi'_s}+\ldots+a_{ks}\frac{\partial \xi''_s}{\partial \xi'_s}+\ldots a_{kk}\frac{\partial \xi''_k}{\partial \xi'_s}+b^{+}_{ks}-b^{++}_{ks}=0
\end{array}
$$

und durch Auflösung derselben nach $\frac{\partial \xi''_s}{\partial \xi'_s}$ entsteht unter Benutzung der Bezeichnung

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k}\\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk}
\end{vmatrix}
=\frac{\partial(\psi_1,\psi_2\,\ldots\,\psi_k)}{\partial(\xi''_1\,\xi''_2\,\ldots\,\xi''_k)}=R
$$

entsteht

$$
R\frac{\partial \xi''_s}{\partial \xi'_s}+\frac{\partial R}{\partial a_{1s}}(b^{+}_{1s}-b^{++}_{1s})+\ldots\frac{\partial R}{\partial a_{ks}}(b^{+}_{ks}-b^{++}_{ks})=0
$$

$$
R\frac{\partial \xi''}{\partial \xi'_s}+\sum_r\frac{\partial R}{\partial a_{rs}}(b^{+}_{rs}-b^{++}_{rs})=0.
$$

$$
r=(1,2,\ldots k).
$$

Durch Einsetzung des so erhaltenen Wertes von $\frac{\partial \xi''_s}{\partial \xi'_s}$ verwandelt sich die Gleichung (4) für den Multiplicator in

$$
8)\quad \frac{d\log M}{dt}=\frac{1}{R}\sum_r\sum_s\frac{\partial R}{\partial a_{rs}}(b^{+}_{rs}-b^{++}_{rs})
$$

$$
=\frac{1}{R}\sum_r\sum_s\frac{\partial R}{\partial a_{rs}}b^{+}_{rs}-\frac{1}{R}\sum_r\sum_s\frac{\partial R}{\partial a_{rs}}b^{++}_{rs}.
$$

Beachten wir nun, dass

$$
b^{+}_{rs}=\frac{\partial \psi^{+}_r}{\partial \xi_s},\quad a_{rs}=\frac{\partial \psi_r}{\partial \xi''_s}=\frac{\partial \psi^{+}_r}{\partial \xi''_s}
$$

$$
\psi^{+}_r=\frac{d}{dt}\frac{\partial(T+V)}{\partial \xi_r}-\frac{\partial(T+V)}{\partial \xi_r}
$$

gesetzt worden war, so zeigt sich, dass die erste Doppelsumme

$$
\frac{1}{R}\sum_r\sum_s\frac{\partial R}{\partial a_{rs}}b^{+}_{rs}
$$

genau mit der Doppelsumme in Gleichung (7) des Paragraphen (1) übereinstimmt, wenn an die Stelle der Grössen ξ die Grössen q gesetzt werden. Es lassen sich mit derselben daher auch dieselben Umwandlungen vornehmen; mithin ist nach Gleichung (7) und (12) des Paragraphen (1)

$$\frac{1}{R}\sum_r\sum_s \frac{\partial R}{\partial a_{rs}} b^+_{rs} = \frac{d \log R}{dt}.$$

Dadurch geht die Gleichung (8) für den Multiplicator über in

$$\frac{d \log M}{dt} = \frac{d \log R}{dt} - \frac{1}{R}\sum_r\sum_s \frac{\partial R}{\partial a_{rs}} b^{++}_{rs}$$

oder, da

$$b^{++}_{rs} = \frac{\partial \psi^{++}_r}{\partial \xi'_s} = \sum_g \frac{\partial \lambda_g}{\partial \xi'_s} \frac{\partial \varphi_g}{\partial \xi_r}$$

ist,

$$9)\quad \frac{d \log M}{dt} = \frac{d \log R}{dt} - \sum_r\sum_s\sum_g \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial a_{rs}} \frac{\partial \lambda_g}{\partial \xi'_s} \frac{\partial \varphi_g}{\partial \xi_r}.$$

Hier kommt es nunmehr noch darauf an die dreifache Summe nach r, s, g, wo r und s die Werte $1, 2, \ldots 3n = k$, dagegen g die Werte $1, 2 \ldots m$ zu durchlaufen haben, ebenfalls in eine vollständige Derivirte nach t zu verwandeln.

Zu dem Zweck müssen wir zunächst den Wert von $\frac{\partial \lambda_g}{\partial \xi'_s}$ aufsuchen, welchen wir, ohne erst λ_g selbst zu berechnen, auf folgende Weise erhalten können.

Wir differentiiren die Bedingungsgleichungen zweimal nach t und dann nach ξ'_s, indem wir $\xi''_1 \ldots\ldots \xi''_k$ als Functionen von ξ'_s ansehen. So erhalten wir ein System von m Gleichungen. Aus diesen eliminiren wir $\frac{\partial \xi''_1}{\partial \xi'_s} \ldots \frac{\partial \xi''_k}{\partial \xi'_s}$ dadurch, dass wir deren Werte aus dem Gleichungssystem (7) berechnen und einsetzen; dann treten in obige m Gleichungen die m Grössen $\frac{\partial \lambda_1}{\partial \xi'_s} \ldots \frac{\partial \lambda_m}{\partial \xi'_s}$, welche in $b^{++}_{1s} \ldots b^{++}_{ks}$ enthalten sind, linear ein und lassen sich aus ihnen durch Auflösung finden.

Demgemäss differentiiren wir zunächst

$$\varphi_h = 0$$

zweimal nach t und erhalten

$$\frac{d\varphi_h}{dt} = \sum_v \frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_v} \xi'_v + \frac{\partial\varphi_h}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2\varphi_h}{dt^2} = \sum_v \frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_v} \xi''_v + u_h = 0,$$

wo

$$u_h = \sum_u \sum_v \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial\xi_u \partial\xi_v} \xi'_u \xi'_v + \sum_v \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial t\, \partial\xi_v} \xi'_v + \sum_u \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial\xi_u\, \partial t} \xi'_u + \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial t^2}$$

oder, da die Summation nach u und v sich beidemal über die Werte 1, 2, .. k erstreckt

$$u_h = \sum_u \sum_v \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial\xi_u \partial\xi_v} \xi'_u \xi'_v + 2 \sum_v \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial t\, \partial\xi_v} \xi'_v + \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial t^2}$$

gesetzt worden ist. Sodann differentiiren wir nach ξ'_s. Das gibt:

$$\sum_v \frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_v} \frac{\partial\xi''_v}{\partial\xi'_s} + \frac{\partial u_h}{\partial\xi'_s} = 0$$

oder, da

$$\frac{\partial u_h}{\partial\xi'_s} = \sum_u \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial\xi_u \partial\xi_s} \xi'_u + \sum_v \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial\xi_s \partial\xi_v} \xi'_v + 2 \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial t\, \partial\xi_s}$$

$$= 2 \sum_v \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial\xi_v\, \partial\xi_s} \xi'_v + 2 \frac{\partial^2\varphi_h}{\partial t\, \partial\xi_s}$$

$$= 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_s} \right)$$

ist,

$$10)\quad \sum_v \frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_v} \frac{\partial\xi''_v}{\partial\xi'_s} + 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_s} = 0.$$

Ferner entsteht durch Auflösung der Gleichungen (7) nach $\frac{\partial\xi''_v}{\partial\xi'_s}$

$$R \frac{\partial\xi''_v}{\partial\xi'_s} + \sum_u \frac{\partial R}{\partial a_{uv}} (b^+_{us} - b^{++}_{us}) = 0$$

und durch Einsetzung des hieraus entspringenden Wertes von $\frac{\partial\xi''_v}{\partial\xi'_s}$ wird die vorhergehende Gleichung

$$11)\quad - \sum_u \sum_v \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial a_{uv}} \frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_v} (b^+_{us} - b^{++}_{us}) + 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_s} = 0.$$

Nun ist nach den Gleichungen (6)

$$b^+_{us} - b^{++}_{us} = \frac{\partial\psi^+_u}{\partial\xi'_s} - \frac{\partial\psi^{++}_u}{\partial\xi'_s}$$

und gemäss der Gleichung (10) des Paragraphen (1)

$$b^{+}_{us} = \frac{\partial \psi^{+}_{u}}{\partial \xi'_{s}} = \frac{d}{dt} a_{us} + \frac{\partial^2(T+V)}{\partial \xi_s \partial \xi'_u} - \frac{\partial^2(T+V)}{\partial \xi_u \partial \xi'_s},$$

also wenn wir noch die Gleichungen (5) beachten

$$b^{+}_{us} - b^{++}_{us} = \frac{d}{dt} a_{us} + \frac{\partial^2(T+V)}{\partial \xi_s \partial \xi'_u} - \frac{\partial^2(T+V)}{\partial \xi_u \partial \xi'_s} - \sum_g \frac{\partial \lambda_g}{\partial \xi'_s} \frac{\partial \varphi_g}{\partial \xi_u}.$$

Hierdurch geht die Gleichung (11) über in

$$-\sum_u \sum_v \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial a_{uv}} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_v} \left\{ \frac{d}{dt} a_{us} + \frac{\partial^2(T+V)}{\partial \xi_s \partial \xi'_u} - \frac{\partial^2(T+V)}{\partial \xi_u \partial \xi'_s} - \sum_g \frac{\partial \lambda_g}{\partial \xi'_s} \frac{\partial \varphi_g}{\partial \xi_u} \right\} + 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_s} = 0$$

oder

$$\left.\begin{aligned} &\sum_g \sum_u \sum_v \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial a_{uv}} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_v} \frac{\partial \varphi_g}{\partial \xi_u} \frac{\partial \lambda_g}{\partial \xi'_s} \\ &-\sum_u \sum_v \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial a_{uv}} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_v} \left\{ \frac{d}{dt} a_{us} + \frac{\partial^2(T+V)}{\partial \xi_s \partial \xi'_u} - \frac{\partial^2(T+V)}{\partial \xi'_u \partial \xi'_s} \right\} \\ &+ 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_s} \end{aligned}\right\} = 0$$

oder endlich, wenn zur Abkürzung

$$12) \quad \sum_u \sum_v \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial a_{uv}} \frac{\partial \varphi_g}{\partial \xi_u} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_v} = \alpha_{gh}$$

$$13) \quad \sum_u \sum_v \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial a_{uv}} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_v} \left\{ \frac{d}{dt} a_{us} + \frac{\partial^2(T+V)}{\partial \xi_s \partial \xi'_u} - \frac{\partial^2(T+V)}{\partial \xi_u \partial \xi'_s} \right\} = \beta_{hs}$$

setzen,

$$\sum_g \alpha_{gh} \frac{\partial \lambda_g}{\partial \xi'_s} - \beta_{hs} + 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_s} = 0.$$

Geben wir hier dem Index h der Reihe nach die Werte 1, 2, .. m, so erhalten wir das folgende System von m Gleichungen:

$$\alpha_{11} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \xi'_s} + \alpha_{21} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \xi'_s} + \ldots \alpha_{g1} \frac{\partial \lambda_g}{\partial \xi'_s} + \ldots \alpha_{m1} \frac{\partial \lambda_m}{\partial \xi'_s} - \beta_{1s} + 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_s} = 0$$

$$\alpha_{12} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \xi'_s} + \alpha_{22} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \xi'_s} + \ldots \alpha_{g2} \frac{\partial \lambda_g}{\partial \xi'_s} + \ldots \alpha_{m2} \frac{\partial \lambda_m}{\partial \xi'_s} - \beta_{2s} + 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi_s} = 0$$

. . . .

. . . .

$$\alpha_{1m} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \xi'_s} + \alpha_{2m} \frac{\partial \lambda_g}{\partial \xi'_s} + \ldots \alpha_{gm} \frac{\partial \lambda_g}{\partial \xi'_s} + \ldots \alpha_{mm} \frac{\partial \lambda_m}{\partial \xi'_s} - \beta_{ms} + 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_m}{\partial \xi_s} = 0.$$

Aus diesen Gleichungen lässt sich schliesslich der Wert von $\frac{\partial \lambda_g}{\partial \xi'_s}$ bestimmen. Setzen wir nämlich die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots\ldots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots\ldots & \alpha_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \ldots\ldots & \alpha_{mm} \end{vmatrix} = P,$$

so ergibt die Auflösung

$$P \frac{\partial \lambda_g}{\partial \xi'_s} - \sum_h \frac{\partial P}{\partial \alpha_{gh}} \left(\beta_{hs} - 2 \frac{d}{dt}\right) \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_s} = 0.$$

Den also erhaltenen Wert von $\frac{\partial \lambda_g}{\partial \xi'_s}$ haben wir nun weiter in die Gleichung (9) einzusetzen. Dadurch geht der Ausdruck

$$14)\quad -\frac{1}{R} \sum_r \sum_s \sum_g \frac{\partial R}{\partial a_{rs}} \frac{\partial \lambda_g}{\partial \xi'_s} \frac{\partial \varphi_g}{\partial \xi_r}$$

über in

$$-\frac{1}{R} \sum_r \sum_s \sum_g \frac{\partial R}{\partial a_{rs}} \frac{\partial \varphi_g}{\partial \xi_r} \sum_h \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial \alpha_{gh}} \left\{ \beta_{hs} - 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_s} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{P} \sum_g \sum_h \frac{\partial P}{\partial \alpha_{gh}} \sum_r \sum_s \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial a_{rs}} \frac{\partial \varphi_g}{\partial \xi_r} \beta_{hs} \\ +\frac{2}{P} \sum_g \sum_h \frac{\partial P}{\partial \alpha_{gh}} \sum_r \sum_s \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial a_{rs}} \frac{\partial \varphi_g}{\partial \xi_r} \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_s}. \end{array} \right.$$

Betrachten wir hier zunächst den zweiten Ausdruck. Da nach dem früheren

$$a_{rs} = a_{sr}$$

ist und nach der Bezeichnung (12) auch

$$\alpha_{gh} = \alpha_{hg}$$

ist, so ist auch

$$\frac{\partial R}{\partial a_{rs}} = \frac{\partial R}{\partial a_{sr}} \text{ und } \frac{\partial P}{\partial \alpha_{gh}} = \frac{\partial P}{\partial \alpha_{hg}}.$$

Es lässt sich daher der zweite Ausdruck in den folgenden umwandeln:

$$\frac{1}{P} \sum_g \sum_h \frac{\partial P}{\partial \alpha_{gh}} \sum_r \sum_s \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial a_{rs}} \left(\frac{\partial \varphi_g}{\partial \xi_r} \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_s} + \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_s} \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_g}{\partial \xi_r} \right)$$

oder

$$15)\quad \frac{1}{P} \sum_g \sum_h \frac{\partial P}{\partial \alpha_{gh}} \sum_r \sum_s \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial a_{rs}} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \varphi_g}{\partial \xi_r} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_s} \right\}.$$

Setzen wir ferner in den ersten Ausdruck für β_{hs} seinen Wert aus Gleichung (13) ein, so kommt

$$-\frac{1}{P}\sum_g\sum_h\frac{\partial P}{\partial\alpha_{gh}}\sum_r\sum_s\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial a_{rs}}\frac{\partial\varphi_g}{\partial\xi_r}\sum_u\sum_v\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial a_{uv}}\frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_v}\Big\{\frac{d}{dt}a_{us}+\frac{\partial^2(T+V)}{\partial\xi_s\partial\xi'_u}-\frac{\partial_2(T+V)}{\partial\xi_u\partial\xi'_s}\Big\}$$

Da nun für s sowol als für u der Reihe nach die Werte 1, 2, ... k gesetzt werden müssen, so entspricht jedem Gliede

$$\frac{\partial^2(T+V)}{\partial\xi_s\partial\xi'_u}\text{ ein Glied }-\frac{\partial^2(T+V)}{\partial\xi_s\partial\xi'_u};$$

es reduzirt sich also der obige Ausdruck auf

$$-\frac{1}{P}\sum_g\sum_h\frac{\partial P}{\partial\alpha_{gh}}\sum_r\sum_s\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial a_{rs}}\frac{\partial\varphi_g}{\partial\xi_r}\sum_u\sum_v\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial a_{uv}}\frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_v}\frac{d}{dt}a_{us}$$

$$=\frac{1}{P}\sum_g\sum_h\frac{\partial P}{\partial\alpha_{gh}}\sum_r\sum_v-\frac{1}{R^2}\sum_u\sum_s\frac{\partial R}{\partial a_{rs}}\frac{\partial R}{\partial a_{uv}}\frac{d}{dt}a_{us}\frac{\partial\varphi_g}{\partial\xi_r}\frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_v}$$

oder, da nach einer Formel der Determinantentheorie [1])

$$-\frac{1}{R^2}\sum_u\sum_s\frac{\partial R}{\partial_{rs}}\frac{\partial R}{\partial_{uv}}\frac{d}{dt}a_{us}=\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial a_{rv}}\Big)$$

ist,

$$\frac{1}{P}\sum_g\sum_h\frac{\partial P}{\partial\alpha_{gh}}\sum_r\sum_v\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial a_{rv}}\Big)\frac{\partial\varphi_g}{\partial\xi_b}\frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_v}$$

oder, wenn wir statt des Summationsindex v den Index s einführen

$$16)\quad\frac{1}{P}\sum_g\sum_h\frac{\partial P}{\partial\alpha_{gh}}\sum_r\sum_s\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial a_{rs}}\Big)\frac{\partial\varphi_g}{\partial\xi_r}\frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_s}.$$

Durch Addition der beiden Umformungen (15) und (16) erhalten wir somit für den Gesammtausdruck (14) den Wert

$$\frac{1}{P}\sum_g\sum_h\frac{\partial P}{\partial\alpha_{gh}}\sum_r\sum_s\Big\{\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial a_{rs}}\Big)\frac{\partial\varphi_g}{\partial\xi_r}\frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_s}+\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial a_{rs}}\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_g}{\partial\xi_r}\frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_s}\Big\}$$

$$=\frac{1}{P}\sum_g\sum_h\frac{\partial P}{\partial\alpha_{gh}}\frac{d}{dt}\Big\{\sum_r\sum_s\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial a_{rs}}\frac{\partial\varphi_g}{\partial\xi_r}\frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_s}\Big\}$$

oder wegen Gleichung (12)

$$=\frac{1}{P}\sum_g\sum_h\frac{\partial P}{\partial\alpha_{gh}}\frac{d}{dt}\alpha_{gh}=\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}=\frac{d\log P}{dt}.$$

Hiernach ist nun also auch der noch übrig gebliebene Teil der Gleichung (9) als vollständige Derivirte nach t dargestellt und die Gleichung selbst nimmt die Form an

---

1) Theorie der Determinanten v. Baltzer S. 53.

$$\frac{d \log M}{dt} = \frac{d \log R}{dt} + \frac{d \log P}{dt}$$

$$\frac{d \log M}{dt} = \frac{d}{dt} \log (R \, . \, P).$$

Der Multiplicator hat demnach, wenn wir von einem constanten Factor absehen, den Wert

$$M = R \, . \, P.$$

Es war aber

$$R = \left| a_{rs} \right|_{r \quad s} = \left| \frac{\partial^2 (T+V)}{\partial \xi'_r \, \partial \xi'_s} \right|_{r \quad s}$$

$$P = \left| \alpha_{gh} \right|_{g \quad h} = \left| \sum_r \sum_s \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial a_{rs}} \frac{\partial \varphi_g}{\partial \xi_r} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_s} \right|_{g \quad h};$$

ferner lässt sich die Determinante P, da jedes Element derselben den Factor $\frac{1}{R}$ enthält, auch schreiben

$$P = \frac{1}{R^m} \left| \sum_r \sum_s \frac{\partial R}{\partial a_{rs}} \frac{\partial \varphi_g}{\partial \xi_r} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_s} \right|_{g \quad h};$$

mithin ist der Multiplicator

$$M = \frac{\left| \sum_r \sum_s \frac{\partial R}{\partial a_{rs}} \frac{\partial \varphi_g}{\partial \xi_r} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_s} \right|_{g \quad h}}{R^{m-1}}$$

oder, da nach einem bekannten Satze der Determinantentheorie

$$R^{m-1} = \left| \frac{\partial R}{\partial a_{rs}} \right|_{r \quad s}$$

ist,

$$M = \frac{\left| \sum_r \sum_s \frac{\partial R}{\partial a_{rs}} \frac{\partial \varphi_g}{\partial \xi_r} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_s} \right|_{g \quad h}}{\left| \frac{\partial R}{\partial a_{rs}} \right|_{r \quad s}}.$$

Ist V eine ganze Function zweiten Grades der ersten Derivirten $\xi'_1 \ldots \xi'_k$, so wird

$$a_{sr} = \frac{\partial^2 (T+V)}{\partial \xi'_r \, \partial \xi'_s}$$

nur von $\xi_1 \ldots \xi_k$ und t abhängig sein; es ist also der Multiplicator nur eine Function der Coordinaten $\xi_1 \ldots \xi_k$ und t. Sind $\xi'_1 \ldots \xi'_k$ nur linear oder gar nicht in V enthalten, so ist

$$\frac{\partial^2(T+V)}{\partial\xi'_r\,\partial\xi'_s} = 0 \text{ für } r \gtrless s$$

$$\frac{\partial^2(T+V)}{\partial\xi'_r\,\partial\xi'_s} = 1 \text{ für } r = s,$$

also

$$R = 1$$

$$\frac{\partial R}{\partial a_{rs}} = 0 \text{ für } r \gtrless s$$

$$\frac{\partial R}{\partial a_{rs}} = 1 \text{ für } r = s.$$

Es reduzirt sich daher für diesen Fall der Multiplicator auf den von Jacobi aufgestellten Wert

$$M = \left| \sum_s \frac{\partial\varphi_g}{\partial\xi_s}\,\frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_s} \right|_{g}^{h}.$$

§. 4.

Der Multiplicator der Differentialgleichungen in der Hamiltonschen Form.

Die Differentialgleichungen der Bewegung in der II. Lagrangeschen Form waren

$$1)\quad \frac{dp_r}{dt} - \frac{\partial(T+V)}{\partial q_r} = 0;\ r = (1, 2 \ldots k).$$

$$p_r = \frac{\partial(T+V)}{\partial q'_r}.$$

Bezeichnen wir mit D eine allgemeine Differentiation, welche sich auf alle Veränderlichen erstreckt, so ist

$$D\,(T+V) = \frac{\partial(T+V)}{dt}\,Dt + \sum_r \frac{\partial(T+V)}{dq'_r}\,Dq'_r + \sum_r \frac{\partial(T+V)}{\partial q_r}\,Dq_r$$

oder, wenn wir die Gleichungen (1) berücksichtigen

$$2)\quad D(T+V) = \frac{\partial(T+V)}{dt}\,Dt + \sum_r p_r\,Dq'_r + \sum_r p'_r\,Dq_r$$

$$D(T+V) = \frac{\partial(T+V)}{\partial t}\,Dt + \frac{d}{dt}\sum_r p_r\,Dq_r.$$

Nehmen wir hier die allgemeine Differentiation im Sinne einer vollständigen Derivation nach der Zeit t, so entsteht

$$\frac{d}{dt}(T+V) = \frac{\partial(T+V)}{\partial t} + \frac{d}{dt}\sum_r p_r q'_r$$

$$\frac{d}{dt}\left\{T + V - \sum_r p_r q'_r\right\} = \frac{\partial(T+V)}{\partial t}$$

oder, wenn wir

$$3)\quad \sum_r p_r q'_r - (T + V) = H$$

setzen,

$$4)\quad \frac{dH}{dt} = H' = -\frac{\partial(T+V)}{\partial t}.$$

Durch Einsetzung dieses Wertes geht die Gleichung (2) über iu

$$D(T+V) = -H'\,Dt + \sum_r p_r\,Dq'_r + \sum_r p'_r\,Dq_r.$$

Es ist aber identisch

$$D\sum_r p_r q'_r = \sum_r p_r\,Dq'_r + \sum_r q'_r\,Dp_r,$$

und durch Subtraction der vorhergehenden Gleichung von dieser ergibt sich

$$D\left\{\sum_r p_r q'_r - (T+V)\right\} = H'\,Dt + \sum_r q'_r\,Dp_r - \sum_r p'_r\,Dq_r$$

oder

$$DH = H'\,Dt + \sum_r q'_r\,Dp_r - \sum_r p'_r\,Dq_r.$$

Führen wir nun in H vermöge der k Gleichungen

$$p_r = \frac{\partial(T+V)}{\partial q'_r},\ r = (1, 2, \ldots k)$$

anstatt der Veränderlichen $q'_1, q'_2 \ldots q'_k$ die neuen Veränderlichen $p_1, p_2 \ldots p_k$ ein und nehmen die allgemeine D-Differentiation der Reihe nach im Sinne einer Differentiation nach den Veränderlichen $p_1 \ldots p_k$, $q_1 \ldots q_k$ und t, so erhalten wir die Differentialgleichungen der Bewegung in der Hamiltonschen Form

$$5)\quad \frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r};\ \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r};$$
$$r = (1, 2, \ldots k)$$

ferner die Gleichung

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

oder wegen Gleichung (4)

$$6)\quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial(T+V)}{\partial t},$$

wo H in den Veränderlichen $p_1 \ldots p_k$, $q_1 \ldots q_k$ und t, dagegen $T + V$ in den Veränderlichen $q'_1 \ldots q'_k$, $q_1 \ldots q_k$ und t ausgedrückt zu denken ist.

Die Hamiltonschen Differentialgleichungen (5) bilden das System von 2k simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung mit $2k + 1$ Veränderlichen

$$7) \quad \left.\begin{array}{l} dt : dq_1 : dp_1 \\ \quad : dq_2 : dp_2 \\ \quad \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ \quad \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ \quad : dq_k : dp_k \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 1 : \frac{\partial H}{\partial p_1} : - \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \; : \frac{\partial H}{\partial p_2} : - \frac{\partial H}{\partial q_2} \\ \quad \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ \quad \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ \; : \frac{\partial H}{\partial p_k} : - \frac{\partial H}{\partial q_k} \end{array}\right.$$

Es wird daher der Jacobische Multiplicator derselben bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{d \log M}{dt} + \sum_r \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial q_r \partial p_r} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_r \partial q_r} \right\} = 0$$

oder

$$\frac{d \log M}{dt} = 0;$$

er hat mithin den Wert

$$M = \text{const.} = 1.$$

Für die Anwendung des Princips des letzten Multiplicators auf die Differentialgleichungen in der Hamiltonschen Form ergibt sich aus der speziellen Form derselben noch Folgendes:

Wenn der Ausdruck $T + V$ die Zeit t nicht explicite enthält, so ist

$$\frac{\partial (T+V)}{\partial t} = 0,$$

folglich nach Gleichung (6)

$$\frac{dH}{dt} = 0.$$

Es ist daher

$$8) \quad H = \sum_r p_r q'_r - (T+V) = a,$$

wo a eine willkürliche Constante bedeutet, ein Integral der Dif-

ferentialgleichungen (7) oder (5). Dieses Integral drückt die Verallgemeinerung des Princips von der Erhaltung der lebendigen Kraft aus[1]; es hat Gültigkeit, wenn $q_1 \ldots q_k$ im Raume feste Coordinaten sind. Zugleich kommt dann in den obigen Gleichungen t selbst überhaupt nicht vor, sondern nur das Differential dt. Es lässt sich daher zunächst das von t freie System von $2k - 1$ Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} dq_1 : dp_1 \\ : dq_2 : dp_2 \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \\ : dq_k : dp_k \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial p_1} : - \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ : \frac{\partial H}{\partial p_2} : - \frac{\partial H}{\partial q_2} \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \frac{\partial H}{\partial p_k} : - \frac{\partial H}{\partial q_k} \end{array}\right.$$

integriren.

Sind von demselben ausser dem von vorn herein bekannten Integrale

$$H = \Sigma p_r q'_r - (T + V) = a$$

noch $2k - 3$ Integrale

$$f_4 = a_4, \; f_5 = a_5 \ldots f_{2k} = a_{2k}$$

mit den $2k - 3$ willkürlichen Integrationsconstanten $a_4 \ldots a_{2k}$ gefunden; werden ferner zwei Functionen der Veränderlichen $q_1 \ldots q_k, p_1 \ldots p_k$ mit u und v bezeichnet und

$$\frac{du}{dt} = u', \frac{dv}{dt} = v'$$

gesetzt, so wird die vorletzte t nicht enthaltende Integralgleichung durch die Quadratur bestimmt

$$\int \frac{v'du - u'dv}{\frac{\partial(u, v, H, f_4 \ldots f_{2k})}{\partial(q_1, q_2 \ldots q_k, p_1 \ldots p_k)}} = \text{const.},$$

wo unter dem Integralzeichen die Veränderlichen $q_1 \ldots q_k, p_1 \ldots p_k$ mit Hülfe der $2k - 2$ Integrale und der beiden u und v bestimmenden Gleichungen durch u und v und die $2k - 2$ Integrationsconstanten auszudrücken sind.

---

1) Hamilton-Jacobische Theorie u. s. w. S. 21.

Ist nach ausgeführter Quadratur v als Function von u und u' ebenfalls als Function von u dargestellt, so kann t durch die Quadratur

$$t - \int \frac{du}{u'} = \text{const.}$$

eingeführt werden.

Wenn ferner

$$H = \Sigma p_s q'_s - (T + V)$$

ausgedrückt in den Veränderlichen $p_1 \ldots p_k$, $q_1 \ldots q_k$ einzelne der q nicht enthält z. B. $q_1 \ldots q_m$, so wird

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} = \frac{\partial H}{\partial q_2} = \ldots \frac{\partial H}{\partial q_m} = 0$$

und zufolge der Hamiltonschen Gleichungen (7)

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{dp_2}{dt} = \ldots \frac{dp_m}{dt} = 0.$$

Mithin ergibt die Form der Hamiltonschen Gleichungen, wenn H von $q_1 \ldots q_m$ nicht affizirt wird, sofort die m Integrale

$$p_1 = a_1, \; p_2 = a_2 \ldots p_m = a_m,$$

wo $a_1 \ldots a_m$ die Integrationsconstanten bedeuten. Auch kommen dann die Veränderlichen $q_1 \ldots q_m$ ebenfalls in den Gleichungen (7) nicht selbst vor, sondern nur ihre Differentiale. Es kann daher zunächst das von den Veränderlichen t, $q_1 \ldots q_m$ freie System von $2k - 2m - 1$ Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} dq_{m+1} : dp_{m+1} \\ : dq_{m+2} : dp_{m+2} \\ \;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\ \;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\ : dq_k : dp_k \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial p_{m+1}} : -\frac{\partial H}{\partial q_{m+1}} \\ : \frac{\partial H}{\partial p_{m+2}} : -\frac{\partial H}{\partial q_{m+2}} \\ \;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\ \;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\ : \frac{\partial H}{\partial p_k} : -\frac{\partial H}{\partial q_k} \end{array}\right.$$

integrirt werden. Sind hier ausser dem von vornherein bekannten Integrale

$$H = a$$

noch $2k - 2m - 3$ Integrale

$$f_{2m+4} = a_{2m+4} \ldots f_{2k} = a_{2k}$$

mit den Integrationsconstanten $a_{2m+4} \ldots a_{2k}$ gefunden und werden

mit u und v diesmal zwei Functionen von $q_{m+1} \cdot\cdot q_k$, $p_{m+1} \cdot\cdot p_k$ bezeichnet, so wird die letzte Integration des obigen Systems durch die Quadratur

$$\int \frac{v' du - u' dv}{\frac{\partial(u, v, H, f_{2m+4} \ldots f_{2k})}{\partial(q_{m+1} \cdot\cdot q_k, p_{m+1} \cdots p_k)}} = \text{const.}$$

geleistet.

Die Veränderlichen $q_1, q_2 \ldots q_m$ können dann, wenn mit w eine Function von $q_{m+1} \ldots q_k$ bezeichnet wird, der Reihe nach durch die Quadraturen

$$q_1 - \int \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{dw}{w'} = \text{const.}$$

$$q_2 = \int \frac{\partial H}{\partial p_2} \frac{dw}{w'} = \text{const.}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$q_m - \int \frac{\partial H}{\partial p_m} \frac{dw}{w'} = \text{const.}$$

eingeführt werden.

In ähnlicher Weise besteht die letzte Integration, welche t einführt, ebenfalls in einer Quadratur.

§. 5.

Bewegung eines Punktes, welcher nach dem Weberschen electro-dynamischen Gesetze von einem festen Punkte angezogen wird.

Wir wollen zum Schluss noch eine kurze Anwendung der vorigen Entwicklungen geben.

Es möge ein fester Punkt mit der Masse m_1 auf einen frei beweglichen Punkt mit der Masse m_2 eine anziehende Kraft ausüben, für welche eine von der Entfernung r und deren erster Derivirten r′ der Art abhängende Kräftefunction V besteht, dass zwischen dieser und der wirkenden Kraft R der in der Einleitung angegebene Zusammenhang stattfindet, also

$$R\delta r = \delta V - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial r'}\delta r\right)$$

ist.

Führen wir hier die Variation und vollständige Derivation aus, so kommt

$$R\delta r = \left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial r'} r' - \frac{\partial^2 V}{\partial r'^2} r''\right)\delta r.$$

Es ist mithin

$$R = \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial r'} r' - \frac{\partial^2 V}{\partial r'^2} r''.$$

Da nun bei einer endlichen Geschwindigkeit keine unendlich grosse Kraft wirken kann, so muss V eine ganze rationale Function von r' sein; nehmen wir eine ganze rationale Function zweiten Grades, setzen also

$$V = \alpha + \beta r' + \gamma r'^2,$$

wo α, β und γ nur Functionen von r sind. Dann ist

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{\partial \beta}{\partial r} r' + \frac{\partial \gamma}{\partial r} r'^2$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r \partial r'} = \frac{\partial \beta}{\partial r} + 2\frac{\partial \gamma}{\partial r} r'$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r'^2} = 2\gamma;$$

mithin

$$R = \frac{\partial \alpha}{\partial r} - \frac{\partial \gamma}{\partial r} r'^2 - 2\gamma r''.$$

Hieraus geht hervor, da in diesem Ausdrucke für die Kraft der Coefficient β, welchen r' in V besitzt, gar nicht vorkommt, dass r' nicht linear in V enthalten sein kann oder dass wenigstens ein solches Glied auf die Kraft selbst gar keinen Einfluss ausübt.

Geschieht nun die Anziehung nach dem Weberschen Gesetze, so ist die Kraft bekanntlich

$$R = -\frac{m_1 m_2}{r^2}\left(1 - \frac{1}{c^2} r'^2 + \frac{2r}{c^2} r''\right),$$

wo c^2 eine gewisse, sehr grosse Constante bedeutet. Es ist also

$$\frac{\partial \alpha}{\partial r} = -\frac{m_1 m_2}{r^2}, \; \frac{\partial \gamma}{\partial r} = +\frac{m_1 m_2}{r^2 c^2}$$

$$\alpha = \frac{m_1 m_2}{r}, \; \gamma = -\frac{m_1 m_2}{r c^2}$$

$$1)\ V = \frac{m_1 m_2}{r}\left(1 - \frac{1}{c^2} r'^2\right).$$

α) Nehmen wir zunächst zur Vereinfachung, da die Bewegung in einer Ebene geschehen muss, welche durch den festen Punkt und die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit des beweglichen Punktes bestimmt wird, diese Ebene als Coordinatenebene der x und y und den festen Punkt als Anfangspunkt, so ist die lebendige Kraft

$$2)\ T = \frac{m_2}{2}(x'^2 + y'^2)$$

oder, wenn $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ gesetzt wird

$$T = \frac{m_2}{2}(r'^2 + r^2\varphi'^2);$$

also

$$3)\ T + V = m_2\left(\frac{1}{2} - \frac{m_1}{c^2}\right) r'^2 + \frac{m_2}{2} r^2 \varphi'^2 + \frac{m_1 m_2}{r}.$$

Die Differentialgleichungen für das vorliegende Problem in der II. Lagrangeschen Form sind

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T+V)}{\partial r'} = \frac{\partial(T+V)}{\partial r};\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial(T+V)}{\partial'\varphi} = \frac{\partial(T+V)}{\partial\varphi}.$$

Nun ist

$$\frac{\partial(T+V)}{\partial r'} = m_2\left(1 - \frac{2m_1}{rc^2}\right) r'$$

$$\frac{\partial(T+V)}{\partial\varphi'} = m_2 r^2 \varphi'$$

$$\frac{\partial(T+V)}{\partial r} = \frac{m_1 m_2}{r^2 c^2} r'^2 + m_2 r\varphi'^2 - \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

$$\frac{\partial(T+V)}{\partial\varphi} = 0.$$

Die Bewegungsgleichungen lauten also

$$4)\ \frac{d}{dt}\left\{\left(1 - \frac{2m_1}{rc^2}\right) r'\right\} = \frac{m_1}{r^2c^2} r'^2 + r\varphi'^2 - \frac{m_1}{r^2}$$

$$4^+)\ \frac{d}{dt}\left(r^2\varphi'\right) = 0.$$

Durch Ausführung der Differentiation erhalten wir noch aus der ersten Gleichung

$$\left(1 - \frac{2m_1}{rc^2}\right) r'' + \frac{2m_1}{r^2c^2} r'^2 = \frac{m_1}{r^2 c^2} r'^2 + r\varphi'^2 - \frac{m_1}{r^2}$$

$$5)\ r'' = \frac{-\frac{m_1}{rc^2} r'^2 + r\varphi'^2 - \frac{m_1}{r^2}}{1 - \frac{2m_1}{rc^2}}.$$

und aus der zweiten Gleichung

$$r^2 \varphi'' + 2rr' \varphi' = 0$$

$$5^+)\ \varphi'' = -\frac{2r' \varphi'}{r}.$$

Die vollständige Lösung des Problems erfordert 4 Integrationen. Ein Integral ergibt sich hier sofort aus Gleichung (4^+), nämlich

$$J_1 = r^2 \varphi' = c_1,$$

wo c_1 die willkürliche Integrationsconstante bedeutet. Da ferner t nicht explicite vorkommt, so kann dasselbe, wenn drei Integrationen geleistet sind, durch eine Quadratur eingeführt werden; ebendies gilt von φ, da nur φ' in den Bewegungsgleichungen (4) und (4^+) erscheint, schon nach zwei Integrationen. Die Gleichungen (4) und (4^+) sind also von der Beschaffenheit, dass sich mit Hülfe des Jacobischen Multiplicators und des Integrals $J_1 = c_1$ schon die zweite Integration ebenfalls durch eine Quadratur leisten lassen muss. Um dies zu zeigen, stellen wir zunächst den Jacobischen Multiplicator der Gleichungen (4) und (4^+) auf. Derselbe ist bestimmt durch die Determinante

$$M = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2(T+V)}{\partial r' \partial r'} & \frac{\partial^2(T+V)}{\partial \varphi' \partial r'} \\ \frac{\partial^2(T+V)}{\partial r' \partial \varphi'} & \frac{\partial^2(T+V)}{\partial \varphi' \partial \varphi'} \end{vmatrix}.$$

Nun ist

$$\frac{\partial^2(T+V)}{\partial r' \partial r'} = m_2 \left(1 - \frac{2m_1}{rc^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2(T+V)}{\partial \varphi' \partial r'} = \frac{\partial^2(T+V)}{\partial r' \partial \varphi'} = 0$$

$$\frac{\partial^2(T+V)}{\partial \varphi'^2} = m_2 r^2,$$

also

$$M = \begin{vmatrix} m_2 \left(1 - \frac{2m_1}{rc^2}\right) & 0 \\ 0 & m_2 r^2 \end{vmatrix}$$

oder, abgesehen von dem constanten Factor

$$6)\quad M = \left(1 - \frac{2m_1}{rc^2}\right) r^2.$$

Es muss sich übrigens auch der Multiplicator direkt aus der Definitionsgleichung desselben herleiten lassen. Dieselbe lautet bei den obigen Gleichungen

$$\frac{d \log M}{dt} + \frac{\partial r''}{\partial r'} + \frac{\partial \varphi''}{\partial \varphi'} = o.$$

Es ist aber nach Gleichung (5)

$$\frac{\partial r''}{\partial r'} = \frac{-\frac{2m_1}{r^2c^2} r'}{1 - \frac{2m_1}{rc^2}}$$

und nach Gleichung (5^+)

$$\frac{\partial \varphi''}{\partial \varphi'} = -\frac{2r'}{r},$$

also

$$\frac{\partial r''}{\partial r'} + \frac{\partial \varphi''}{\partial \varphi'} = \frac{-\frac{2m_1}{r^2c^2} r'}{1 - \frac{2m_1}{rc^2}} - \frac{2r'}{r}$$

$$= -\frac{d}{dt} \log \left(1 - \frac{2m_1}{rc^2}\right) - 2 \frac{d}{dt} \log r.$$

$$\frac{d \log M}{dt} = + \frac{d}{dt} \log \left\{\left(1 - \frac{2m_1}{rc^2}\right) r^2\right\}.$$

$$M = \left(1 - \frac{2m_1}{rc^2}\right) r^2.$$

Nehmen wir nun zwei Functionen von r, r′ und φ′, am besten r und r′ selbst und bilden die Gleichung

$$r' dr' - r'' dr = o;$$

ferner die Determinante

$$\Delta = \frac{\partial(rr' J_1)}{\partial(rr' \varphi')} = \frac{\partial J_1}{\partial \varphi'},$$

so muss nach der Theorie des Multiplicators

$$\frac{M}{\Delta}(r' dr' - r'' dr)$$

ein vollständiges Differential sein,

$$\int \frac{M}{\triangle} (r' \, dr' - r'' \, dr) = c_2$$

sein, wenn mit c_2 die Integrationsconstante bezeichnet wird.

Nun ist

$$\triangle = \frac{\partial J_1}{\partial \varphi'} = r^2,$$

mithin

$$\frac{M}{\triangle} = 1 - \frac{2m_1}{rc^2};$$

ferner war

$$r'' = \frac{-\frac{m_1}{r^2 c^2} r'^2 + r\varphi'^2 - \frac{m_1}{r^2}}{1 - \frac{2m_1}{rc^2}}.$$

Setzen wir diese Werte unter das Integralzeichen, so kommt

$$\int \left\{ \left(1 - \frac{2m_1}{rc^2}\right) r' \, dr' - \left(-\frac{m_1}{r^2 c^2} r'^2 + r\varphi'^2 - \frac{m_1}{r^2}\right) dr \right\} = c_2.$$

Hier haben wir noch φ' vermittelst des Integrals $J_1 = r^2 \varphi' = c_1$ fortzuschaffen. Das gibt

$$\int \left\{ \left(1 - \frac{2m_1}{rc^2}\right) r' \, dr' - \left(-\frac{m_1}{r^2 c^2} r'^2 + \frac{c_1^2}{r^3} - \frac{m_1}{r^2}\right) dr \right\} = c_2.$$

Um nun die Quadratur auszuführen, vereinigen wir zunächst die beiden Glieder

$$-\frac{2m_1}{rc^2} r' \, dr' \text{ und } + \frac{m_1}{r^2 c^2} r'^2 \, dr;$$

es ist nämlich

$$-\frac{2m_1}{rc^2} r' \, dr' + \frac{m_1}{r^2 c^2} r'^2 \, dr = d\left(-\frac{m_1}{rc^2} r'^2\right);$$

ferner ist

$$-\frac{c_1^2}{r^3} dr + \frac{m_1}{r^2} dr = d\left(\frac{1}{2}\frac{c_1^2}{r^2} - \frac{m_1}{r}\right)$$

$$r' \, dr' = d\left(\frac{1}{2} r'^2\right).$$

Durch Einführung dieser Umformungen kommt

$$\int d\left(-\frac{m_1}{rc^2} r'^2 + \frac{1}{2}\frac{c_1^2}{r^2} - \frac{m_1}{r} + \frac{1}{2} r'^2\right) = c_2$$

oder

$$I_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{m_1}{rc^2}\right) r'^2 + \frac{1}{2}\frac{c_1{}^2}{r^2} - \frac{m_1}{r} = c_2.$$

Wir haben so vermöge des Jacobischen Multiplicators das Integral erhalten, welches das Princip der lebendigen Kraft darstellt. Nach Gleichung (8) des Paragraphen (4) wird nämlich das Princip der lebendigen Kraft durch die Gleichung

$$H = \frac{\partial(T+V)}{\partial r'} r' + \frac{\partial(T+V)}{\partial \varphi'} \varphi' - (T+V) = \text{const.}$$

ausgedrückt. Nun ist

$$\frac{\partial(T+V)}{\partial r'} = m_2 \left(1 - \frac{2m_1}{rc^2}\right) r'$$

$$\frac{\partial(T+V)}{\partial \varphi'} = m_2 r^2 \varphi'$$

$$T + V = m_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{m_1}{rc^2}\right) r'^2 + \frac{m_2}{2} r^2 \varphi'^2 + \frac{m_1 m_2}{r},$$

also

$$H = m_2 \left(1 - \frac{2m_1}{rc^2}\right) r'^2 + m_2 r^2 \varphi'^2 - m_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{m_1}{rc^2}\right) r'^2 - \frac{m_2}{2} r^2 \varphi'^2 - \frac{m_1 m_2}{r} = \text{const.}$$

$$H = m_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{m_1}{rc^2}\right) r'^2 + \frac{1}{2} m_2 r^2 \varphi'^2 - \frac{m_1 m_2}{r} = \text{const.},$$

oder, da $r^2 \varphi' = c_1$ ist

$$H = \left(\frac{1}{2} - \frac{m_1}{rc^2}\right) r'^2 + \frac{1}{2}\frac{c_1{}^2}{r^2} - \frac{m_1}{r} = \text{const.}$$

Um nun noch die beiden fehlenden Integrale zu bestimmen, welche uns φ und t als Functionen von r liefern, bilden wir zunächst

$$d\varphi - \frac{\varphi' \, dr}{r'} = 0$$

und drücken vermöge der Integrale J_1 und J_2 φ' und r' als Functionen von r aus. Das gibt

$$d\varphi - \frac{c_1}{r^2} \sqrt{\frac{\frac{1}{2} - \frac{m_1}{rc^2}}{c_2 + \frac{m_1}{r} - \frac{1}{2}\frac{c_1{}^2}{r^2}}} \, dr = 0,$$

also

$$J_3 = \varphi - c_1 \int \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{\frac{1}{2} - \frac{m_1}{rc^2}}{c_2 + \frac{m_1}{r} - \frac{1}{2}\frac{c_1^2}{r^2}}}\, dr = c_3.$$

Aehnlich ergibt sich t aus der Gleichung

$$dt - \frac{dr}{r'} = o$$

vermittelst der Quadratur

$$J_4 = t - \int \sqrt{\frac{\frac{1}{2} - \frac{m_1}{rc^2}}{c_2 + \frac{m_1}{r} - \frac{1}{2}\frac{c_1^2}{r^2}}}\, dr = c_4.$$

Auf die Erörterung der Bewegung und der gefundenen elliptischen Integrale [1]) gehen wir nicht näher ein, da es uns hier nur darauf ankommt, die Anwendbarkeit des Princips des letzten Multiplicators zu zeigen.

β) In ähnlicher Weise lässt sich das Princip des letzten Multiplicators bei Integration der Differentialgleichungen benutzen, welche in dem allgemeinen Falle, der freien Bewegung des angezogenen Punktes im Raume entstehen.

Wir wollen für diesen Fall die Differentialgleichungen in der Hamiltonschen Form aufstellen. Führen wir zu dem Zweck Polarcoordinaten ein durch die Gleichungen

$$x = q_1 \sin q_2 \cos q_3,\ y = q_1 \sin q_2 \sin q_3,\ z = q_1 \cos q_2,$$

so wird die lebendige Kraft

$$T = \frac{m_2}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \frac{m_2}{2}(q_1'^2 + q_1^2 q_2'^2 + q_1^2 \sin q_2^2 q_3'^2),$$

also

$$7)\quad T + V = m_2\left(\frac{1}{2} - \frac{m_1}{q_1 c^2}\right) q_1'^2 + \frac{m_2}{2} q_1^2 q_2'^2 + \frac{m_2}{2} q_1 \sin q_2^2 q_3'^2 + \frac{m_1 m_2}{q_1}$$

---

1) Dieselben sind eingehender untersucht in den beiden Abhandlungen: 1) Ueber Anwendung der Jacobi-Hamiltonschen Methode auf den Fall der Anziehung nach dem electrodynamischen Gesetze von Weber von G. Holzmüller: Zeitschrift f. Math. u. Physik, herausg. v. D. O. Schlömilch Jahrg. XV. 2) De motu perturbationibusque planetarum etc. Inauguraldissertation von Seeger, Göttingen 1864.

Daraus erhalten wir weiter

$$8)\quad \frac{\partial(T+V)}{\partial q'_1} = m_2\left(1-\frac{2m_1}{q_1\,c^2}\right)q'_1 = p_1$$

$$8^+)\quad \frac{\partial(T+V)}{\partial q'_2} = m_2\,q_1{}^2\,q'_2 = p_2$$

$$8^{++})\quad \frac{\partial(T+V)}{\partial q'_3} = m_2\,q_1{}^2\sin q_2{}^2\,q'_3 = p_3.$$

Führen wir mit Hülfe dieser Gleichungen in $T+V$ anstatt q'_1, q'_2, q'_3 die Grössen p_1, p_2, p_3 ein, so kommt

$$T+V = \frac{\frac{1}{2}p_1{}^2}{m_2\left(1-\frac{2m_1}{q_1c^2}\right)} + \frac{\frac{1}{2}p_2{}^2}{m_2q_1{}^2} + \frac{\frac{1}{2}p_3{}^2}{m_2q_1{}^2\sin q_2{}^2} + \frac{m_1m_2}{q_1};$$

also ist

$$H = p_1\,q'_1 + p_2\,q'_2 + p_3\,q'_3 - (T+V)$$

$$= \frac{p_1{}^2}{m_2\left(1-\frac{2m_1}{q_1\,c^2}\right)} + \frac{p_2{}^2}{m_2\,q_1{}^2} + \frac{p_3{}^2}{m_2\,q_1{}^2\sin q_2{}^2}$$

$$-\left(\frac{\frac{1}{2}p_1{}^2}{m_2\left(1-\frac{2m_1}{q_1\,c^2}\right)} + \frac{\frac{1}{2}p_2{}^2}{m_2q_1{}^2} + \frac{\frac{1}{2}p_3{}^2}{m_2\,q_1{}^2\sin q_2{}^3} + \frac{m_1\,m_2}{q_1}\right)$$

$$9)\quad H = \frac{\frac{1}{2}p_1{}^2}{m_2\left(1-\frac{2m_1}{q_1\,c^2}\right)} + \frac{\frac{1}{2}p_2{}^2}{m_2\,q_1{}^2} + \frac{\frac{1}{2}p_3{}^2}{m_2\,q_1{}^2\sin q_2{}^2} - \frac{m_1\,m_2}{q_1}.$$

Daraus ergeben sich die folgenden Differentialgleichungen der Bewegung:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m_2\left(1-\frac{2m_1}{q_1c^2}\right)}$$

$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m_2\,q_1{}^2}$$

$$10)\quad \frac{dq_3}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_3} = \frac{p_3}{m_2\,q_1{}^2\sin q_2{}^2}$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = +\frac{m_1\,p_1{}^2}{m_2\,q_1{}^2\,c^2\left(1-\frac{2m_1}{q_1c^2}\right)^2} + \frac{1}{m_2}\left(p_2{}^2 + \frac{p_3{}^2}{\sin q_2{}^2}\right)\frac{1}{q_1{}^3}$$

$$-\frac{m_1\,m_2}{q_1{}^2}$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = \frac{p_3{}^2 \cos q_2}{m_2\, q_1{}^2 \sin q_2{}^3}$$

$$\frac{dp_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_3} = 0.$$

Die vollständige Lösung des Problems erfordert 6 Integrationen. Zwei derselben bestehen von vornherein in Quadraturen, da t und q_3 nicht selbst, sondern nur ihre Differentiale dt und dq_3 vorkommen. Es handelt sich also nur noch um die Auffindung von 4 Integralen. Von diesen ergeben sich zwei Integrale sofort, nämlich zunächst das Integral der lebendigen Kraft

$$11)\ J_1 = H = \frac{\frac{1}{2}p_1{}^2}{m_2\left(1 - \frac{2m_1}{q_1 c^2}\right)} + \frac{\frac{1}{2}p_2{}^2}{m_2 q_1{}^2} + \frac{\frac{1}{2}p_3{}^2}{m_2\, q_1{}^2 \sin q_2{}^2} - \frac{m_1\, m_2}{q_1} = c_1\,,$$

sodann aus der letzten der Bewegungsgleichungen (10)

$$12)\ J_2 = p_3 = c_2,$$

wo c_1 und c_2 die willkürlichen Integrationsconstanten bedeuten. Das letzte der beiden Integrale drückt nach der Bedeutung von $p_3 = m_2\, q_1{}^2 \sin q_2{}^2\, q'_3$ das Princip der Flächen in Bezug auf die xy Ebene aus. Können wir nun weiter noch ein drittes Integral auffinden, so muss die noch übrig bleibende Integration unter Benutzung des letzten Multiplicators durch eine Quadratur zu leisten sein.

Das dritte Integral erhalten wir aber leicht, da p_3 constant ist, auf folgende Weise:

Aus der zweiten der Bewegungsgleichungen (10) ergibt sich

$$2p_2 = 2m_2\, q_1{}^2 \frac{dq_2}{dt}$$

und, wenn wir hiermit die vorletzte der Bewegungsgleichungen multipliciren, entsteht

$$2p_2 \frac{dp_2}{dt} = 2p_3{}^2 \frac{\cos q_2}{\sin q_2{}^3} \frac{dq_2}{dt}$$

oder

$$\frac{dp_2{}^2}{dt} = -p_3{}^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sin q_2{}^2}\right).$$

Das dritte Integral mit der Constanten $c_3{}^2$ ist also

$$13)\ J_3 = p_2{}^2 + \frac{p_3{}^2}{\sin q_2{}^2} = c_3{}^2.$$

Um nunmehr noch das vierte Integral mit Hülfe des Multiplicators zu bestimmen, haben wir zwei Functionen von q_1, q_2, p_1, p_2, p_3 zu wählen, wozu wir am bequemsten q_1 und q_2 nehmen; ferner die Gleichung

$$q'_1\, dq_2 - q'_2\, dq_1 = 0$$

und die Determinante

$$\frac{\partial(q_1, q_2, H, J_2, J_3)}{\partial(q_1, q_2, p_1, p_2, p_3)} = \frac{\partial(H, J_2, J_3)}{\partial(p_1, p_2, p_3)}$$

zu bilden; dann wird das vierte Integral mit der Integrationsconstanten c_4 durch

$$J_4 = \int \frac{q'_1\, dq_2 - q'_2\, dq_1}{\dfrac{\partial(H, J_2, J_3)}{\partial(p_1, p_2, p_3)}} = c_4$$

dargestellt, wenn q'_1, q'_2 und die Determinante in q_1 und q_2 ausgedrückt worden sind. Für die Determinante erhalten wir aus den Gleichungen (11, 12 und 13) den Wert

$$\frac{\partial(H, J_2, J_3)}{\partial(p_1, p_2, p_3)} = \frac{\partial(H, J_3)}{\partial(p_1, p_2)} = \begin{vmatrix} \dfrac{p_1}{m_2\left(1 - \dfrac{2m_1}{q_1 c^2}\right)} & \dfrac{p_2}{m_2\, q_1{}^2} \\ 0 & 2p_2 \end{vmatrix}$$

oder, wenn wir von einem constanten Factor absehen

$$\frac{\partial(H, J_2, J_3)}{\partial(p_1, p_2, p_3)} = \frac{p_1\, p_2}{1 - \dfrac{2m_1}{q_1 c^2}};$$

ferner ist nach den Gleichungen (8) u. (8⁺)

$$q'_1 = \frac{p_1}{m_2\left(1 - \dfrac{2m_1}{q_1 c^2}\right)},\quad q'_2 = \frac{p_2}{m_2\, q_1{}^2}.$$

Durch Einsetzung dieser Werte wird

$$J_4 = \int \left\{ \frac{dq_2}{m_2 p_2} - \frac{1 - \dfrac{2m_1}{q_1 c^2}}{m_2\, q_1{}^2\, p_1}\, dq_1 \right\} = c_4.$$

Weiter ergibt sich aus Gleichung (13)

$$p_2 = \sqrt{c_3{}^2 - \frac{c_2{}^2}{\sin q_2{}^2}}$$

und aus Gleichung (11)

$$p_1 = \sqrt{\left\{ 2m_2\, c_1 + \frac{2m_1\, m_2{}^2}{q_1} - \left(p^2{}_2 + \frac{p_3{}^2}{\sin q_2{}^2}\right) \frac{1}{q_1{}^2} \right\} \left\{ 1 - \frac{2m_1}{q_1 c^2} \right\}}$$

$$14)\ p_1 = \sqrt{\left(2m_2 c_1 + \frac{2m_1 m_2^2}{q_1} - \frac{c_3^2}{q_1^2}\right)\left(1 - \frac{2m_1}{q_1 c^2}\right)}.$$

Es ist also schliesslich

$$J_4 = \frac{1}{m_2}\int \frac{dq_2}{\sqrt{c_3^2 - \frac{c_2^2}{\sin q_2^2}}} - \frac{1}{m_2}\int \frac{1}{q_1^2}\sqrt{\frac{1 - \frac{2m_1}{q_1 c^2}}{2m_2 c_1 + \frac{2m_1 m_2^2}{q_1} - \frac{c_3^2}{q'^2}}} = c_4.$$

Hier kann man das erste Integral vermittelst der Substitution

$$\sqrt{\frac{c_2^2}{c_3^2 - c_2^2}} \cos q_2 = \cos v$$

leicht ausführen, sodass

$$J_4 = \frac{1}{m_2 c_3} \arc\cos\left(\sqrt{\frac{c_3^2}{c_3^2 - c_2^2}} \cos q_2\right) - \frac{1}{m_2}\int \frac{1}{q_1^2}\sqrt{\qquad} \qquad dq_1 = c_4$$

wird.

Die beiden noch fehlenden Integrale, welche q_3 und t einführen, lassen sich endlich noch auf folgende Weise erhalten:

Aus der Gleichung (8^{++}) kommt zunächst unter Beachtung der Gleichung (12)

$$dq_3 - \frac{c_2}{m_2 q_1^2 \sin q_2^2} dt = 0;$$

ferner aus der Gleichung (8^+) in Verbindung mit der Gleichung (13)

$$\frac{dt}{m_2 q_1^2} = \frac{dq_2}{p_2} = \frac{dq_2}{\sqrt{c_3^2 - \frac{c_2^2}{\sin q_2^2}}}$$

und durch Vereinigung beider

$$dq_3 - \frac{c_2}{\sin q_2} \frac{dq_2}{\sqrt{c_3^2 - \frac{c_2^2}{\sin q_2^2}}} = 0.$$

Also ist

$$J_5 = q_3 - c_2 \int \frac{dq_2}{\sin q_2^2 \sqrt{c_3^2 - \frac{c_2^2}{\sin q_2^2}}} = c_5$$

$$J_5 = q_3 - c_2 \arc\cos\left(\sqrt{\frac{c_2^2}{c_3^2 - c_2^2}} \operatorname{cotg} q_2\right) = c_5.$$

Schliesslich wird t eingeführt durch

$$t - \int \frac{dq_1}{q'_1} = c_6$$

oder bei Beachtung der Gleichung (8)

$$t - m_2 \int \left(1 - \frac{2m_1}{q_1 c_2}\right) \frac{dq_1}{p_1} = c_6$$

oder, wenn wir noch den Wert von p_1 aus Gleichung (14) einsetzen

$$J_6 = t - m_2 \int \sqrt{\frac{1 - \frac{2m_1}{q_1 c^2}}{2m_2 c_1 + \frac{2m_1 m_2^2}{q_1} - \frac{c_3^2}{q_1^2}}} \, dq_1 = c_6.$$

Betreffs der elliptischen Integrale und einer näheren Untersuchung der Bewegung verweisen wir auf die schon beim vorigen Falle angegebenen Abhandlungen.

Ein mechanisches Problem.

INAUGURAL-DISSERTATION

der philosophischen Facultät zu Jena

zur

Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt

von

ERNST JULIUS LANGE,
wissenschaftlichem Hülfslehrer in Berlin.

Jena, 1873.
Druck von W. Ratz.

Ueber die Bewegung eines Punktes, welcher gezwungen ist, in einer Ebene zu bleiben, während er von einem andern ausserhalb der Ebene befindlichen Punkte nach dem Newton-schen Gesetz angezogen wird.

§ 1.

Die Differentialgleichungen für die Bewegung eines Punktes P, welcher gezwungen ist, auf einer Fläche $F = o$ zu bleiben, sind bekanntlich

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X + N\cos\alpha$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\cos\beta$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\cos\gamma$$

wo X Y Z die Componenten der den Punkt P bewegende Kraft Φ nach drei senkrechten Axen, N eine normal gegen die Fläche $F = o$ gerichtete Kraft, und $\alpha\,\beta\,\gamma$ die Winkel, welche letztere mit den Axen bildet, bezeichnen. Soll nun P sich in einer Ebene bewegen, so nehmen wir dieselbe als die Coordinatenebene der xy; dann ist $F = z = o$, $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = o$. Ist ferner P′ ein zweiter Punkt, ausserhalb der Ebene, welcher anziehend auf P wirkt, $P'O = c$ seine Entfernung von der xy Ebene, $P'P = r$ und O Anfangspunkt der Coordinaten, so ist $\Phi = -\frac{m}{r^2}$, wenn die Anziehung nach dem Newton'schen Gesetz erfolgt und für die Einheit der Entfernung $(r = 1)$ $\Phi = -m$ ist. Unter diesen Bedingungen haben wir dann für die Componenten von Φ:

$$X = -\frac{mx}{r^3},\ Y = -\frac{my}{r^3},\ Z = -\frac{mz}{r^3}$$

und da $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\frac{\pi}{2} = o$, $\cos\gamma = \cos o = 1$

$$1.\quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mx}{r^3}$$

$$2.\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{my}{r^3}$$

$$3.\quad o = -\frac{mc}{r^3} + N$$

Die Gleichung 3. giebt für jede Lage von P den Druck an, welchen die xy Ebene von der Normalkraft zu erleiden hat, $N = \frac{mc}{r^3}$. Er ist am grössten, wenn r am kleinsten, d. h. für $r = c$ im Punkte O, nämlich $N = \frac{m}{c^2}$ gleich der vollen Anziehungskraft; er vermindert sich mit wachsender Entfernung PO, bis er im Unendlichen Null wird.

Um aus den Gleichungen 1. und 2. eine erste Integration zu erhalten, multipliciren wir sie mit 2dx resp. 2dy und addiren, dann wird

$$2\,dx\,\frac{d^2x}{dt^2} + 2dy\,\frac{d^2y}{dt^2} = -2m\,\frac{xdx + ydy}{r^3}$$

Wir haben aber, wenn v die Bahngeschwindigkeit von P bedeutet:

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$d(v^2) = 2\,dx\,\frac{d^2x}{dt^2} + 2dy\,\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$= -2m\,\frac{xdx + ydy}{r^3}$$

Nennen wir ferner ϱ den Radius Vector PO und φ den Winkel POX, dann ist

$$x^2 + y^2 = \varrho^2 = r^2 - c^2$$

$$xdx + ydy = rdr$$

$$d(v^2) = -2m\,\frac{xdx + ydy}{r^3} = -2m\,\frac{dr}{r^2}$$

und durch Integration

$$\text{I.}\qquad v^2 = 2m\left(\frac{1}{r} - b\right) = 2m\left(\frac{1}{\sqrt{c^2+\varrho^2}} - b\right)$$

Aus 1. und 2. folgt ferner:

$$x\,\frac{d^2y}{dt^2} - y\,\frac{d^2x}{dt^2} = o$$

und durch Integration

$$4.\qquad x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt} = a$$

Quadrirt man diese Gleichung und addirt und subtrahirt gleichzeitig $x^2\,\frac{dx}{dt^2} + y^2\frac{dy^2}{dt^2}$, so wird

$$\left(x^2 + y^2\right)\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2}\right) - \left(\frac{xdx + ydy}{dt}\right)^2 = a^2 \text{ d. i.}$$

$$\varrho^2 v^2 - \left(\frac{\varrho\,d\varrho}{dt}\right)^2 = a^2$$

Hieraus ergiebt sich mit Hülfe von I

$$\text{II.}\qquad t = \int\frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{2m\,\varrho^2\left(\frac{1}{\sqrt{c^2+\varrho^2}} - b\right) - a^2}} + C.$$

Drückt man 4. in Polarcoordinaten aus, setzt also $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$, so wird:

$$5.\qquad \varrho^2\,d\varphi = a\,dt$$

und mit Hülfe von II

$$\text{III.}\qquad \varphi = \int\frac{a d\varrho}{\varrho\sqrt{2m\,\varrho^2\left(\frac{1}{\sqrt{c^2+\varrho^2}} - b\right) - a^2}} + C_1.$$

§ 2.

Tritt der anziehende Punkt in die xy Ebene, d. h. wird $c = o$, so gehen die Gleichungen I — III in diejenigen über, welche man bei Entwickelung der Kepplerschen Gesetze findet, wie dies nicht anders zu erwarten war. $N = \frac{mc}{r^3}$ wird Null, d. h. der angezogene Punkt bleibt von selbst in der Ebene, und die Componente der Kraft Φ in der xy Ebene $\Phi_\varrho = - \frac{m\varrho}{(c^2+\varrho^2)^{3/2}}$ wird $= - \frac{m}{\varrho^2}$ gleich der vollen Anziehungskraft. Die Gleichung I $v^2 = 2m\left(\frac{1}{\sqrt{c^2+\varrho^2}} - b\right)$ lehrt, dass die Geschwindigkeit des beweglichen Punktes am grössten, wenn seine Enfernung vom anziehenden Punkte am kleinsten, und umgekehrt; und aus der Gleichung 5 folgt, dass das zweite Kepplersche Gesetz: „Die vom Radius Vector überstrichenen Sectoren sind der Zeit proportional", auch für unsern Fall Gültigkeit hat.

Die Gleichungen II und III aber geben die Zeit t und den Winkel φ ausgedrückt durch elliptische Integrale, während sie für $c = o$ nur auf Kreisbogen und Logarithmen führen. Um diese Integrale weiter zu behandeln setzen wir $+ \frac{c}{\sqrt{c^2+\varrho^2}} = x$ also

$$\varrho^2 = \frac{c^2(1-x^2)}{x^2}, \quad \varrho\, d\varrho = - \frac{c^2 dx}{x^3}$$

und erhalten

$$t = - \int \frac{c^2\, dx}{x^2 \sqrt{2mc\,(1-x^2)(x-bc) - a^2 x^2}} + C$$

oder

$$6. \quad t = - c \sqrt{\frac{c}{2m}} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{- \left\{ x^3 + \left(\frac{a^2}{2mc} - bc\right) x^2 - x + bc \right\}}} + C$$

$$7. \quad \varphi = - \frac{a}{\sqrt{2mc}} \int \frac{dx}{(1-x^2) \sqrt{- \left\{ x^3 + \left(\frac{a^2}{2mc} - bc\right) x^2 - x + bc \right\}}} + L_1$$

Zur Bestimmung der Constanten a und b nehmen wir an, dass am Anfange der Bewegung sei: $t = o$, $\varphi = o$, $\rho = \rho_0$, $\upsilon = \upsilon_0$ und δ der Winkel, welchen die Richtung der Bewegung mit dem Radius Vector bildet. Dann ist wegen I $v_0^2 = 2m\left(\frac{1}{\sqrt{c^2+\rho_0^2}} - b\right)$

also:
$$8. \quad b = \frac{1}{\sqrt{c^2 + \rho_0^2}} - \frac{\upsilon_0^2}{2m}$$

Zerlegt man ferner die Geschwindigkeit $AB = \upsilon$ in zwei Componenten u und w, senkrecht und parallel zum Radius Vector, so ist

$$w = \frac{d\rho}{dt} = \upsilon \cos ABO$$

$$u = \rho\frac{d\varrho}{dt} = \upsilon \sin ABO$$

oder wegen $\rho^2 d\varphi = adt$

$$\frac{a}{\rho} = \upsilon \sin ABO$$

also für den Anfang der Bewegung

$$9. \quad a = \rho_0 \upsilon_0 \sin\delta$$

Bevor wir nun die Integrale 6 und 7 auf die Normalform bringen können, bedarf es einer Untersuchung, ob die kubische Gleichung

$$10. \quad x^3 + \left(\frac{a^2}{2mc} - bc\right)x^2 - x + bc = 0$$

eine oder drei reelle Wurzeln hat. Betrachten wir zu diesem Zwecke den Lauf der Curve

$$y = x^3 + \left(\frac{a^2}{2\,mc} - bc\right)x^2 - x + bc$$

so erhalten wir characteristische Punkte derselben mit den Coordinaten

$$x = -\infty \qquad y = -\infty$$

$$y = -1 \qquad y = +\frac{a^2}{2mc}$$

$$x = 0 \qquad y = +bc = -\frac{v_0^2 c}{2m} + \frac{c}{\sqrt{c^2+\rho_0^2}}$$

$$x = +1 \qquad y = +\frac{a^2}{2mc}$$

$$x = +\infty \qquad y = +\infty$$

Die Curve schneidet also die Abscissenaxe nothwendigerweise in dem Punkte x_3 für den $-\infty < x_3 < -1$ ist, indem sie aus der Region der negativen y ih die der positiven übergeht, und wenn

1) $v_0^2 > \frac{2m}{\sqrt{c^2+\rho_0^2}}$ ist, so geht y bei x_2 $(-1 \angle x_2 \angle o)$ zurück ins Negative und bei x_1 $(o \angle x_1 \angle 1)$ wieder ins Positive. In diesem Falle hat also die Gleichung 10. drei reelle Wurzeln, und zwar zwei negative und eine positive. Da nun $x = +\frac{c}{\sqrt{c^2+\rho^2}}$ gesetzt war, so kann x für keinen Werth von ρ negativ werden, muss also während der ganzen Bewegung zwischen o und 1 liegen. Daher haben wir für diesen Fall

$$y = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

$$o \angle x_1 \angle 1 \text{ und } 1 \angle x_2 \angle o$$

Wie ferner aus der Gleichung 6 oder

$$-c\sqrt{\frac{c}{2m}}\,\frac{dx}{dt} = x^2\sqrt{-y}$$

hervorgeht, kann x nur reell sein, wenn y negativ ist, d. h. $x \angle x_1$, und die Werthe x, für welche $y = o$ ist, sind zugleich Maxima oder Minima von x, da für sie auch der Differentialquotient $\frac{dx}{dt}$ verschwindet.

Demnach liegt x zwischen o und x_1.

2. Ist $v_0^2 = \frac{2m}{\sqrt{c^2+\rho_0^2}}$, dann ist $x = o$ eine Wurzel der Gleichung. Die Curve geht dann im Anfangspunkt der Coordinaten durch die Abscissenaxe und es ist

$$y = (x - x_1)\ x\ (x - x_3) \qquad x = o \ldots . x_1$$

3. Haben wir endlich $v_0{}^2 < \frac{2m}{\sqrt{c^2 + \varrho_0{}^2}}$, so sind auch hier die Wurzeln alle reell denn da y für $x = -1$ positiv ist, so muss es, damit x reell werde, wieder zurück ins Negative. Geschieht dies zwischen -1 und o, dann müsste die Curve in demselben Zwischenraum wieder ins Positive gehen, weil für $x = o$ $y = \frac{c}{2m}\left(\frac{2m}{\sqrt{c^2 + \varrho_0{}^2}} - v_2{}^0\right)$, also positiv ist. Dann würde aber, wie schon gezeigt, x während der ganzen Bewegung keinen reellen Werth haben. Folglich muss die Curve zwischen o und $+1$ die Axe zweimal schneiden, so dass in diesem Falle $y = o$ drei reelle Wurzeln hat, eine negative und zwei positive, von denen die eine ein Maximum, die andere ein Minimum. Es ist

$$y = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3), \; x = x_2 \ldots x_1$$
$$o \angle x_2 \angle x_1 \angle + 1.$$

Die Bewegung des Punktes geschieht demnach so, dass x von einem bestimmten Werthe an entweder fortwährend abnimmt, ϱ also von einem Minimum fortwährend wächst, oder nur bis zu einer bestimmten Gränze, um dann wieder abzunehmen. Es mag auch dies Resultat mit demjenigen für den Fall $c = o$ verglichen werden, wo der angezogene Punkt eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse beschreibt, jenachdem $v^2{}_0 \gtreqless \frac{2m}{\varrho_0}$ ist.

Es kann auch der Fall eintreten, dass zwei Wurzeln der Gleichung $y = o$ gleich sind, dann fallen die beiden Durchschnittspunkte B und A zusammen, und y kann nicht mehr ins Negative gehen, sondern ist für die ganze Bewegung Null. Für $y = o$ ist aber wegen $-c\sqrt{\frac{c}{2m}}\frac{dx}{dt} = x^2\sqrt{-y}$ auch $\frac{dx}{dt} = o$ d.i. x constant und ϱ constant während der ganzen Bewegung. Der Punkt P bewegt sich dann in einem Kreise.

Es war aber die Geschwindigkeitscomponente parallel dem Radius Vector $w = \frac{d\varrho}{dt}$, diese ist daher Null, weil $\frac{d\varrho}{dt} = o$ für $\varrho =$ constant. Die erste Bedingung also dass P sich in einem Kreise um O bewegt, ist dass er einen Stoss senkrecht zum Radius Vector erhält. In der Gleichung 9 wird für diesen Fall $\delta = \frac{\pi}{2}$, also $a = \varrho_0 v_0$.

Damit ferner die Gleichung

$$y = x^3 + \left(\frac{a^2}{2mc} - bc\right)x^2 - x + bc = o$$

zwei gleiche Wurzeln habe, muss $\frac{dy}{dx} = o$ d. i.

$$3x^2 + \left(\frac{a^2}{mc} - 2bc\right) x - 1 = o$$

sein. Setzt man hierin $x = \frac{c}{\sqrt{c^2 + \varrho_0{}^2}}$, $a = \varrho_0 v_0$ und $b = -\frac{v_0{}^2}{2m} + \frac{1}{\sqrt{c^2 + \varrho_0{}^2}}$, so wird schliesslich

$$v_0{}^2 (c^2 + \varrho_0{}^2)^{3/2} - m\varrho_0{}^2 = o \text{ d. i.}$$

$$11. \quad \frac{v_0{}^2}{\varrho_0} = m \frac{\varrho_0}{(c^2 + \varrho^2{}_0)^{3/2}}$$

Links steht der Ausdruck für die Schwungkraft rechts die Attractionscomponente $\Phi\varrho$ nach dem Mittelpunkt O. Wir haben also den Satz:

„Der Punkt P bewegt sich in einem Kreise um den Mittelpunkt O, wenn er eine Geschwindigkeit $v_0 = \frac{\varrho_0 \sqrt{m}}{(c^2 + \varrho_0{}^2)^{3/4}}$ senkrecht zum Radius Vector erhält oder wenn für $\varrho = \varrho_0$ die Schwungkraft gleich der Attractionscomponente nach dem Mittelpunkt ist.“

Ist dagegen φ constant, also $\frac{d\varphi}{dt} = o$, so wird wegen $\varrho^2 \frac{d\varphi}{dt} = a$ $a = o$ und $u = \varrho \frac{d\varphi}{dt} = o$ d. h.

„Ist im Anfang der Bewegung die Geschwindigkeit senkrecht zum Radius Vector gleich Null, so bewegt sich der Punkt in einer graden Linie, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht.“

§ 3.

Wir auch die Constante v_0 beschaffen sein mag, der angezogene Punkt erreicht während der Bewegung stets ein Minimum ϱ_0 der Entfernung von O, sein „Perihelium“, und dies wollen wir als Ausgangspunkt der Betrachtung wählen.

Der Punkt P gehe also von dem Perihelium P_0, durch welches die x Axe geben

möge, mit der Geschwindigkeit v_0 aus. Die von ihm beschriebene Bahn ist, da $OP_0 = \varrho_0$ ein Minimum, senkrecht zu OP_0. Betrachten wir von den aufgestellten Fällen zunächst denjenigen, dass

$$v_0^2 < \frac{2m}{\sqrt{c^2+\varrho_0^2}}$$

so bewegt sich nach § 2 ad 3 der Punkt so, dass ϱ stets zwischen einem Minimum ϱ_0 einem Maximum ϱ_1 bleibt, welche vermöge der Gleichung $x = \frac{c}{\sqrt{c^2+\varrho^2}}$ dem Maximum x_1 und dem Minimum x_2 entsprechen. Diese sind Wurzeln der Gleichung

$$10. \quad y = x^3 + \left(\frac{a^2}{2mc} - bc\right) x^2 - x + bc = o$$

und demnach durch die Constanten derselben bestimmt. Wir können also auch x_1 und x_2 oder ϱ_0 und ϱ_1 als gegeben ansehen. Die 3. Wurzel x_3 der Gleichung 10 ergiebt sich leicht aus der Bemerkung, dass die Summe der Producte je zweier der Wurzeln gleich dem Coefficienten von x sein muss, dass also

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = -1$$

hieraus ist

$$12. \quad x_3 = -\frac{1 + x_1 x_2}{x_1 + x_2}$$

Beachten wir ferner, dass die Summe der Wurzeln gleich dem Coefficienten von x^2, das Produkt derselben aber gleich dem letzten Gliede in 10., beide mit entgegengesetztem Vorzeichen sein muss, so ergiebt sich

$$\frac{a^2}{2mc} - bc = -(x_1 + x_2 + x_3) = \frac{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_1 x_2}{x_1 + x_2}$$

$$13. \quad bc = -x_1 x_2 x_3 = \frac{x_1 x_2 + x_1^2 x_2^2}{x_1 + x_2}$$

$$\frac{a^2}{2mc} = \frac{1 - x_1^2 - x_2^2 + x_1^2 x_2^2}{x_1 + x_2} = \frac{(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)}{x_1 + x_2}$$

$$14. \quad \frac{a}{\sqrt{2mc}} = \sqrt{\frac{(1-x_1{}^2)(1-x_2{}^2)}{x_1 + x_2}}$$

Die Integrale 6 und 7 gehen dann über in

$$15. \quad t = -c\sqrt{\frac{c}{2m}}\int\frac{dx}{x^2\sqrt{-(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}} + C$$

$$16. \quad \varphi = -\sqrt{\frac{(1-x_1{}^2)(1-x_2{}^2)}{x_1 + x_2}}\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{-(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}} + C_1$$

Um diese zu reduciren benutzen wir eine Substitution 2. Ordnung und setzen

$$17. \quad x = x_1 \cos^2\sigma + x_2 \sin^2 s$$

dann wird

$$-dx = 2(x_1 - x_2)\sin\sigma\cos\sigma\, d\sigma$$

$$-(x - x_1) = (x_1 - x_2)\sin^2\sigma$$

$$(x - x_2) = (x_1 - x_2)\cos^2\sigma$$

$$(x - x_3) = (x_2 - x_3)\sin^2\sigma + (x_1 - x_3)\cos^2\sigma$$

$$t = c\sqrt{\frac{2c}{m}}\int\frac{d\sigma}{x^2\sqrt{(x_2 - x_3)\sin^2\sigma + (x_1 - x_3)\cos^2\sigma}} + C$$

Es ist aber $x = x_1\left(1 - \frac{x_1 - x_2}{x_1}\sin^2\sigma\right)$; setzen wir also

$$18. \quad \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} = k^2$$

$$19. \quad -\frac{x_1 - x_2}{x_1} = n$$

und rechnen die Zeit vom Perihelium an, so wird $t = o$ für $x = x_1$ oder $\sigma = o$, wie aus 17 folgt, demnach ist

$$20. \quad t = \frac{c\sqrt{2c}}{x_1{}^2\sqrt{m(x_1 - x_3)}}\int_o^\sigma\frac{d\sigma}{(1 + n\sin^2\sigma)\Delta\sigma} = C\int_o^\sigma\frac{d\sigma}{(1 + n\sin^2\sigma)\Delta\sigma}$$

Zur weiteren Reduction benutzen wir eine Formel, welche sich leicht durch Differentiation und nachheriger Integration des Ausdrucks $\frac{\sin\sigma\cos\sigma\Delta\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)^m}$ ergiebt und nach welcher

$$21. \quad \frac{\sin\sigma\cos\sigma\Delta\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)^{m-1}} = \gamma_3 V_{m-3} + \gamma_2 V_{m-2} + \gamma_1 V_{m-1} + \gamma_0 V_m$$

ist, wenn

$$V_m = \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)^m \Delta\sigma}$$

und die Constanten γ gegeben sind durch die Gleichungen.

$$22. \quad \begin{cases} \gamma_3 = -(2m-5)\frac{k^2}{n^2} \\ \gamma_2 = (2m-4)\left(\frac{1+k^2}{n} + \frac{3k^2}{n^2}\right) \\ \gamma_1 = -(2m-3)\left(1+2\frac{1+k^2}{n} + \frac{3k^2}{n^2}\right) \\ \gamma_0 = (2m-2)\left(1+\frac{1+k^2}{n} + \frac{k^2}{n^2}\right) \end{cases}$$

Nehmen wir $m=2$, so wird $\gamma_2 = o$: ferner ist wegen $1-k^2\sin^2\sigma = \Delta^2\sigma$ oder $\sin^2\sigma = \frac{1-\Delta^2\sigma}{k^2}$

$$1+n\sin^2\sigma = 1+\frac{n}{k^2} - \frac{n}{k^2}\Delta^2\sigma.$$

$$\gamma_3 V_{m-3} = \gamma_3 \int_0^\sigma (1+n\sin^2\sigma)\frac{d\sigma}{\Delta\sigma} = \gamma_3\left(1+\frac{n}{k^2}\right)\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\Delta\sigma} - \gamma_3\frac{n}{k^2}\int_0^\sigma \Delta\sigma\, d\sigma$$

$$\gamma_1 V_{m-1} = \gamma_1 \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)\Delta\sigma}$$

$$\gamma_0 V_m = \gamma_0 \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)^2\Delta\sigma}$$

Substituiren wir diese Ausdrücke in 21. so finden wir für V_m

$$\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)^2\Delta\sigma} = \frac{\sin\sigma\cos\sigma\,\Delta\sigma}{\gamma_0(1+n\sin^2\sigma)} - \frac{\gamma_3}{\gamma_0}\left(1+\frac{n}{k^2}\right)\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\Delta\sigma}$$

$$+\frac{\gamma_3}{\gamma_0}\frac{n}{k^2}\int_0^\sigma \Delta\sigma\, d\sigma - \frac{\gamma_1}{\gamma_0}\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)\Delta\sigma}$$

Drückt man aber die Grössen γ durch $x_1\ x_2\ x_3$ aus indem man die Relationen 18 und 19 beachtet, so wird

$$\gamma_3 = \frac{x_1^2}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$\gamma_0 = \frac{2x_2x_3}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$23.\quad \int_0^\sigma \frac{ds}{(1+n\sin^2\sigma)^2\Delta\sigma} =$$

$$\frac{\sin\sigma\cos\sigma\,\Delta\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)\gamma_0} - \frac{x_1}{2x_2}\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\Delta\sigma} - \frac{x_1(x_1-x_3)}{2x_2x_3}\int_0^\sigma \Delta\sigma\, d\sigma - \frac{1}{2x_2x_3}\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)\,\Delta\sigma}$$

Um jetzt die Jacobische Normalform einzuführen setzen wir

$$\alpha)\qquad \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\Delta\sigma} = u \text{ oder } \sigma = \operatorname{am} u, \text{ dann ist}$$

$$\beta)\qquad \int_0^\sigma \Delta\sigma\, d\sigma = \frac{E}{K}u + Z(u)$$

wo K und E die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung, Z (u) aber die Reihe bezeichnet

$$Z(u) = \frac{2\pi}{K}\left\{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \dots\right\}$$

oder auch mit Hülfe der Function

$$\Theta(u) = 1 - 2q\cos\frac{\pi u}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi u}{K} + \dots$$

$$Z(u) = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}$$

Der Parameter des Integrals 3. Gattung liegt zwischen -1 und $-k^2$, denn sein absoluter Werth $\frac{x_1 - x_2}{x_1}$ ist kleiner als 1 und grösser als $k^2 = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3}$; wir haben daher $n = -k^2 \sin^2 \operatorname{am}(ia + K)$ zu setzen, und dann ergiebt sich die Jacobische Normalform

$$\Pi(u,a) = \int_0^u \frac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \,\Delta \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} u\, du}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} u}$$

aus der Legendre'schen vermittelst der Gleichung

$$\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1 + n \sin^2 \sigma)\Delta\sigma} = u + \frac{\Delta \operatorname{am}(a,k')}{k^2 \sin^2 \operatorname{am}(a,k') \cos \operatorname{am}(a,k')}\, i\, \Pi(u, ia+K)$$

Es ist aber

$$\sin^2 \operatorname{am}(ia + K) = \frac{1}{\Delta^2 \operatorname{am}(a, k')} = -\frac{n}{k^2} = \frac{x_1 - x_3}{x_1}, \text{ folglich}$$

$$\Delta \operatorname{am}(a,k') = \sqrt{\frac{x_1}{x_1 - x_2}}$$

$$\sin \operatorname{am}(a, k') = \frac{1}{k'}\sqrt{\frac{-x_3}{q_1 - x_3}}$$

$$\cos \operatorname{am}(a, k') = \frac{1}{k'}\sqrt{\frac{x_2}{x_1 - x_3}}$$

$$\Pi(u, ia + K) = u\, Z(ia + K) + \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(u - ia - K)}{\Theta(u + ia + K)}$$

demnach

$$\gamma) \quad \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1 + n \sin^2 \sigma)\Delta\sigma} =$$

$$u + i\sqrt{\frac{-x_1(x_1 - x_3)}{x_2 x_3}}\, Z(ia + K) u + \frac{1}{2}\, i \sqrt{\frac{-x_1(x_1 - x_3)}{x_2 x_3}} \log \frac{\Theta(u - ia - K)}{\Theta(u + ia + K)}$$

Führen wir noch eine Function

$$\delta)\ \frac{\sin\sigma\cos\sigma\,\Delta\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)\gamma_0} = R(u)$$

ein, so wird aus 23 mit Hülfe von $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$

$$24.\quad \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)^2\Delta\sigma} = \left\{\begin{array}{l} R(u) - \frac{x_1(x_1-x_3)}{2x_2x_3}\,Z(u) \\ -\frac{1}{4x_2x_3}\sqrt{\frac{-x_1(x_1-x_3)}{x_2x_3}}\ i\log\frac{\Theta(u-ia-K)}{\Theta(u+ia+K)} \\ +\frac{u}{K}\left\{\frac{(x_1x_3+1)K+x_1(x_1-x_3)E+iK\sqrt{\frac{-x_1(x_1-x_3)}{x_2x_3}}}{-2x_2x_3} - Z(ia+K)\right\} \end{array}\right.$$

$$= \Phi(u) + C_1\frac{u}{K}$$

$$25.\quad t = C\Phi(u) + CC_1\frac{u}{K}$$

Um diesen Ausdruck zu diskutiren, betrachten wir zunächst die Function $\Phi(u)$; diese ist periodisch, denn es ist

$$\Phi(u) = R(u) + \varepsilon Z(u) + \varepsilon_1\log\frac{\Theta(u-ia-K)}{\Theta(u+ia+K)}$$

$$Z(u+2K) = Z(u)$$

$$\Theta(u+2K) = \Theta(u)$$

$$\sin\mathrm{am}(u+2K) = -\sin\mathrm{am}\,u$$

$$\cos\mathrm{am}(u+2K) = -\cos\mathrm{am}\,u$$

$$\Delta\,\mathrm{am}(u+2K) = \Delta\,\mathrm{am}\,u$$

$R(u+2K) = R(u)$ folglich

$$\Phi(u+2K) = \Phi(u)$$

$\Phi(u)$ verschwindet ferner für $u = nK$, n eine positive oder negative ganze Zahl, denn $\sin\mathrm{am}\,nK\cos\mathrm{am}\,nK = o$ und $Z(nK) = o$ und schreiben wir $ia + K - u = u_1$ so ist

$$\log \frac{\Theta(u-ia-K)}{\Theta(u+ia+K)} = \log \frac{\Theta(-u_1)}{\Theta(u_1+2u)} = \log 1 = o$$

für $u = nK$, folglich

$$\Phi(nK) = o$$

Nun wird die Zeit T, welche der Punkt gebraucht, um vom Pherihelium bis zum Aphelium zugelangen, gefunden, wenn man in 20 von $\sigma = o$ bis $\sigma = \frac{\pi}{2}$ integrirt, oder in 25 $u = K$ setzt. Thut man dies, so wird

26) $T = CC_1$ und demnach

27) $t = C\Phi(u) + \frac{u}{K} T$

Wächst hierin u um 2K, so wächst t um 2T, und da wegen der Gleichung 17 oder

$$x = \frac{c}{\sqrt{c^2+\varrho^2}} = x_1 \cos^2 \mathrm{am}\, u + x_2 \sin^2 \mathrm{am}\, u$$

ϱ stets dasselbe ist, wenn u um 2 K wächst so haben wir das Resultat, dass nach Verlauf der Zeit 2 T der Punkt sich in derselben Entfernung von O befindet.

Beschreiben wir also mit den Radien ϱ_0 und ϱ_1 zwei Kreise um O, so wird P zu den Zeiten $t = o$, 2T, 4T etc. irgend wo auf der Peripherie des einen, zu den Zeiten $t = T$, 3T, 5T etc. irgendwo auf der Peripherie des andern Kreises sein, während er sich in den übrigen Zeitmomenten zwischen beiden befindet. Wollen wir die Constante

$$C = \frac{(x_1 x_3 + 1) K + x_1 (x_1 - x_3) E + K \sqrt{\frac{-x_1(x_1-x_3)}{x_2 x_3}}\, iZ(ia+K)}{2 x_2 x_3}$$

in reeller Form haben, so ist zu beachten,

$$\text{dass } iZ(ia+K) = \frac{\pi a}{2KK'} - \frac{k'^2 \sin \mathrm{am}\, ak' \cos \mathrm{am}\, ak'}{\Delta \mathrm{am}\, ak'} = Z(ak')$$

$$= \frac{\pi a}{2KK'} - \sqrt{\frac{x_2 x_3}{-x_1(x_1-x_3)}} + Z(ak')$$

ist; darnach wird dann

$$28.\quad \begin{cases} C_1 = \dfrac{x_1 x_3 K + x_1(x_1 - x_3)E + \left[\dfrac{\pi\alpha}{2K'} + KZ(ak')\right]\sqrt{\dfrac{-x_1(x_1 - x_3)}{x_2 x_3}}}{-2x_2\, x_3} \\ C = \dfrac{c\sqrt{2c}}{x_1{}^2\sqrt{m(x_1 - x_3)}} \\ T = CC_1 \end{cases}$$

Wir wenden uns nun zur Betrachtung des Winkels φ; dieser ist gegeben durch die Gleichung

$$\varphi = -\sqrt{\frac{(1 - x_1{}^2)(1 - x_2)^2}{x_1 + x_2}} \int \frac{dx}{(1 - x^2)\sqrt{-(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}}$$

Das Integral wird für $x = 1$ unendlich, wenn daher $x_1 = 1$, was immer der Fall sein wird, wenn der anziehende Punkt sehr weit von der Ebene und φ_0 nicht sehr gross, d. h. wenn zu Anfang der Bewegung die Entfernung PO gegen P'O sehr klein ist, so können wir die vorigen Substitutionen, bei denen die untere Gränze des Integrals für $x = x_1$ Null wird, nicht mehr gebrauchen und setzen daher

$$\Delta^2\sigma = \frac{x_2 - x_3}{x - x_3}$$

oder

$$29.\qquad x = x_3 + \frac{x_2 - x_3}{\Delta^2\sigma}$$

dann wird

$$dx = \frac{2k^2(x_2 - x_3)\sin\sigma\cos\sigma\, d\sigma}{\Delta^4\sigma}$$

$$x - x_3 = \frac{x_2 - x_3}{\Delta^2\sigma}$$

$$x - x_2 = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} \cdot \frac{x_2 - x_3}{\Delta^2\sigma} \sin^2\sigma$$

$$x - x_1 = -\frac{x_1 - x_2}{\Delta^2\sigma} \cos^2\sigma$$

$$30.\quad \varphi = -2\sqrt{\frac{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}{(x_1+x_2)(x_1-x_3)}}\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1-x^2)\Delta\sigma}$$

wo k denselben Werth wie früher hat, aber die Winkel nicht vom Perihelium, sondern vom Aphelium an gezählt sind.

$\frac{1}{1-x^2}$ wir zerlegt in $\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right\}$. es ist aber

$$1+x = \frac{1+x_3-k^2\sin^2\sigma(1+x_3)+x_2-x_3}{\Delta^2\sigma} = \frac{(1+x_2)\left\{1-k^2\frac{1+x_3}{1+x_2}\sin^2\sigma\right\}}{\Delta^2\sigma}$$

$$1-x = \frac{1-x_3-k^2\sin^2\sigma(1-x_3)-x_2+x_3}{\Delta^2\sigma} = \frac{(1-x_2)\left\{1-k^2\frac{1-x_3}{1-x_2}\sin^2\sigma\right\}}{\Delta^2\sigma}$$

und wenn

$$n_1 = -k^2\frac{1+x_3}{1+x_2}$$

$$n_2 = -k^2\frac{1-x_3}{1-x_2}$$

gesetzt wird, so haben wir

$$\varphi = -\sqrt{\frac{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}}\left[\frac{1}{1+x_2}\int_0^\sigma\frac{\Delta^2\sigma d\sigma}{(1+n_1\sin^2\sigma)\Delta\sigma}+\frac{1}{1-x_2}\int_0^\sigma\frac{\Delta^2\sigma d\sigma}{(1+n_2\sin^2\sigma)\Delta\sigma}\right]$$

Ferner ist

$$\int_0^\sigma\frac{\Delta^2\sigma d\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)\Delta\sigma} = \int_0^\sigma\frac{d\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)\Delta\sigma} = \int_0^\sigma\frac{k^2\sin^2\sigma d\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)\Delta\sigma}$$

Setzt man aber

$$\int_0^\sigma\frac{d\sigma}{\Delta\sigma} = u_1 \text{ und } n = -k^2\sin^2\text{am a}$$

so ist nach der Jacobischen Bezeichnung

$$\Pi(u_1, a) = \int_0^\sigma \frac{k^2 \sin am\, a \cos am\, a \,\Delta am\, a \sin^2\sigma d\sigma}{(1 + n\sin^2\sigma)\,\Delta\sigma}$$

also

$$\int_0^\sigma \frac{k^2 \sin^2\sigma\, d\sigma}{(1 + n\sin^2\sigma)\,\Delta\sigma} = \frac{\Pi(u_1\,,\,a)}{\sin am\, a \cos\, am\, a\, \Delta\, am\, a}$$

$$\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1 + n\sin^2\sigma)\,\Delta\sigma} = u_1 + \frac{\text{tang am a}}{\Delta\text{ ama}}\,\Pi(u_1\, a)$$

folglich

$$\int_0^\sigma \frac{\Delta^2\sigma d\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)\Delta\sigma} = u_1 + \frac{\text{tang am a}}{\Delta\text{ am a}}\Pi(u_1\,,\,a) - \frac{\Pi(u_1,a)}{\text{sinamacosama}\Delta\text{ama}}$$

$$= u_1 - \frac{\text{cotg am a}}{\Delta\text{ am a}}\,\Pi(u_1\,,\,a)$$

Es liegt aber der Parameter n_1 zwischen den Gränzen o und ∞, wie sich sogleich ergiebt, wenn man beachtet, dass in

$$n_1 = -k^2\,\frac{1+x_3}{1+x_2}$$

x_3 negativ und grösser als 1 ist. Wir haben daher zu setzen

$$n_1 = -k^2 \sin\, am(ia_1)$$

und damit wird dann

$$\sin^2 am\,(ia_1) = -\tan^2 am\,(a_1 k') = -\frac{n_1}{k^2} = \frac{1+x_3}{1+x_2}$$

$$\sin^2 am\,(a_1 k') = -\frac{1+x_3}{x_2-x_3}$$

$$\cos^2 am\,(a_1 k') = \frac{1+x_2}{x_2-x_3}$$

$$\Delta^2\, am\,(a_1 k') = \frac{1+x_1}{x_2-x_3}$$

$$a)\ \frac{1}{1+x_2}\int_0^\sigma \frac{\Delta^2\sigma d\sigma}{(1+n_1\sin^2\sigma)\Delta\sigma} = \frac{u_1}{1+x_2} + i\sqrt{\frac{-(x_1-x_3)}{(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)}}\,\Pi(u_1\,,\,ia_1)$$

n_2 liegt zwischen $-k^2$ und -1, denn es ist zunächst $n_2 = -k^2\frac{1-x_3}{1-x_2} < -k^2$, weil $\frac{1-x_3}{1-x_2} > 1$ $(1-x_3 > 1$ und $1-x_2$ ein ächter Bruch); ferner $-n_2 = \frac{x_1-x_2}{x_1-x_3}\cdot\frac{1-x_3}{1-x_2}$ $= \frac{x_1+x_2x_3-x_2-x_1x_3}{x_1+x_2x_3-x_3-x_1x_2} < 1$, da $-x_1x_3-x_2 < -x_3-x_1x_2$: es muss daher gesetzt werden:

$$n_2 = -k^2\sin^2\text{am}\,(ia_2+K)\ \text{oder}$$

$$\sin^2\text{am}\,(ia_2+K) = \frac{1}{\Delta^2\,\text{am}\,(a_2k')} = -\frac{n_2}{k^2} = \frac{1-x_3}{1-x_2}$$

$$\Delta^2\,\text{am}\,(a_2k') = \frac{1-x_2}{1-x_3}$$

$$\sin^2\text{am}\,(a_2k') = \frac{x_1-x_3}{1-x_3}$$

$$\cos^2\text{am}\,(a_2k') = \frac{1-x_1}{1-x_3}$$

da aber $\frac{\text{cotg am}\,(ia_2+K)}{\Delta\,\text{am}\,(ia_2+K)} = -i\,\frac{\Delta\,\text{am}\,(a_2k')}{\text{cotg am}\,(a_2k')}$, so ist

$$b)\ \frac{1}{1-x_2}\int_0^\sigma \frac{\Delta^2\sigma d\sigma}{(1+n_2\sin^2\sigma)\Delta\sigma} = \frac{u_1}{1-x_2} + i\sqrt{\frac{x_1-x_3}{(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)}}\,\Pi(u_1\,,\,ia_2+K)$$

$$a+b = \frac{2u_1}{1-x_2{}^2} + i\sqrt{\frac{-(x_1-x_3)}{(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)}}\,\Pi(u_1,ia_1) + i\sqrt{\frac{x_1-x_3}{(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)}}\,\Pi(u_1,ia_2+K)$$

$$\varphi = -\sqrt{\frac{(1-x_1{}^2)(1-x_2{}^2)}{(x_1+x_2)(x_1-x_3)}}\,(a+b)$$

Es ist aber $1-x_3 = 1+\frac{1+x_1x_2}{x_1+x_2} = \frac{(1+x_1)(1+x_2)}{x_1+x_2}$

folglich

$$\sqrt{\frac{x_1 - x_3}{(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)}} = \sqrt{\frac{(x_1-x_3)(x_1+x_2)}{(1-x_1^2)(1+x_2^2)}}$$

ferner

$$1 + x_3 = 1 - \frac{1+x_1x_2}{x_1+x_2} = -\frac{(1-x_1)(1-x_2)}{x_1+x_2}$$

$$\sqrt{\frac{-(x_1-x_3)}{(1+x_1)(1+x_2)(1-x_3)}} = \sqrt{\frac{(x_1-x_3)(x_1+x_2)}{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}}$$

Löst man demnach in dem Ausdruck für φ die Klammer auf, so heben sich die Wurzelfactoren von $\Pi(u_1, ia_1)$ und $\Pi(u_1, ia_2 + K)$ weg, und es bleibt, wenn noch

$$x_1 - x_3 = x_1 + \frac{1+x_1x_2}{x_1+x_2} = \frac{1+2x_1x_2+x_1^2}{x_1+x_2}$$

geschrieben wird:

$$\varphi = -\sqrt{\frac{(1-x_1^2)}{(1-x_2^2)(1+2x_1x_2+x_2^2)}}\, u_1 - i\,\Pi(u_1, ia_1) - i\Pi(u_1, ia_2+K)$$

oder für

$$u_1 = -u \text{ und } \sqrt{\frac{(1-x_1^2)}{(1-x_2^2)(1+2x_1x_2+x_2^2)}} = M$$

$$\varphi = Mu + i\,\Pi(u, ia_1) + i\,\Pi(u, ia_2 + K)$$

Wollen wir auch hier wieder die Functionen Z und Θ einführen, so müssen wir setzen:

$$\Pi(u,a) = u\,Z(a) + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}$$

und erhalten.

$$\varphi = \{M + i\,Z(ia_1) + iZ(ia_2+K)\}\, u$$

$$+\frac{1}{2}\, i \log \frac{\Theta(u-ia_1)\;\Theta(u-ia_2-K)}{\Theta(u+ia_1)\;\Theta(u+ia_2+K)}$$

Aus einer ähnlichen Betrachtung wie bei der Zeit t folgt nun, dass das periodische

Glied, welches die Θ **enthält, für** $u = nK$ verschwindet. **Nennen wir daher** Φ den Winkel, welchen der Radius Vector beschreibt, während der Punkt vom Aphelium bis zum Perihelium sich bewegt, d. h. integriren wir wieder von $\sigma = o$ bis $\sigma = \pi/_2$ oder setzen in der letzten Gleichung $u = K$, so wird

$$31. \qquad \Phi = \{ M + iZ(ia_1) + iZ(ia_2 + K) \} K$$

$$32. \qquad \varphi = \Phi \frac{u}{K} + \frac{1}{2} i \log \frac{\Theta(u - ia_1)\,\Theta(u - ia_2 - K)}{\Theta(u + ia_1)\,\Theta(u + ia_2 + K)}$$

Aus dieser Gleichung im Verein mit demjenigen, was wir über den Radius ϱ ermittelt haben, ergiebt sich nun folgende Construction der von dem Punkte beschriebenen Bahn: Ist $OP_0 = \varrho_0$ und $OP_1 = \varrho_1$, P_0 die Anfangsposition des Punktes, so beschreibt dieser die Bahn 0 1 2 3 4 5 . . . wo die Punkte 0 2 4 . . . und 1 3 5 7 . . . so auf den Peripherieen des mit ϱ_0 resp. ϱ_1 um O beschriebenen Kreises liegen, dass die Winkel ${}_0O_1 = {}_1O_2 = {}_2O_3 = \ldots \Phi$ **sind.** Er beschreibt also dieselbe Curve, wie die Projection des sphärischen Pendels auf eine Horizontalebene und kann wie jenes nur dann seine Anfangsposition wieder erlangen, **wenn** Φ zu π in einem rationalen Verhältniss steht. Andernfalls macht er unendliche Revolutionen um O, ohne je wieder nach P_0 zu gelangen.

Geht der kleine Kreis in einen Punkt über, d. h. wird $\varrho_0 = o$, dann ist $x_1 = +1$ und $x_3 = -1$, infolge dessen:

$$M = o\,,\quad \left.\begin{array}{l}\sin am(a_1 k') = 0\\ \cos am(a_1 k') = 1\end{array}\right\} a_1 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin am(a_2 k') = 1\\ \cos am(a_2 k') = 0\end{array}\right\} a_2 = K'$$

$$\Pi\,(u\,,\,o) = o$$

$$\Pi\,(u\,,\,iK' + K) = o\,,\quad \text{folglich}$$

$$\varphi = o$$

d. h. die von dem Punkte P beschriebene Bahncurve geht dann in den Durchmesser des grossen Kreises über, auf welchem der Punkt hin und her pendelt. Die Schwingungsdauer 4 T ist dann dieselbe Zeit, welche P im andern Falle gebraucht, um die Strecke 0 1 2 3 4 **seiner Bahn zu durchlaufen.**

Um auch den Winkel Φ in reeller Form zu erhalten, benutzen wir die Relationen.

$$iZ(ia_1) = -\operatorname{tgam}(a_1 k')\,\Delta\operatorname{am}(a_1 k') + \frac{\pi a_1}{2KK'} + Z(a_1 k')$$

$$iZ(ia_2+K) = -\frac{k'^2 \sin\operatorname{am}(a_2 k') \cos\operatorname{am}(a_2 k')}{\Delta\operatorname{am}(a_2 k')} + \frac{\pi a_2}{2KK'} + Z(a_2 k')$$

und setzen für die elliptischen Functionen ihre Werthe ausgedrückt durch x_1 x_2 x_3 ein; dann ist

$$\Phi = \Big\{ M - \sqrt{\frac{-(1+x_3)(1+x_1)}{(1+x_2)(x_2-x_3)}} - k'^2 \sqrt{\frac{(x_1-x_3)(1-x_1)}{(1-x_2)(1-x_3)}} + \frac{\pi(a_1+a_2)}{2KK'} + Z(a_1 k') + Z(a_2 k')$$

Ist jetzt der anziehende Punkt sehr weit von der Ebene entfernt, d. h. c sehr gross, während ϱ_0 nicht sehr gross ist, so dass wir es gegen c^2 vernachlässigen können, dann ist $x_1 = + \frac{c}{\sqrt{c^2+\varrho_0{}^2}} = +1$ und $x_3 = -1$, und wie vorhin gezeigt $M = o$, $a_1 = o$, $a_2 = K'$, $Z(o, K') = o$, $Z(K, k') = o$, folglich

$$\Phi = \frac{\pi}{2K} \cdot K = \frac{\pi}{2}$$

In diesem Falle würde also die Bahn nahezu eine Ellipse sein. Die Grössen 28 aber sind dann

$$C = c \sqrt{\frac{c}{m}}$$

$$C_1 = \frac{-K + 2E + \left(KZ(ak') + \frac{\pi a}{2K'}\right)\sqrt{\frac{2}{x_2}}}{2x_2}$$

$$T = CC_1$$

Ist auch ϱ_1 gegen c noch sehr klein, d. h. bewegt sich der Punkt nur in der Nähe von O, so haben wir $x_2 = 1$. Die Tragectorie ist dann eine Ellipse, und die Zeit, nach welcher P seine Anfangsposition wieder erreicht, ist gegeben durch (cf. 20)

$$4\,T = \frac{4c\sqrt{2c}}{x_1{}^2\sqrt{m(x_1-x_3)}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)^2 \Delta\sigma} = 2\pi \sqrt{\frac{c^3}{m}}$$

da für $x_1 = +1$, $x_2 = +1$, $x_3 = -1$ sich ergiebt

$$n = o, \; k = o, \; \Delta\sigma = 1$$

Ist zum Beispiel der anziehende Punkt der Mittelpunkt der Erde und die Bewegungsebene des angezogenen Punktes tangential an die Erde, so ist $g = \frac{m}{c^2}$, also

$$4\,T = 2\pi \sqrt{\frac{c}{g}}$$

Dies ist der Ausdruck für die doppelte Schwingungsdauer eines sphärischen Pendels von der Länge c, das nur kleine Schwingungen macht. Dies Resultat war zu erwarten, denn wie beim Pendel ein kleiner Theil der Kugel, in welchem die Schwingungen vollzogen werden, als eben betrachtet wird, so können wir umgekehrt die Ebene als Kugel mit sehr weit entferntem Mittelpunkt ansehen, und weil bei der grossen Entfernung des anziehenden Punktes die Attractionskraft für kleine Schwingungen constant = g bleibt so ist die Analogie ersichtlich.

§ 4.

Wir betrachten jetzt den zweiten Fall, dass $v_0^2 = \frac{2m}{\sqrt{c^2 + \rho_0^2}}$ oder $bc = o$ ist. Der Punkt geht mit der Geschwindigkeit v_0 von P_0 aus und läuft bis ins Unendliche, wo er mit der Geschwindigkeit

$$v_\infty = \frac{2m}{\sqrt{c^2 + \infty}} = 0$$

ankömmt. Die Gleichungen II und III werden für diesen Fall

$$t = -c\sqrt{\frac{c}{2m}} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{-(x-x_1)\,x\,(x-x_3)}} + C$$

$$\varphi = -\frac{a}{\sqrt{2cm}} \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{-(x-x_1)x(x-x_3)}} + C_1$$

Wir können also die Substitutionen des vorigen Paragraphen benutzen, wenn wir $x_2 = o$ setzen; dann ist nach 18. $n = -1$ und nach 19

$$t = C \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\cos^4\sigma\,\Delta\sigma}$$

Setzen wir aber in der Reductionsformel

$$\frac{\sin\sigma\cos\sigma\,\Delta\sigma}{\gamma_1(1+n\sin^2\sigma)^{n-1}} = \frac{\gamma_3}{\gamma_1} V_{m-3} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} V_{m-2} + V_{m-1} + \frac{\gamma_0}{\gamma_1} V_m$$

$m = 3$ und $n = -1$, so wird

$$\gamma_0 = o, \quad \gamma_1 = 3k'^2, \quad \gamma_2 = 2(2k^2-1), \quad \gamma_3 = -k^2$$

$$V_{m-3} = \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\Delta\sigma}$$

$$V_{m-2} = \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\cos^2\sigma\Delta\sigma} = \frac{\mathrm{tg}\sigma\Delta\sigma}{k'^2} - \frac{k^2}{k'^2}\int_0^\sigma \frac{\cos^2\sigma\, d\sigma}{\Delta\sigma}$$

$$= \frac{\mathrm{tg}\,\sigma\Delta\sigma}{k'^2} + \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\Delta\sigma} - \frac{1}{k'^2}\int \Delta\sigma\, d\sigma$$

$$V_{m-1} = \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\cos^4\sigma\Delta\sigma} = \frac{\mathrm{tg}\sigma\,\Delta\sigma}{3k'^2\cos^2\sigma} - \frac{2(2k^2-1)}{3k'^4}\,\mathrm{tg}\,\sigma\,\Delta\sigma$$

$$+ \frac{k^2+2(k^2-1)}{3k'^2}\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\Delta\sigma} - \frac{2(2k^2-1)}{3k'^4}\int_0^\sigma \Delta\sigma\, d\sigma$$

Für diesen Fall reducirt sich also das elliptische Integral für die Zeit auf die erste und zweite Gattung. Für $\sigma = \pi/_2$ ist wegen $\mathrm{tg}\,\pi/_2 = \infty$ $T = \infty$. Der Punkt kommt also erst nach unendlich langer Zeit im Unendlichen an. Für $\sigma = -\sigma$ ist $t = -t$, und weil $x = x_1 \cos^2\sigma$, so bleibt x für $\sigma = \pm\sigma$ dasselbe, also auch φ. Die Bewegung geschieht demnach so, dass die Trajectorie zu beiden Seiten des Perihels symmetrisch ist und dass sich P zur Zeit $-t$ genau eben so weit von O befindet, als zur Zeit $+t$.

Den Winkel φ bestimmt die Gleichung

$$\varphi = -2\sqrt{\frac{1-x_1^2}{x_1(x_1-x_3)}}\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1-x^2)\Delta\sigma}$$

wo $\varphi = o$ für $\sigma = \alpha$ d.i. für $x = o$ oder $\varrho = \infty$ oder auch

$$\varphi = 2\sqrt{\frac{1-x_1^2}{1+x_1^2}}\; u + i\Pi(u, ia_1) + i\Pi(u, ia_2 + K)$$

$$= \Phi \frac{u}{K} + \frac{1}{2} i \log \frac{\Theta(u - ia_1)}{\Theta(u + ia_1)} \frac{\Theta(u - ia_2 - K)}{\Theta(u + ia_2 + K)}$$

$$\Phi = \left\{ 2 \sqrt{\frac{1 - x_1^2}{1 + x_1^2}} + iZ(ia_1) + iZ(ia_2 + K) \right\} K$$

$$= \pi/2 \text{ für } x_1 = 1 \quad \text{d. h.:}$$

Befindet sich das Perihelium in einer Entfernung vom Coordinatenanfangspunkt, welche gegen die Entfernung c des anziehenden Punktes von der xy Ebene vernachlässigt werden kann, so ist die y Axe Asymptote der Bahncurve. Ist $\varrho_0 = 0$, so bewegt sich der Punkt auf der y Axe, durchläuft dieselbe mit abnehmender Geschwindigkeit, bis er im Unendlichen mit der Geschwindigkeit o anlangt und dort liegen bleibt.

§ 5.

Es sei endlich $v_0^2 > \frac{2m}{\sqrt{c^2 + \varrho_0^2}}$. Auch in diesem Falle geht der Punkt bis ins Unendliche, wo er mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{v_0^2 - \frac{2m}{\sqrt{c^2 + \varrho_0^2}}}$ ankommt. In der Gleichung $y = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ erhalten $x_1\ x_2\ x_3$ solche Werthe, dass

$$-\infty \ldots x_3 \ldots -1 \ldots x_2 \ldots 0 \ldots x_1 \ldots +1$$

auf einander folgend, während x bei der Integration zwischen den Gränzen o und x_1 bleibt. Mit den Substitutionen des §. 3 erhalten wir dann für die Zeit den Ausdruck:

$$t = C \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1 + n\sin^2\sigma)^2 \Delta\sigma} = C \left[\begin{array}{l} \frac{\sin\sigma\cos\sigma\,\Delta\sigma}{\gamma_0(1 + n\sin^2\sigma)^2} - \frac{x_1}{2\,x_2} \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\Delta\sigma} \\ - \frac{x_1(x_1 - x_3)}{2 x_2 x_3} \int_0^\sigma \Delta\sigma\, d\sigma - \frac{1}{2 x_2 x_3} \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1 + n\sin^2\sigma)\Delta\sigma} \end{array} \right]$$

Der Parameter $n = -\frac{x_1 - x_2}{x_1}$ liegt aber zwischen den Gränzen -1 und $-\infty$, weshalb beim Uebergange auf die Jacobische Normalform $n = -k^2 \sin^2 \mathrm{am}(a + iK')$ zu setzen ist, woraus dann folgt

$$\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1 + n\sin^2\sigma)\Delta\sigma} = u - \frac{\mathrm{tg\,am\,a}}{\Delta\mathrm{am\,a}} \Pi(u, a + iK')$$

es ist aber

$$\Pi\,(u, a + iK') = u\,\frac{\operatorname{tgam} a}{\Delta \operatorname{am} a} = uZ(a) + \frac{1}{2}\log\frac{\sin\operatorname{am}(a-u)\Theta(u-a)}{\sin\operatorname{am}(a+u)\Theta(u+a)}$$

folglich

$$\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)\Delta\sigma} = -u\,\frac{\operatorname{tgam} a}{\Delta \operatorname{am} a}\,Z(a) - \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{tgam} a}{\Delta \operatorname{am} a}\log\frac{\sin\operatorname{am}(a-u)\Theta(u-a)}{\sin\operatorname{am}(a+u)\Theta(u+a)}$$

und mit Benutzung dieses Werthes an Stelle von 23. γ)

$$\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)^2\Delta\sigma} = R(u) - \frac{x_1(x_1-x_2)}{2x_2x_3}\,Z(u) + \frac{1}{4}\,\frac{\operatorname{tg}\operatorname{am} a}{\Delta \operatorname{am} a}\log\frac{\sin\operatorname{am}(a-u)\Theta(u-a)}{\sin\operatorname{am}(a+u)\Theta(u+a)}$$

$$+\frac{\frac{\operatorname{tgam} a}{\Delta \operatorname{am} a}Z(a) - x_1x_3 - x_1(x_1-x_3)\frac{E}{K}}{2x_2x_3}\,.\,u$$

$$= \Phi(u) + C_1\,u$$

$$t = C\Phi(u) + CC_1u$$

Der Punkt langt im Unendlichen an, wenn $\rho = \infty$, d. h. $x = 0$: für $x = 0$ ist aber wegen

$$x = x_1\cos^2\sigma + x_2\sin^2\sigma = 0$$

$$\sin^2\sigma = \frac{x_1}{x_1-x_2} = -\frac{1}{n}$$

und für diesen Werth ist

$$t = C\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)^2}\Delta\sigma = \infty$$

Für den Winkel φ bleiben die Substitutionen des § 3 ebenfalls gültig, denn die dort vorkommenden Parameter $n_1 = -k^2\frac{1+x_3}{1+x_2}$ und $n_2 = -k^2\frac{1-x_3}{1-x_2}$ liegen zwischen denselben Gränzen, x_2 mag positiv der negativ sein. Die Winkel sind auch hier gezählt vom Aphelium, das aber diesmal im Unendlichen liegt, d. h. es ist $\varphi = 0$ für $\rho = \infty$ oder $x = 0$. $x = 0$ entspricht aber einem Werthe σ_1 von σ, der bestimmt wird durch die Gleichung

$$0 = x_3 + \frac{x_2-x_3}{\Delta^2\sigma}$$

Für die Gleichung 30 also haben wir hier:

$$\varphi = -2\sqrt{\frac{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}{(x_1+x_2)(x_1-x_3)}}\int_{\sigma_1}^{\sigma}\frac{d\sigma}{(1-x^2)\Delta\sigma}$$

Addiren wir die Constante

$$\varphi_1 = -2 \sqrt{\frac{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}{(x_1+x_2)(x_1-x_3)}} \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1-x^2)\Delta\sigma}$$

so ist

$$\varphi+\varphi_1 = -2 \sqrt{\frac{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}{(x_1+x_2)(x_1-x_3)}} \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1-x^2)\Delta\sigma}$$

$$= M\, u + i\Pi(u, ia_1) + i\Pi(u, ia_2 + K)$$

$$= \left\{M + iZ(ia_1) + iZ(ia_2 + K)\right\} u + \frac{1}{2}\, i \log \frac{\Theta(u-ia_1)\,\Theta(u-ia_2-K)}{\Theta(u+ia_1)\,\Theta(u+ia_2+K)}$$

$$= \Phi\, \frac{u}{K} + \frac{1}{2}\, i \log \frac{\Theta(u-ia_1)\Theta(u-ia_2-K)}{\Theta(u+ia_1)\,\Theta(u+ia_2+K)}$$

$$\Phi = \frac{\pi}{2} \text{ für } x_1 = 1.$$

φ_1 kann auch geschrieben werden, wenn

$$\int_0^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{\Delta\sigma} = -u_1$$

gesetzt wird

$$\varphi_1 = Mu_1 + i\Pi(u_1, ia_1) + i\Pi(u_1, ia_2 + K)$$

und aus den Betrachtungen des § 3 ergiebt sich dann, dass $\varphi_1 = 0$ wenn $x_1 = 1$ ist. Also auch in diesem Falle überstreicht, wenn zu Anfange der Bewegung der angezogene Punkt eine solche Entfernung vom Coordinatenanfangspunkt hat, dass sie gegen die Entfernung des anziehenden Punktes von der xy Ebene vernachlässigt werden kann, der Radius Vector einen rechten Winkel, während P sich vom Perihelium bis ins Unendliche bewegt, so dass die Bahncurve der vorigen ganz ähnlich ist

Beiträge
zur
induktiven Behandlung
der
Elementar-Mechanik.

Programm

der

vierkursigen Kgl. Realschule Neuburg a. D.

für das Schuljahr 1887/88

von

Wilhelm Neu,
K. Rektor.

Neuburg a. D.
Griessmayersche Buchdruckerei.

In der vorliegenden Abhandlung wird zunächst eine für den ersten Unterricht in der Mechanik an Mittelschulen geeignete Einleitung in die Lehre von den sogenannten einfachen Maschinen gegeben, welche sich unmittelbar an die Besprechung der Schwere anschliesst. Sodann aber wird der Versuch gemacht, die Fundamentalgesetze der Statik, welche dieser Lehre zu grunde liegen, insbesondere das Hebel- und das Parallelogramm-Prinzip, auf induktivem Wege zu entwickeln, also durch Versuche „herauszuexperimentieren."

Die Anwendung dieser Gesetze auf die speziellen Formen der einfachen Maschinen ist nur im allgemeinen besprochen.

Die ganze Darstellung des Gegenstandes, wie sie hier gegeben wird, ist in ihren Grundzügen infolge der Verwendung der vom Verfasser konstruierten Apparate*) im Unterrichte selbst entstanden. Sie geht stets aus von der Frage, welche Grösse die unter gegebenen Bedingungen (bei vorgeschriebenen Richtungen und vorgeschriebener Lage der Angriffspunkte) wirkenden Kräfte haben müssen, damit sie eine gegebene Last im Gleichgewichte halten, und sucht durch Vergleichung der Resultate, welche sich auf experimentellem Wege bei veränderten Grundbedingungen ergeben, das bestehende Gesetz herauszulesen.

Eine Hauptrolle spielen demgemäss die grundlegenden Versuche; dieselben erscheinen hier unter anderm in 2 Formen, in welchen sie kurz als „Faustversuche" und als „Wandtafelversuche" bezeichnet werden mögen.

Die Faustversuche — nach Analogie der „Faustzeichnung" — werden frei über dem Tische ohne besondere Stative etc. so ausgeführt, dass die Kräfte durch Ziehen mit den Händen an passend angebrachten Schnüren ausgeübt werden. Versuche in dieser Form haben vor allem

*) „Neue Apparate zu messenden Versuchen über das Parallelogramm der Kräfte und die sogenannten einfachen Maschinen." Zeitschrift zur Förderung des physikalischen Unterrichts, Lisser und Benecke, Berlin 1885.

den Zweck, eine klare und richtige Vorstellung von der Art der Wirkung der Kräfte zu erwecken, sodann aber auch die Möglichkeit der zu untersuchenden Aufgabe darzuthun und zur Auffindung der Determination derselben zu verhelfen.

Das Wesentliche der Wandtafelversuche besteht darin, dass zunächst die gegenseitige Lage der Angriffspunkte und die Richtungen der Kräfte — also nur die gegebenen Elemente — auf der vertikalen Wandtafel vorgezeichnet werden, und dass die Ausführung des Versuches dann unmittelbar vor der Zeichnung auf der Wandtafel geschieht. Die Kräfte werden dabei im allgemeinen ebenfalls durch Ziehen mit der Hand ausgeübt, ihre Grösse wird auf den vorgezeichneten Richtungen nach den an geeigneten Dynamometern beobachteten Verlängerungen nachträglich aufgetragen, so dass der Versuch selbst und die zeichnerische Darstellung desselben für den Beschauer sich decken, und dass der Versuch gewissermassen eine Spur hinterlässt, durch welche alle gleichgewichtbestimmenden Umstände dauernd fixiert erscheinen. Versuche dieser Art führen z. B. in ungezwungener Weise zur Induktion des Kräfteparallelogramms.

Nur nebenbei werden im nachfolgenden bestätigende Versuche, welche sonst im Unterricht naturgemäss die grösste Rolle spielen, besprochen; solche Versuche, welche hier den Nachweis zu liefern haben, dass die auf grund schon bekannter Gesetze vorausberechneten oder konstruierten Kräfte etc. wirklich den Gleichgewichtszustand herstellen, haben für den Unterricht eine ebenso grosse Bedeutung wie die grundlegenden. Eine vollständige Durchführung liegt jedoch ausserhalb des Zieles dieser Arbeit. Bezüglich der Ausführung solcher bestätigenden Versuche für das Gebiet der elementaren Mechanik wird auf die oben erwähnte frühere Veröffentlichung des Verfassers verwiesen, in welcher auch die Lösung hierher gehöriger Aufgaben durch das Experiment als Ersatz für die Lösung durch Konstruktion oder Rechnung berücksichtigt ist.

Von manchen in neuerer Zeit von anderer Seite beschriebenen Hilfsvorrichtungen zur Demonstration mechanischer Gesetze wurde, soweit es thunlich war, im nachfolgenden Gebrauch gemacht: so wird man in der in Fig. 6 dargestellten Vorrichtung unschwer das Meldesche Hebelbrett,*) in Fig. 13 den Apparat von Handl „zum Nachweis der

---

*) Zeitschrift zur Förderung des physik. Unterrichts 1886 Seite 50.

Sätze über das Drehungsmoment" *) erkennen; die in Nr. 14 kurz gegebene Behandlung der Aufgabe, eine Last auf drei nicht in einer Ebene liegende parallele Kräfte zu verteilen, wurde durch den Aufsatz von Pietzker „über Druckverteilung" **) veranlasst.

Es wurde im allgemeinen unterlassen, bei Beschreibung der verwendeten Hilfsvorrichtungen Masse anzugeben, da dieselben nur eine nebensächliche Rolle spielen und sich den jeweiligen Bedürfnissen anpassen müssen. Bei der Wahl der Dynamometer wird man über die in Nr. 4 angegebenen Dimensionen nicht hinausgehen können, ohne dieses wesentlichste Hilfsmittel der beschriebenen Versuche unhandlich zu machen. Bei passender Wahl des als Last dienenden Gewichtes hat man es dann immerhin mit kraftmessenden Verlängerungen von 20 bis 30 cm zu thun, welche zur Demonstration auch vor einer grösseren Schülerzahl ausreichend erscheinen dürften.***)

Schliesslich sei bemerkt, dass die nachfolgende Abhandlung — wie schon durch den Titel angedeutet werden wollte — in keiner Beziehung Anspruch auf Vollständigkeit macht; unter anderm wurde manche naheliegende Erweiterung oder Verallgemeinerung ganz übergangen oder nur kurz angedeutet.

---

*) Zeitschrift zur Förderung des physik. Unterrichts 1885 Seite 208.

**) Ebendaselbst 1885 Seite 84.

***) Es sei hier beigefügt, dass das physikalisch-technische Institut von Lisser und Benecke in Berlin sich bereit erklärt hat, auch die Anfertigung der neuen Dynamometer sowie der sonstigen Hilfsvorrichtungen zu übernehmen.

I.

Einleitung in die Lehre von den einfachen Maschinen.

1. Begriff der mechanischen Kraft. Die Einwirkung der Schwere äussert sich bei einem aufgehängten oder unterstützten Körper dadurch, dass derselbe an der Aufhängung einen Zug, bezw. gegen die Unterstützung einen Druck ausübt. Ein aufgehängter oder unterstützter Körper äussert also Wirkungen, wie sie von lebenden Wesen durch Muskelanstrengung hervorgebracht werden.

Wenn wir durch Anstrengung unserer Muskeln einen Druck oder Zug ausüben, so sagen wir nach der Ausdrucksweise des gewöhnlichen Lebens, dass wir dabei eine gewisse Kraft aufwenden. Mit dem Worte Kraft bezeichnen wir sodann alles, was Zug oder Druck ausübt, bezw. auszuüben im stande ist. Wir reden daher von der Kraft der Menschen und Tiere, von der Kraft des fliessenden Wassers, des Windes, eines bewegten Körpers überhaupt.

2. Grösse einer Kraft. Unter der Grösse einer Kraft versteht man die Grösse des von ihr ausgeübten Zuges oder Druckes.

Die Grösse des von einer beliebigen Kraft ausgeübten Zuges (oder Druckes) kann ausgedrückt werden durch eine Anzahl von Kilogrammen, nämlich durch Gewicht desjenigen Körpers, welcher unter dem Einflusse der Schwere einen gleich grossen Zug (Druck) hervorbringt wie jene Kraft.

Wenn also die Rede ist von einer Kraft von a kg, welche in einem Punkte A eines Körpers angreift und in vorgeschriebener Richtung wirkt, so hat man sich vorzustellen, dass durch dieselbe eine in dem Punkte A angebrachte Schnur in der betreffenden Richtung gerade so stark gespannt würde, wie durch ein angehängtes Gewichtsstück von a kg.

3. Messung der Kräfte. Um die Grösse eines an einer Schnur ausgeübten Zuges (bezw. die Grösse eines gegen eine Stütze ausgeübten Druckes) zu messen, schaltet man in die Schnur (bezw. die Stütze) ein sogenanntes Dynamometer — Kraftmesser — ein.

Solche Dynamometer können hergestellt werden aus schraubenförmig gewundenen, harten Drähten, sogenannten Spiralfedern. Diese erfahren unter dem Einflusse eines Zuges eine mit der Grösse des Zuges wachsende Verlängerung (bezw. unter dem Einflusse eines Druckes eine mit der Grösse desselben wachsende Verkürzung).

Der Kraftmessung mittels eines Schraubendrahtes liegt also der Gedanke zugrunde: Bringt eine beliebige Kraft an einem solchen Drahte dieselbe Verlängerung hervor wie ein angehängtes Gewicht von a kg, so ist die Grösse jener Kraft = a kg.

Ein solcher Schraubendraht hat nun Eigenschaften, vermöge deren die Ausführung der Kraftmessung sich sehr einfach gestaltet.

a) Belastet man einen aufgehängten Schraubendraht der Reihe nach mit verschiedenen Gewichten, so erkennt man, dass jeder Belastung eine bestimmte Verlängerung, und dass derselben Belastung stets dieselbe Verlängerung entspricht. Hieraus geht hervor, dass man im stande ist, zu einem Schraubendrahte eine Skala herzustellen, welche zu jeder beobachteten Verlängerung die Grösse der Belastung, also auch die Grösse eines anderen die Verlängerung bewirkenden Zuges direkt angibt.

b) Belastet man einen und denselben Schraubendraht der Reihe nach mit Gewichten, die sich verhalten wie 1 : 2 : 3 u. s. w., so findet man, dass auch die zugehörigen Verlängerungen sich wie 1 : 2 : 3 u. s. w. verhalten. Man erkennt also, dass die Verlängerungen den Belastungen proportional sind, und kann somit, wenn die irgend einer Belastung entsprechende Verlängerung bekannt ist, zu jeder beliebigen Belastung die zugehörige Verlängerung und umgekehrt auch die zu einer beobachteten Verlängerung gehörige Belastung, d. h. die Grösse des die Verlängerung bewirkenden Zuges, durch Rechnung bestimmen. Eine besondere Skala ist daher überflüssig, es genügt jeder beliebige in gleiche Teile geteilte Masstab.

c) Die Verlängerung, welche ein bestimmter Zug an einem Schraubendraht hervorbringt, ist von verschiedenen Umständen, nämlich von dem Stoffe (z. B. ob Messing oder Stahl), von der Härte und Dicke des ursprünglich gestreckten Drahtes, sowie von der Weite der Windungen abhängig. Belastet man Schraubendrähte, welche in bezug auf diese Umstände übereinstimmen, und deren Längen sich verhalten wie 1 : 2 : 3 u. s. w., gleich stark, so findet man, dass die derselben Belastung entsprechenden Verlängerungen sich ebenfalls wie 1 : 2 : 3 u. s. w. verhalten, dass also bei einem bestimmten Drahtmateriale die durch eine bestimmte Zugkraft bewirkte Verlängerung der ursprünglichen Länge des Schraubendrahtes proportional ist. Hiernach ist man im stande, die Schraubendrähte so auszuwählen, dass einer Belastung, welche gleich ist der Gewichts-Einheit, eine Verlängerung entspricht, welche der Längen-Einheit gleich ist, also z. B. einer Belastung von 1 g eine Verlängerung von 1 mm. Dann fällt jede Umrechnung weg, die Masszahl der beobachteten Verlängerung ist zugleich die Masszahl der gesuchten Kraft.

In seiner einfachsten Form besteht also ein Dynamometer aus einem passend gewählten Schraubendraht — Messdraht — und aus einem in cm und mm geteilten Masstab.

4. Beschreibung eines einfachen Dynamometers. (Fig. 1.) Bei den im nachfolgenden verwendeten Dynamometern sind die Schraubendrähte aus einem 0,37 mm dicken Messingdrahte in Windungen von 2,5 mm äusserem Durchmesser hergestellt. Bei einer ursprünglichen Länge von circa 40 cm erfahren dieselben für je 1 g eine Verlängerung von 1 mm und können bis zu 300 g in Anspruch genommen werden Hat man also an einem solchen Draht eine Verlängerung von a mm beobachtet, so **betrug die Zugkraft a g.**

Um die Verlängerung jederzeit als solche zu erkennen, ist der Messdraht eines Dynamometers in ein steifes Messingröhrchen A von circa 36 cm Länge und solcher Weite eingelegt, dass der Draht gerade bequem darin Platz hat. Auf die Enden von A sind federnde Hülsen B und C von circa 10 cm Länge geschoben. Ein bei D durchgesteckter und zu einem Bügel F umgebogener Stift geht durch eine Öse des Messdrahtes und dient so zu dessen Aufhängung in der Röhre. Die verschiebbaren Hülsen B und C ermöglichen es, vor Anbringung der zu messenden Zugkraft das freie Ende des Messdrahtes so einzustellen, dass es mit dem Ende der Hülse C gerade zusammenfällt: Das nach Anbringung der Zugkraft aus der Röhre hervortretende Stück des Messdrahtes stellt dann die zu messende Verlängerung vor.

Bei Wandtafelversuchen werden auf die Hülsen B und C zylindrische, längs der Achse durchbohrte Holzstücke G und H (am einfachsten kurze, zylindrische Korke) aufgeschoben. Durch Anlegen dieser Holzstücke an die Tafel erhält man für die Hand die nötige Stütze, um das Dynamometer in vorgeschriebener Richtung ruhig zu halten, beziehungsweise zu verschieben. Ausserdem liegt dann der Messdraht stets in derselben zur Wandtafel parallelen, also ebenfalls vertikalen Ebene.

Bei Verwendung der auf Seite 3 erwähnten Apparate werden die Dynamometer in der durch J K Fig. 1 angedeuteten Weise an Schiebern befestigt, welche längs der Säulen und Schienen jener Apparate verstellbar sind. Um das Dynamometer an einem solchen Träger anzubringen, hat man nur die Stellhülse C zu entfernen, die Röhre A durch die geschlitzte und entsprechend stark federnde kurze Röhre K zu schieben und schliesslich die Stellhülse C wieder anzustecken.

F D G B A K J A C H E Z

Fig. 1.

5. Verschiedene Verwendung des Dynamometers.

a) Zur Bestimmung des Gewichtes eines Körpers: Das Dynamometer wird am Bügel F aufgehängt oder in vertikaler Stellung an der Röhre A festgeklemmt (mit der Hand gehalten). Beträgt die

nach Anbringung des Körpers an der Öse E des Messdrahtes beobachtete Verlängerung n mm, so ist das Gewicht des Körpers n g.

Die Ausführung kann auch so geschehen, dass man das Dynamometer in verkehrter Stellung an der Öse E des Messdrahtes festhängt und den Körper am Bügel F anbringt; an dem bei E aufgehängten Dynamometer muss natürlich wie immer zunächst die Stellhülse C auf das Ende des Messdrahtes eingestellt werden.

b) Zur Ausübung eines Zuges von vorgeschriebener Grösse und Richtung: Soll an einem Körper ein Zug von bestimmter Richtung ausgeübt werden, so wird man an dem betreffenden Punkte des Körpers eine Schnur befestigen und diese in der vorgeschriebenen Richtung durch Ziehen mit der Hand spannen; soll der Zug a g betragen, so verwendet man statt der Schnur ein Dynamometer und spannt dasselbe durch Ziehen mit der Hand auf a mm Verlängerung; der Masstab wird dabei gleichzeitig mit dem Dynamometer in der Hand gehalten.

c) Zur Messung des von einer Kraft bei Erzielung einer vorgeschriebenen Wirkung ausgeübten Zuges: Ein auf dem Tisch liegender mit Haken und Schnur versehener Klotz werde durch Ziehen mit der Hand an der Schnur auf dem Tische fortbewegt; um die Grösse des dabei ausgeübten Zuges zu bestimmen, braucht man nur statt der Schnur ein Dynamometer zu verwenden. Zeigt dasselbe in einem bestimmten Momente eine Verlängerung von a mm, so beträgt der gerade ausgeübte Zug a g.

6. Einfachste Wirkung einer Kraft: Die Arbeit. Die für die Untersuchung einfachste Wirkung einer Kraft besteht darin, dass der Körper, auf welchen sie ziehend oder drückend einwirkt, in Bewegung gesetzt wird.

Bringt eine Kraft Bewegung hervor, so leistet sie Arbeit. Die geleistete Arbeit ist um so grösser, je grösser der von der Kraft an dem bewegten Körper ausgeübte Zug (Druck) und je länger der Weg ist, auf welchem sie diesen Zug ausübt.

Es ist naheliegend, dass man diejenige Arbeit, welche eine Kraft leistet, wenn sie einen Zug von 1 kg auf eine Weglänge von 1 m ausübt, als Arbeitseinheit (Meterkilogramm — mkg) wählt. Hat also eine Kraft einen Zug von p kg auf eine Weglänge von s m ausgeübt, so ist die geleistete Arbeit 1mkg . p . s = (ps) mkg.

Bei Beurteilung der Leistungsfähigkeit einer Kraft muss natürlich auch die zur Leistung der Arbeit erforderliche Zeit berücksichtigt werden. Waren im obigen Beispiele t Sekunden erforderlich, so ist die per Sekunde geleistete Arbeit $= \frac{ps}{t}$ mkg. Diese sekundliche Arbeit dient als Mass für die Leistungsfähigkeit der Kraft und heisst Effekt der Kraft.

Leistet eine Kraft in der Sekunde eine Arbeit von 75 mkg, so sagt man, ihr Effekt betrage 1 Pferdekraft. Der Effekt einer Kraft, welche in t Sekunden eine Arbeit von a mkg verrichtet, beträgt also $\frac{a}{t \cdot 75}$ Pferdekräfte.

7. Einfachste Form der Arbeit: Die Hebung einer Last; Grösse und Richtung der hiezu an und für sich erforderlichen Kraft. Ein an einer Schnur aufgehängtes Gewichtsstück kann durch Muskelkraft — durch Ziehen mit der Hand — so gehalten werden, dass jeder Punkt der Zusammenstellung: Hand — Schnur — Gewichtsstück in Ruhe bleibt. Auf einen beliebigen, etwa durch einen Knoten markierten Punkt A der Schnur wirken dabei zwei Kräfte, nämlich:
vertikal abwärts der von dem Gewichtsstücke ausgeübte Zug;
vertikal aufwärts der durch Muskelkraft mit der Hand ausgeübte Zug.

Beide sind bestrebt, den Punkt A in ihrer Richtung fortzubewegen; ihr gleichzeitiges Wirken hat jedoch zur Folge, dass er an Ort bleibt. Man sagt in diesem Falle: Die beiden Kräfte halten sich Gleichgewicht. Die beiden sich Gleichgewicht haltenden Kräfte sind dabei offenbar einander gleich. Verwendet man nämlich zur Ausübung des Zuges mit der Hand ein Dynamometer, so findet man, dass das Gewichtsstück sich immer erst dann vom Tische entfernt und frei hängt, wenn die Verlängerung des Messdrahtes genau so gross geworden ist, wie diejenige, welche der nämliche Messdraht zeigt, wenn er mit dem gleichen Gewichtsstücke belastet wird. Der mit der Hand ausgeübte Zug ist also genau so gross wie das Gewicht des Körpers, beide werden durch die nämliche Verlängerung des Messdrahtes gemessen.

Soll hiernach eine Last — ein schwerer Körper — frei gehalten werden, so muss dem von demselben ausgeübten Zuge (oder Drucke) Gleichgewicht gehalten werden; die hiezu erforderliche Kraft muss *an und für sich* vertikal aufwärts gerichtet und der Last gleich sein.

Ruht eine Last auf einer festen Unterlage, oder ist sie mittels einer Schnur an einem festen Haken aufgehängt, so besteht die zur Haltung der Last nötige Kraft in dem Widerstande der Stütze gegen Zusammenpressung, bezw. in dem Widerstande der Schnur und des Hakens gegen Dehnung. In solchen Fällen ist die haltende Kraft nicht arbeitsfähig, weil ein wesentliches Moment der Arbeit, die Fortbewegung, fehlt.

Soll eine Last um h m gehoben werden, so muss offenbar das den Zug (oder Druck) Ausübende — kurz die Kraft — sich fortbewegen, und zwar an und für sich um h m vertikal aufwärts.

Hebt man ein Gewichtsstück unter Benützung eines Dynamometers durch Ziehen mit der Hand gleichmässig und langsam auf, so findet man, dass die Verlängerung konstant gleich derjenigen bleibt, welche bei

ruhiger Haltung der Last beobachtet wird. Bei Hebung einer Last von p kg muss sonach die nötige Kraft auf dem ganzen Wege von h m einen Zug (oder Druck) von p kg ausüben, also eine Arbeit von (p h) mkg leisten.

8. Möglichkeit der Hebung einer Last durch eine kleinere Kraft; Wesen der einfachen Maschinen. Die Hebung einer Last erfordert nach dem Vorausgehenden vor allem eine der Last gleiche Kraft. In der Praxis aber ergibt sich das Bedürfnis, eine grosse Last zu heben durch eine kleine Kraft. Es sei z B. eine Last von 6 kg zu heben auf eine Höhe von 5 m, was an und für sich eine Kraft von 6 kg auf eine Weglänge von 5 m, also eine Arbeitsleistung von 30 mkg erfordert. Diese Arbeit kann ohne besondere Vorrichtung durch eine Kraft von nur 2 kg geleistet werden, wenn es zulässig ist, die Last in 3 Partien von je 2 kg zu teilen und diese einzeln zu heben.

Die Arbeitsleistung ist dann dargestellt durch:
(2 . 5) mkg + (2 . 5) mkg + (2 . 5) mkg = (2 . 15) mkg. Dieses Resultat entspricht vollständig der Thatsache, dass der Gesamtweg der Kraft von 2 kg nach Vollendung der Arbeit 15 m beträgt. Die eigentlich geforderte Arbeit von (6 . 5) mkg ist in Wirklichkeit ausgeführt in einer anderen Form, welche durch das obige Resultat (2 . 15 mkg) dargestellt ist.

Die wirkliche Teilung der Last in der angegebenen Weise ist aber in den seltensten Fällen zulässig. Um das gleiche Resultat ohne wirkliche Teilung der Last zu erzielen, bedarf man besonderer Hilfsvorrichtungen, die man einfache Maschinen nennt. Das Wesentliche der einfachen Maschine würde im vorliegenden Falle darin bestehen, dass die arbeitsfähige Kraft von 2 kg nur $^1/_3$ der Last zu heben hätte, während $^2/_3$ derselben von nicht arbeitsfähigen Widerständen (festen Unterstützungen und Aufhängungen) zu tragen wären. Der Weg der arbeitsfähigen Kraft würde auch in diesem Falle 15 m betragen.

An Stelle der wirklichen Teilung der Last in mehrere nach einander zu hebende Stücke tritt also bei Anwendung einer einfachen Maschine eine Verteilung der Last auf zwei oder mehrere gleichzeitig wirkende Kräfte, d. h. die Ersetzung der zur Hebung der Last an und für sich erforderlichen einen Kraft durch zwei oder mehrere gleichzeitig wirkende Kräfte, als welche teilweise die nicht arbeitsfähigen Widerstände fester Hilfsvorrichtungen dienen.

Die Hebung einer Last erfordert ferner an und für sich eine vertikal aufwärts gerichtete Kraft. Bei den meisten der uns zur Verfügung stehenden arbeitsfähigen Kräfte ist jedoch diese Zugrichtung nicht die natürliche, viele können in derselben überhaupt nicht wirken.

Die vollkommenen einfachen Maschinen nun gestatten zugleich, bei Hebung einer Last die Kräfte in ihrer natürlichen, von der Vertikalen

abweichenden Zugrichtung wirken zu lassen. Es kann von vornherein für selbstverständlich gelten, dass die Abweichung der arbeitsfähigen Kraft von der Vertikalen nur geschehen kann auf Kosten ihrer eigenen Grösse, bezw. auf Kosten einer stärkeren Inanspruchnahme der nicht arbeitsfähigen Widerstände.

9. Verschiedene Arten der Verteilung einer Last L auf zwei Kräfte K_1 und K_2, bezw. der Ersetzung der zur Hebung erforderlichen einen Kraft R durch zwei Kräfte K_1 und K_2. Nach dem Vorausgehenden sind die einfachen Maschinen Vorrichtungen, welche es ermöglichen, Lasten durch Kräfte von geringerer Grösse und von beliebiger Richtung (statt vertikal aufwärts) zu heben, also „leichter" und „bequemer."

Der erstere Zweck wird, wie schon angedeutet, in allen Fällen dadurch erreicht, dass bei Anwendung der betreffenden Maschine die Last sich verteilt auf zwei (oder mehrere) Kräfte, d. h. dass die Wirkung der zur Hebung der Last an und für sich erforderlichen einen Kraft R, welche der Last L gleich und vertikal aufwärts gerichtet sein muss, ersetzt wird durch die gleichzeitige Wirkung zweier Kräfte K_1 und K_2, von denen die eine durch den nicht arbeitsfähigen Widerstand einer starren Hilfsvorrichtung ausgeübt wird.

Um auszudrücken, dass die zwei Kräfte K_1 und K_2 durch ihr Zusammenwirken die eine Kraft R ersetzen, nennt man jene die Komponenten von R und R selbst die Resultante von K_1 und K_2.

Die Verteilung einer Last L auf zwei Kräfte K_1 und K_2, oder die Ersetzung der einen Kraft R durch zwei Komponenten K_1 und K_2, ist zunächst auf vier verschiedene Arten denkbar; es können nämlich K_1 und K_2

I. bei gleicher Richtung (wie R, also vertikal aufwärts)
   a) in demselben Punkte,
   b) in verschiedenen Punkten;
II. bei verschiedenen (von der Vertikalen abweichenden) Richtungen
   a) in demselben Punkte,
   b) in verschiedenen Punkten

angreifen.

Wir suchen im folgenden die allgemeinen Beziehungen, welche zwischen K_1 K_2 und R jedesmal bestehen müssen, wenn die Last L durch K_1 und K_2 im Gleichgewicht gehalten, also R durch K_1 und K_2 ersetzt werden soll.

Die Behandlung des unter II b aufgeführten Falles geht über das Unterrichtspensum, welches den Gegenstand dieser Arbeit bildet, hinaus und ist daher nicht aufgenommen. Derselbe lässt sich auf die einfacheren Fälle zurückführen und bildet auf einer höheren Unterrichtsstufe eine Aufgabe, deren Behandlung besonders geeignet ist, den Wert und die Einfachheit der deduktiven Methode zu zeigen.

10. Erste Art der Verteilung einer Last: Die Ersatzkräfte K_1 und K_2 haben mit R gemeinsamen Angriffspunkt und gemeinsame Richtung. Das die Last darstellende Gewichtsstück von a g (200—300 g) werde an einer kurzen, am Ende mit einem Metallringe von ca. 2 cm Durchmesser versehenen Schnur — Lastschnur — befestigt und mittels dieses Ringes an einem festen Stifte aufgehängt. Bringt man an dem Ringe eine zweite Schnur — Kraftschnur — an, und sucht man durch Ziehen an derselben den Ring mit der Last vom Stifte abzuheben, so erkennt man, dass dieses Abheben nur geschehen kann, wenn vertikal aufwärts gezogen wird.

Fig. 2

Ersetzt man die Kraftschnur durch ein Dynamometer, so zeigt sich, dass das Abheben erst dann eintritt, wenn die Verlängerung des Messdrahtes = a mm geworden ist, also **wenn der mit der Hand ausgeübte Zug R = L ist.**

Bringt man zwei Dynamometer an (Fig. 2) und zieht an beiden zugleich vertikal aufwärts, so erkennt man, dass beim Abheben die Verlängerungen der beiden Messdrähte sehr verschiedene Grössen haben können, dass jedoch stets die Summe dieser Verlängerungen = a mm beträgt.

Die eine Kraft R kann also auf sehr verschiedene Arten durch zwei in demselben Punkte angreifende und vertikal aufwärts gerichtete Kräfte K_1 und K_2 ersetzt werden; diese haben **nur die eine Bedingung zu erfüllen**

$$K_1 + K_2 = L \ (= R).$$

Umgekehrt kann man sagen: Haben zwei Kräfte K_1 und K_2 gemeinsamen Angriffspunkt und gleiche Richtung, so können sie ersetzt werden durch eine einzige Kraft $R = K_1 + K_2$ von derselben Richtung.

Bringt man am Ringe zunächst eine Schnur an und befestigt diese an einem, vertikal über dem ersten befindlichen, zweiten Stifte so, dass Ring und Last frei hängen, so wird die Last getragen durch den nicht arbeitsfähigen Widerstand dieses oberen Stiftes. Befestigt man sodann am Ringe noch ein Dynamometer und zieht vertikal aufwärts, so erscheint die Last teils durch den Widerstand des oberen Stiftes, teils durch den mit der Hand ausgeübten Zug getragen.

Steigert man sodann diesen arbeitsfähigen Zug, so hat dies zunächst nur zur Folge, dass die Schnur weniger gespannt, also der Widerstand des oberen Stiftes weniger in Anspruch genommen wird; eine wirkliche Hebung der Last tritt jedesmal erst in dem Momente ein, wenn der mit der Hand ausgeübte Zug so gross geworden ist, dass das Dynamometer eine Verlängerung von a mm zeigt, also wenn die **arbeitsfähige Kraft gleich der Last ist.**

Man erkennt daher, dass die erste Art der Verteilung einer Last auf zwei Kräfte nicht dazu führen kann, die Last (durch teilweise Über-

tragung derselben auf einen nicht arbeitsfähigen Widerstand) mittels einer kleineren arbeitsfähigen Kraft zu heben, dass also eine einfache Maschine nicht ausführbar ist, bei welcher die Last sich auf einen vertikal aufwärts gerichteten Widerstand und eine in demselben Punkte angreifende vertikal aufwärts gerichtete arbeitsfähige Kraft verteilt.

II.

Das Hebelprinzip und die Hebelmaschinen.

11. Zweite Art der Verteilung einer Last: die Kräfte K_1 und K_2 haben mit R gleiche Richtung, aber verschiedene Angriffspunkte.*) Die einfachste Ausführung dieser Verteilung der Last erhält man, wenn eine feste Stange über zwei feste Stützen A und B gelegt und die Last in einem beliebigen zwischen A und B liegenden Punkte C angehängt wird (Fig. 3): die Last wird getragen durch die Widerstände der Stützen A und B.

Zur bequemen Ausführung der Versuche (Fig. 4) werde die Stange in den (in der Nähe ihrer Enden liegenden) Punkten A und B von oben nach unten durchbohrt und an kurzen durch die Durchbohrungen gezogenen Schnüren aufgehängt. Die Schnüre sind an den Enden mit Metallringen versehen, welche über die in passender Entfernung (an einem Stativ* oder an der Wandtafel) angebrachten Tragstifte gehängt werden. Die Last wird angebracht mit Hilfe eines Hakens, dessen abwärts gerichtete Spitze in einem beliebigen Punkte C auf die obere Fläche der Tragstange aufgesetzt wird.

Bringt man an den Ringen Kraftschnüre an und sucht man durch Ziehen an denselben die Ringe mit der Stange und der Last von den Stiften abzuheben, so erkennt man, dass dies ohne weiteres möglich ist, wenn an beiden Schnüren vertikal aufwärts gezogen wird.

A C B L Fig. 3.

K₁ K₂ A C B L Fig. 4.

K₂ K₁ C B A L Fig. 5

---

*) Zur bequemen Ausführung der hiehergehörigen Versuche dient Stativ A der auf Seite 3 erwähnten Apparate.

Als Angriffspunkte der durch Ziehen mit den Händen ausgeübten Kräfte K_1 und K_2 haben dabei die Punkte A und B zu gelten, in welchen die Schnüre aus der oberen Fläche der Stange austreten; als Angriffspunkt der Last erscheint der Punkt C, in welchem sich die Spitze des Lasthakens auf die Stange stützt.

Wir untersuchen zunächst den einfachsten Fall, dass die Punkte A, B und C in einer Geraden liegen, wählen also die Stange so, dass ihre obere Fläche eben ist.

Bringt man an dem einen Ringe (etwa dem bei B) ein Dynamometer an und zieht vertikal aufwärts, bis dieser Ring gerade abgehoben wird, so erkennt man, dass zu einer bestimmten Lage von C zwischen A und B ein ganz bestimmter Wert von K_2 gehört, und dass K_2 um so grösser wird, je näher C bei B gewählt wird; fällt schliesslich C mit B zusammen, so wird $K_2 = L$.

Einstweilen ist also festgestellt, dass zu einer bestimmten Lage von C bestimmte Werte von K_2 und K_1 gehören, dass also K_1 und K_2 abhängig sind von dem Verhältnisse der Strecken C A und C B.

Bestimmt man nun mit Hilfe zweier Dynamometer für verschiedene Lagen von C die Kräfte K_1 und K_2, welche nötig sind, um die Ringe von den Stiften abzuheben, so findet man vor allem aus den Verlängerungen der Messdrähte, dass stets

$$K_1 + K_2 = L \text{ ist.}$$

Wählt man ferner C so, dass $CA : CB = p : q$, so findet man durch Abmessung der Kräfte

$$K_1 : K_2 = q : p \text{ , also}$$

$$K_1 : K_2 = CB : CA.$$

Die Bedingungen, welche K_1 und K_2 zu erfüllen haben, damit L durch sie im Gleichgewicht gehalten wird, sind also

$$1)\ K_1 + K_2 = L \text{ und}$$

$$2)\ K_1 : K_2 = CB : CA.$$

Beide lassen sich vereinigen in:

$$K_1 : K_2 : L = CB : CA : AB.$$

Selbstverständlich haben K_1 und K_2 zunächst das Gewicht der Stange zu tragen; dasselbe kommt jedoch bei der Abmessung nicht in Betracht, wenn die Stellhülsen der Dynamometer erst nach Anhängung der Stange eingestellt werden.

Macht man die Versuche bei schiefer Stellung der Stange (Fig. 5), indem man die Tragstifte nicht in gleicher Höhe anbringt, so dass also die durch A, B und C gehende Gerade mit der Horizontalen irgend einen Winkel bildet, so findet man, dass die Grösse dieses Winkels auf die Grösse von K_1 und K_2 keinen Einfluss hat, dass also für jede beliebige Neigung von AB stets

$$K_1 : K_2 : L = CB : CA : AB.$$

12. Die Angriffspunke A, B und C liegen nicht in einer Geraden (Fig. 6). Sollen die Kräfte K_1 und K_2 in Punkten A und B angreifen, welche nicht auf einer durch C gehenden Geraden liegen, so kann die feste Hilfsvorrichtung aus einer beliebig geformten, leichten und dünnen Holzscheibe bestehen, welche beiderseits mit weissem Papier überklebt ist.

Aus Gründen, welche hier nicht zu erörtern sind, ist es vorteilhaft die Angriffspunkte A und B auf der Scheibe so zu wählen, dass ihre Verbindungslinie durch den Schwerpunkt der Scheibe geht — eine Forderung, welche leicht zu erfüllen ist! —. Man wird dann finden, dass bei jeder Drehung der Scheibe in vertikaler Ebene (und damit der Geraden AB) die zur Haltung der Scheibe allein nötigen Kräfte unverändert bleiben, so dass für die aufeinanderfolgenden Versuche dieselbe Einstellung der Stellhülsen an den Dynamometern beibehalten werden kann.

Fig. 6

Die Scheibe wird in A und B, sowie in denjenigen Punkten, welche der Reihe nach als Angriffspunkte C der Last dienen sollen, durchbohrt. Zur Aufhängung der Scheibe an den Tragstiften dienen am einfachsten entsprechend lange Haken aus steifem Draht. Das untere Ende eines solchen Hakens ist um etwas mehr als 90° umgebogen, so dass die Scheibe mittels der Durchbohrungen in A und B angesteckt werden kann. Das obere Ende jedes Hakens ist zu einem Ringe von ca. 2 cm Weite umgebogen, dessen Ebene zu derjenigen der angesteckten Scheibe parallel ist. Mittels dieser Ringe wird die Scheibe an den Tragstiften angehängt, deren Entfernung jedesmal so zu wählen ist, dass die Drahthaken parallel (vertikal) herabhängen.

Zur Anbringung der Last dient ein gleicher Drahthaken in umgekehrter Stellung; derselbe wird in das als Angriffspunkt C dienende Loch der Scheibe eingehängt. (Durch die geraden Drahthaken vor der der weissen Scheibe werden die Richtungen der Kräfte und die gegenseitige Lage der Angriffspunkte auf grosse Entfernung deutlich sichtbar.)

Misst man mit Hilfe zweier an den Ringen der Drahthaken angebrachten Dynamometer die Kräfte K_1 und K_2, welche nötig sind, um die Ringe mit Scheibe und Last von den Tragstiften abzuheben, so erkennt man Folgendes:

1. Bei unveränderter Richtung von A B hat die Verlegung von C in derselben Vertikalen keine Änderung von K_1 und K_2 zur Folge; daher kann als idealer Angriffspunkt der Last der Punkt C' gelten, in welchem A B von der durch den wirklichen Angriffspunkt C gelegten Vertikalen geschnitten wird.

2. Die Versuche ergeben in jedem Falle:

$$K_1 : K_2 : L = C'B : C'A : AB \text{ d. h.}$$

die für eine gerade, horizontale Tragstange gefundenen Gesetze gelten für jede beliebige Form unter der Voraussetzung, dass die in Betracht kommenden Strecken in der angegebenen Weise auf A B gemessen werden.

3. Bei unveränderter gegenseitiger Lage der Punkte A, B und C, also bei unveränderter Gestalt des Dreiecks A B C, hat jede Drehung der Scheibe in vertikaler Ebene eine Änderung von K_1 und K_2 zur Folge: in der That tritt ja auch bei jeder Drehung der Scheibe eine Verschiebung von C' auf A B, also eine Änderung von $C'B : C'A$ ein.

Soll also bei jeder Drehung das Verhältniss $K_1 : K_2$ konstant bleiben, so muss C auf A B liegen.

4. Bei einer bestimmten Stellung der Scheibe könnten offenbar auch die Angriffspunkte von K_1 und K_2 auf den durch A und B gehenden Vertikalen verlegt werden (die wirkliche Ausführung ist nicht bequem); d. h. die in dem Gesetze vorkommenden Strecken können auf jeder beliebigen Geraden der durch A, B und C gelegten Ebene gemessen werden, z. B. auf einer Horizontalen M N. Sind A_1, B_1 und C_1 die Schnittpunkte der durch A, B und C gehenden Vertikalen mit einer solchen Geraden M N, so würde man finden

$$K_1 : K_2 : L = C_1 B_1 : C_1 A_1 : A_1 B_1.$$

Die Bestätigung durch den Versuch ist überflüssig, weil schon aus geometrischen Gründen

$$C_1B_1 : C_1A_1 : A_1B_1 = C'B : C'A : AB.$$

13. Hebung einer Last mittels einer Tragstange. Die Anwendung der Tragstange erfordert nach dem Vorausgehenden (abgesehen vom Gewichte der Stange selbst) einen Gesamtkraftaufwand = L, aber sie gestattet, die Last nach Bedürfnis auf die beiden Kräfte K_1 und K_2 zu verteilen.

Soll die an der Tragstange hängende Last L um h m gehoben werden, so kann dies offenbar zunächst dadurch geschehen, dass jede der beiden Kräfte K_1 und K_2 einen Weg von h m macht. Die von denselben geleistete Gesamtarbeit ist dann

$$K_1 \cdot h + K_2 \cdot h = (K_1 + K_2) \cdot h = L \cdot h.$$

Die Last kann aber auch dadurch gehoben werden, dass nur K_1 sich bewegt, während K_2 an Ort bleibt. Damit L um h m gehoben wird, muss dann K_1 einen Weg h_1 machen, dessen Grösse sich durch rein geometrische Betrachtungen ergibt:

$$h_1 = h \cdot \frac{BA}{BC} = h \cdot \frac{L}{K_1}.$$

Die von K_1 zu leistende Arbeit ist also

$$K_1 \cdot h_1 = K_1 \cdot h. \frac{L}{K_1} = L \cdot h,$$

was der Thatsache entspricht, dass K_2 keine Arbeit leistet.

Da L gehoben werden kann, ohne dass K_2 Arbeit leistet, so kann K_2 durch einen nicht arbeitsfähigen Widerstand ausgeübt werden. Die Tragstange wird dadurch eine wirkliche Maschine, insoferne sie gestattet, die Last zu heben durch eine arbeitsfähige Kraft K_1, welche kleiner ist als die Last: einarmiger Hebel.

14. Verteilung einer Last auf drei nicht in einer Ebene liegende parallele (vertikale) Kräfte (Fig. 7). Eine Last L sei angehängt in einem Punkte S einer ebenen Platte, welche in drei Punkten A, B und C mittels paralleler Schnüre aufgehängt ist. Die Verteilung der Last auf die drei Stützpunkte lässt sich, wenn S innerhalb des Dreiecks ABC liegt, aus dem Vorausgehenden in einfacher Weise deduzieren: Schneidet AS die Verbindungslinie BC in D, so verteilt sich L zunächst nach dem Gesetze der Tragstange auf die Punkte A und D und der auf D treffende Anteil nach demselben Gesetze auf die Punkte B und C. Die Ausführung ergibt

Fig 7

$$K_1 = L \cdot \frac{SD}{AD} \text{ und } K_2 + K_3 = L \cdot \frac{SA}{DA},$$

$$\text{ferner } K_2 = L \cdot \frac{SA}{DA} \cdot \frac{DC}{BC} \text{ und } K_3 = L \cdot \frac{SA}{DA} \cdot \frac{DB}{CB}.$$

Eine gleichmässige Verteilung, so dass $K_1 = K_2 = K_3 = \frac{L}{3}$, findet also statt, wenn $DB = DC$ und $SD = \frac{1}{2} SA$, d. h. wenn S derjenige Punkt des Dreiecks ABC ist, in welchem sich die Verbindungslinien der Ecken mit den Halbierungspunkten der Gegenseiten schneiden (Schwerpunkt).

Bei Bestätigung dieser Gesetze durch Versuche kann die Platte durch zwei Tragstangen B C und A D ersetzt werden, von denen die erstere in der oben beschriebenen Weise in B und C aufgehängt ist, während die andere in A ebenso aufgehängt, in D dagegen auf B C gestützt ist. Durch verschiedene Wahl des Punktes D auf B C und des ∡ A D B kann man dem durch die Punkte A, B und C bestimmten Dreieck die verschiedensten Formen geben.

Die analoge Behandlung des Falles, dass S ausserhalb des Dreiecks A B C liegt, bietet an späterer Stelle keine Schwierigkeit.

15. Der einarmige Hebel: Grösse und Sinn des Drehungsvermögens einer Kraft. Eine Tragstange M N (Fig. 8), welche in einem Punkte C drehbar unterstützt ist, so dass die in B angehängte Last L durch eine einzige arbeitsfähige Kraft K im Gleichgewichte gehalten, bezw. gehoben werden kann, heisst ein e i n a r m i g e r H e b e l. Im Falle des Gleichgewichtes ist nach dem Vorausgehenden

$$K : L = CB : CA.$$

Fig. 8.

Fig. 9.

Fig. 10.

Fig. 11.

Soll das Verhältniss K : L bei eintretender Drehung um C konstant bleiben, so müssen nach Nr. 13,3 die Punkte A, B und C in einer Geraden liegen; die Stange muss also gerade und unbiegsam sein.

Für den von der festen Stütze **(Achse, Schneide) in C zu leistenden** Widerstand (beziehungsweise für den Druck des Hebels auf die Stütze) ergibt sich

$$D : L = BA : CA \text{ oder einfacher}$$
$$D = L - K.$$

Die Strecken C B und C A heissen Hebelarm der Last und Hebelarm der Kraft (Lastarm l und Kraftarm k.)

K und L sind Kräfte, welche den Hebel in entgegengesetztem Sinne um C zu drehen streben; ist K so gewählt, dass

$$K : L (= CB : CA) = l : k$$
$$\text{oder } K \,.\, k = L \,.\, l,$$

so besteht Gleichgewicht, es findet keine Drehung statt.

Wählt man eine andere Kraft K_1 und dazu $C A_1 = k_1$ so, dass

auch $K_1 . k_1 = L . l$, so besteht dieser Gleichgewichtszustand zwischen K_1 und L ebenfalls. Zwei in demselben Sinne drehende Kräfte K am Hebelarm k und K_1 am Hebelarm k_1, welche so gewählt sind, dass die Produkte $K . k$ und $K_1 . k_1$ gleichen Wert haben, sind also gleichwertig (können sich gegenseitig ersetzen).

Man nennt das Produkt $K . k$ das statische Moment (Drehungsmoment) der Kraft K am Hebelarm k. Da nach dem Vorausgehenden die Kraft K am Hebelarm k und die Kraft $K . k$ am Hebelarm 1 gleichwertig sind, so gibt das statische Moment einer Kraft diejenige Kraft an, welche am Hebelarm 1 wirkend die gegebene Kraft ersetzt.

Zwei an einem einarmigen Hebel wirkende Kräfte von gleichem statischen Moment halten sich also Gleichgewicht oder sind gleichwertig, je nachdem sie den Hebel in entgegengesetztem Sinne (wie oben K und L) oder in gleichem Sinne (wie K und K_1) zu drehen streben. Zusammenfassend kann man sagen: **Kräfte von gleichem statischen Moment haben gleiches Drehungsvermögen.**

Beim einarmigen Hebel ist nur der erste Zweck einer einfachen Maschine erfüllt (Hebung einer Last durch eine kleinere Kraft; ein Teil der Last wird eben durch den Widerstand der Stütze getragen); dagegen ist es notwendig, dass die Kraft vertikal aufwärts wirkt. Man erkennt nun ohne weiteres, dass die in A aufwärts wirkende Kraft K jedenfalls bezüglich des Sinnes ihres Drehungsbestrebens ersetzt werden kann durch eine auf entgegengesetzter Seite in A′ vertikal abwärts wirkende Kraft K′. Man wird ferner erwarten, dass K auch bezüglich der Grösse des Drehungsvermögens durch eine solche Kraft K′ ersetzt werden kann, wenn K′ und CA′ so gewählt sind, dass $K' . CA' = K . CA$. Dabei ist jedoch klar, dass der von der Stütze C zu leistende Widerstand grösser als $L - K$, und zwar offenbar $= L + K'$ werden muss, dass also die Ersetzung der aufwärts wirkenden Kraft K durch eine abwärts wirkende Kraft K′ nur auf Kosten des von der Stütze C zu leistenden Widerstandes geschehen kann.

16. Zweiarmiger Hebel: gleichwertige und sich Gleichgewicht haltende Drehkräfte. Eine Last L ist an einer in C drehbar unterstützten (geraden, unbiegsamen) Stange MN (Fig. 9) in einem beliebigen Punkte B links von C angehängt und soll durch eine in A rechts von C vertikal abwärts wirkende Kraft K im Gleichgewicht gehalten werden. Die Möglichkeit ergibt sich daraus, dass das Gleichgewicht hergestellt werden kann mittels einer in A angebrachten vertikal abwärts gespannten Schnur. Die Messung der Kraft K geschieht mit Hilfe eines an Stelle der Schnur verwendeten Dynamometers.

Zur Messung des von der Stütze C zu leistenden Widerstandes wird ein Dynamometer von grösserer Tragkraft (hergestellt aus zwei

Messdrähten) im Punkte C des Hebels angebracht und vertikal aufwärts so gespannt, dass derselbe gerade von der Stütze abgehoben erscheint.

Bei Ausführung dieses in Fig. 10 dargestellten Versuches wählt man C auf der Stange so, dass derjenige Teil, an welchem L angehängt wird, schwerer ist, und stellt die Hülsen der in A und C angebrachten Dynamometer vor Anbringung der Last auf Null. Die Kräfte ergeben sich dann wieder wie für einen gewichtslosen Hebel.

Man findet übereinstimmend mit dem Vorausgehenden

1) für die in A nötige Kraft K
$$K : L = CB : CA \text{ oder } K \,.\, k = L \,.\, l \,.$$

2) für den von der Stütze C zu leistenden Widerstand
(d. i. **Druck des Hebels auf die Stütze**)
$$D = L + K.$$

Durch das Resultat 1) ist die in voriger Nr. 15 ausgesprochene Vermutung bestätigt, dass zwei Kräfte K aufwärts am Hebelarm k links von C und K′ abwärts am Hebelarm k′ rechts von C gleichwertig sind, wenn ihre statischen Momente K . k und K′ . k **gleich sind.**

Nach dem Vorausgehenden kann man sagen:

1. Die Grösse des Drehungsvermögens einer am Hebel wirkenden Kraft ist nur abhängig von der Grösse ihres statischen Momentes.

2. Der Sinn (die Richtung) ihres Drehungsbestrebens ist sowohl von der Richtung der Kraft als auch von der Richtung ihres Hebelarmes **abhängig.**

Bezeichnet man eine links aufwärts wirkende Kraft als rechtsdrehend, so sind rechts abwärts wirkende Kräfte ebenfalls rechtsdrehend; dagegen links abwärts und rechts aufwärts wirkende Kräfte linksdrehend.

3. Zwei an einem Hebel wirkende Kräfte von gleichem statischen Moment, welche beide rechts-, oder beide linksdrehend sind, sind gleich**wertig.**

4. Zwei an einem Hebel wirkende Kräfte von gleichem statischen Moment, von denen die eine rechts-, die andere linksdrehend ist, halten sich Gleichgewicht.

Dabei sind einstweilen die Richtungen der Kräfte parallel (vertikal) und ihre Hebelarme als in einer Geraden liegend gedacht, welche übrigens beliebig geneigt sein kann. Eine Erweiterung des Vorstehenden ergibt sich bei Besprechung des Wellrades von selbst.

17. Spezielle Form des einarmigen Hebels. Der in Fig. 10 dargestellte Versuch führt, wenn man sich die in A wirkende Kraft durch den abwärts gerichteten Widerstand einer Schneide ersetzt denkt, (Fig. 11) auf eine eigentümliche Form des einarmigen Hebels — den Wurfhebel.

Wie durch Versuche leicht zu zeigen, ist im Falle des Gleichgewichtes

$$K \,.\, AC = L \,.\, AB, \text{ mithin } K > L.$$

Macht K den Weg a, so muss aus geometrischen Gründen den Weg $a \,.\, \frac{AB}{AC} > a$ machen und sich demgemäss auch mit grösserer Geschwindigkeit bewegen; daher der Name Wurfhebel.

18. Bemerkungen zu den Formen des einfachen Hebels.

a) Sowohl der einarmige als der zweiarmige Hebel erfüllen den ersten Zweck einer einfachen Maschine, indem sie gestatten die Last durch eine kleinere (beliebig kleine) Kraft zu heben. Als eine vollkommenere einfache Maschine erscheint der zweiarmige Hebel, insoferne er zugleich die Anwendung einer vertikal abwärts gerichteten Kraft gestattet, welche unter anderem auch durch ein angehängtes Gewicht ausgeübt werden kann. Abgesehen hievon ist jedoch offenbar der einarmige Hebel vorteilhafter, weil bei demselben der Druck auf die Stütze $(L - K)$ kleiner ist als beim zweiarmigen $(L + K)$, so dass auch die infolge dieses Druckes bei eintretender Bewegung erzeugte Reibung, zu deren Überwindung ein besonderer Kraftaufwand erforderlich ist, beim einarmigen Hebel verhältnismässig geringer ausfällt.

b) Man bestätigt durch Versuche leicht, dass die Lasten L_1 am Hebelarm l_1, L_2 an l_2 u. s. w. durch eine einzige Last L am Hebelarm l ersetzt werden können, welche so gewählt ist, dass

$$L \,.\, l = L_1 \,.\, l_1 + L_2 \,.\, l_2 + \ldots,$$

und entwickelt hieraus das allgemeine Gesetz des Hebels, wonach Gleichgewicht besteht, wenn

$$K_1 \,.\, k_1 + K_2 \,.\, k_2 + \ldots = L_1 \,.\, l_1 + L_2 \,.\, l_2 + \ldots,$$

wobei die K Kräfte darstellen, welche infolge ihrer Richtung und der Lage ihres Angriffspunktes sämtlich rechtsdrehend sind, während die L sämtlich linksdrehend wirken.

c) Die Formen des einfachen Hebels, welche aus einfachen Stangen bestehen, sind zur wirklichen Hebung von Lasten auf grössere Höhen nicht geeignet, weil sie nur eine beschränkte Drehung um den festen Punkt C gestatten. Um eine fortgesetzte Drehung zu ermöglichen, gibt man den zur Hebung von Lasten auf grössere Höhen dienenden Hebeln eine besondere Form, nämlich die einer kreisförmigen, um ihre Mitte drehbaren Scheibe, um deren mit Rinne versehenen Umfang die zur Anbringung von Kraft und Last dienenden Seile herumgelegt werden.

19. Die besonderen Formen des Hebels; Entwickelung und Bestätigung der Gesetze derselben. Die besonderen Formen des Hebels erscheinen als spezielle Fälle der einfachen Hebelformen, nämlich:

a) die bewegliche Rolle als spezieller Fall der Tragstange, beziehungsweise des einarmigen Hebels;
b) die feste Rolle als spezieller Fall des zweiarmigen Hebels mit gleichen Hebelarmen;
c) das Wellrad als spezieller Fall des ein- oder zweiarmigen Hebels mit ungleichen Hebelarmen.

Die übrigen zu den Hebelmaschinen gehörigen Vorrichtungen entstehen durch Zusammensetzung dieser drei einfachen Formen, nämlich:

d) der Potenzrollenzug durch Verbindung einer oder mehrerer beweglichen Rollen mit einer festen Richtungsrolle;
e) der Produktflaschenzug durch Verbindung einer oder mehrerer beweglichen Rollen mit ebensovielen festen Rollen;
f) der Differential-Rollenzug (Differential-Welle) durch Verbindung einer beweglichen Rolle mit dem Wellrad.

Die Beziehungen, welche im Falle des Gleichgewichts an diesen Hebelmaschinen zwischen K und L bestehen, lassen sich aus den Gesetzen der betreffenden einfachen Hebelformen ohne Schwierigkeit entwickeln.

Die Bestätigung der so gefundenen Gesetze durch Versuche geschieht am einfachsten vor einer vertikalen Wand (Schultafel), welche mit den nötigen Haken und einem festen Stifte versehen ist, welcher als Achse zum Aufstecken der festen Rolle und des Wellrades dient.

Das Ende der Schnur, an welchem die zu messende Kraft wirkt, wird mit einem Ringe versehen, welcher an einem passend angebrachten Stifte eingehängt wird; die zur Haltung der Last nötige Kraft wird dann einstweilen durch den Widerstand dieses Stiftes ausgeübt. Zur Messung der Kraft bringt man am Ringe ein Dynamometer an und spannt dasselbe durch Ziehen mit der Hand, bis der Ring nicht mehr am Stifte anliegt. Die kraftmessenden Verlängerungen können mit Kreide auf der dicht dahinter befindlichen Schultafel nachgezeichnet werden; die Bestätigung mancher Erscheinungen, z. B. dass bei der festen Rolle und beim Wellrad die Grösse der Kraft unabhängig ist von der Richtung derselben, wird auf solche Weise wesentlich erleichtert.

Besonders geeignet erscheint diese Ausführung der Versuche dicht vor der Schultafel, weil die bei eintretender Bewegung von K und L gemachten Wege direkt nachgezeichnet werden können. Man markiert zunächst, während der Ring, wie oben erwähnt, über den Stift gehängt ist, die Anfangs-Stellung der Last durch einen Kreidestrich, zwängt die passend zugespitzte Kreide durch den vom Stift abgenommenen Ring und fährt vom Stifte weg mit der Kreide in der gewünschten Richtung

eine beliebige Strecke weit über die Tafel; markiert man auch die schliessliche Stellung der Last, so hat man die gleichzeitigen Wege von K und L fixiert und kann dieselben mittels des Masstabes oder des Zirkels vergleichen.

20. Besprechung des Wellrades zur Erläuterung des Winkelhebels und zur Vervollständigung des Begriffes der Drehungsmomente. Das Wellrad ist ein theoretisch wichtiger Apparat, insoferne es die wirkliche Ausführung des in Nr. 15 besprochenen Überganges vom einarmigen (Fig. 12 a) zum zweiarmigen Hebel (Fig. 12 c) gestattet. In den Zwischenstellungen erscheint das Wellrad in der Form eines sogenannten Winkelhebels (Fig. 12 b).

Bei Ausführung dieses Überganges zeigt es sich, dass die Grösse der Kraft unabhängig ist von ihrer Richtung, und zwar offenbar infolge des Umstandes, dass aus geometrischen Gründen bei jeder möglichen Richtung der Kraft die senkrechte Entfernung der Kraftrichtung vom Drehpunkt C unverändert (nämlich gleich dem Radius des Rades) bleibt. Man wird hiernach vermuten, dass nicht die Entfernung des Angriffspunktes einer Kraft vom Drehpunkte, sondern die senkrechte Entfernung der Kraftrichtung vom Drehpunkte als der eigentliche Hebelarm der Kraft anzusehen ist. Jedenfalls kann nach den Beobachtungen am Wellrad als sicher gelten, dass das Drehungsvermögen einer Kraft sich nicht ändert, wenn sie bei Änderung ihrer Richtung ihre senkrechte Entfernung vom **Drehpunkt beibehält.**

Betrachtet man die in No. 15 und 16 besprochenen und durch Fig. 8 und Fig. 9 dargestellten Versuche näher, so ergibt sich Folgendes:

1. Sind die am Hebel wirkenden Kräfte K und L vertikal, und liegen die Punkte A, B und C in einer horizontalen Geraden, so sind die Strecken CA und CB, welche oben als Hebelarme bezeichnet wurden, ohnehin zugleich die senkrechten Entfernungen der Kraftrichtungen vom Drehpunkt.

2. Denkt man sich bei schiefer Stellung des geraden (einarmigen oder zweiarmigen) Hebels durch C eine Horizontale MN gelegt, welche die durch A und B gehenden Vertikalen in A_1 und B_1 schneidet, so sind CA_1 und CB_1 die senkrechten Entfernungen der Kraftrichtungen vom Drehpunkt. Nun ist aus geometrischen Gründen

$CA_1 : CB_1 = CA : CB$, mithin kann die Gleichgewichts-Bedingung $K : L = CB : CA$ durch $K : L = CB_1 : CA_1$ ersetzt werden, d. h. statt der ursprünglich als Hebelarme bezeichneten Strecken CA und CB können die senkrechten Entfernungen CA_1 und CB_1 der Kraftrichtungen vom Drehpunkte in die Gleichgewichtsbedingung eingeführt werden.

3. Es bleibt also noch der durch das Wellrad gegebene Fall des Winkelhebels näher zu untersuchen. Eine ebene, beliebig geformte Scheibe (etwa aus mit weissem Papier überklebtem Zinkblech) (Fig. 13) werde in ihrem Schwerpunkte C durchbohrt, um auf eine horizontale feste Achse gesteckt zu werden. Damit die Ebene der Scheibe bei den Versuchen vertikal bleibt, kann in der Durchbohrung senkrecht zur Ebene der Scheibe ein ca. 2 cm langes Röhrchen befestigt werden, welches dann auf die Achse geschoben wird.

Fig. 13.

Auf der Scheibe werden die Richtungen CM und CN unter beliebigem Winkel gezeichnet und auf denselben die Punkte A und B so gewählt, dass **die Strecken CA und CB ein beliebiges Verhältnis $(p : q)$ haben.** Durch A wird sodann $PQ \perp CM$ und durch B ebenso $RS \perp CN$ gezogen; in A und B, sowie in beliebigen anderen Punkten der Geraden PQ (A_1, A_2 etc) und der Geraden RS (B_1, B_2 etc.) wird die Scheibe durchbohrt, um die zur Anbringung von K und L dienenden Haken einhängen zu können.

Bei Ausführung der Versuche muss sich die Scheibe in solcher Stellung befinden, dass der entsprechend lange Lasthaken in die Richtung RS fällt, also CN horizontal steht; ferner wird die zur Ausübung von K dienende (mittels eines kurzen, leichten Hakens in einem Punkte von PQ angebrachte) Schnur (bezw. das Dynamometer) durch Ziehen mit der Hand so gespannt, dass die Richtung von K mit PQ zusammenfällt, also auf CM senkrecht steht. Dann sind stets, welche Punkte von RS und PQ man auch als Angriffspunkt wählen mag, CA und CB die senkrechten Entfernungen der Kraftrichtungen vom Drehpunkt.

Wählt man zunächst die Punkte A und B als Angriffspunkte, so findet man für den Fall des Gleichgewichtes

$$K : L = q : p = CB : CA$$

Verlegt man die Angriffspunkte beliebig auf PQ und RS, z. B. nach A_2 und B_1, so tritt keine Änderung von K ein; man hat also stets
$$K : L = CB : CA.$$

welchen Wert auch das Verhältnis $CB_1 : CA_2$ haben mag. Daraus folgt, dass das Verhältnis $K : L$ nur abhängig ist von dem Verhältnis der senkrechten Entfernungen der Richtungen vom Drehpunkt, d. h. beim Winkelhebel müssen diese senkrechten Entfernungen als Hebelarme in Rechnung gebracht werden.

Hiernach empfiehlt es sich, auch beim geraden Hebel statt der Entfernungen der Angriffspunkte vom Drehpunkte die senkrechten Entfernungen der Kraftrichtungen vom Drehpunkt als Hebelarme zu bezeichnen und demgemäss das Drehungsmoment zu definieren als das Produkt der Kraft und ihrer senkrechten Entfernung vom Drehpunkt. Die am Schlusse von Nr. 16 erwähnten Beschränkungen, betreffend die Richtung der Kräfte und ihrer Hebelarme, kommen dann in Wegfall.

NB. In Fig. 13 ist in O ein kreisförmiger Ausschnitt der Scheibe (von ca. 2 cm Weite) angedeutet, dessen Ränder sich bei eintretender Drehung an einen festen Stift anlegen; dieser Stift verhindert grössere Drehungen der Scheibe, was die Ausführung der Versuche wesentlich erleichtert.

Zu bemerken wäre noch, dass bei entsprechender Wahl des Winkels M C N der Schnittpunkt von P Q und R S auf die Scheibe fällt, so dass die Angriffspunkte von K und L in denselben Punkt der Scheibe verlegt werden können. Die weitere Verfolgung der Versuchsresultate gehört jedoch nicht hierher.

21. Besprechung des Rollenzuges zur Erläuterung des Wesens der einfachen Maschinen überhaupt. Das Wesentliche einer einfachen Maschine besteht nach Nr. 8 darin, dass die Last grösstenteils von festen Widerständen getragen wird, und dass bei eintretender Hebung die arbeitsfähige Kraft gewissermassen nur einen Teil der Last zu heben, dafür aber einen entsprechend grösseren Weg zu machen hat. Zur Erläuterung dieser Beziehungen ist der Potenzrollenzug besonders geeignet.

Fig. 14.

Bei dem in Fig. 14 dargestellten Potenzrollenzug mit 3 beweglichen Rollen ergibt die leicht durchzuführende Untersuchung, dass durch den Widerstand des mit III bezeichneten festen Hakens die Hälfte von L getragen wird, ferner durch den festen Haken II $\frac{L}{4}$, durch Haken I $\frac{L}{8}$. Durch die Widerstände dieser festen Haken werden also getragen $\frac{7}{8}$ der Last; nur der Rest $\frac{L}{8}$, ist zu halten durch die am Seile 1 zunächst vertikal aufwärts wirkende Kraft; daher ist

$K = \frac{L}{8}$. Zur Herbeiführung einer bequemeren Zugrichtung ist dann dieses Seil 1 noch über die feste Rolle geführt, wodurch ein weiterer Widerstand, welcher durch die Befestigung dieser Richtungsrolle auszuüben ist, in Anspruch genommen wird. Derselbe ist im ungünstigsten Falle, wenn K vertikal abwärts gerichtet ist, $= K + \frac{L}{8} = \frac{L}{4}$ und ändert sich mit der Grösse des Winkels α, um welchen K von der Vertikalen abweicht. (Die Bestimmung der Grösse und Richtung dieses Widerstandes für einen bestimmten Wert von α muss an dieser Stelle übergangen werden.)

Eine einfache geometrische Betrachtung zeigt ferner, dass bei Hebung der Rolle III samt Last um 1 m, die Rolle II um 2 m, die Rolle I um 4 m gehoben werden, und dass daher die Kraft in ihrer Richtung einen Weg von 8 m machen muss.

22. Übersetzungsverhältnis der Kräfte und der Wege; Prinzip der gleichen Arbeiten. Die für den Fall des Gleichgewichts an den verschiedenen Hebelmaschinen zwischen K und L bestehenden Beziehungen lassen sich sämtlich in der Form

$$K = \frac{L}{q} \text{ darstellen.}$$

Diese Zahl q — das Übersetzungsverhältnis der Kräfte — hat für die einzelnen oben aufgeführten Hebelmaschinen folgende Werte:

a) für die bewegliche Rolle: $q = 2$;
b) für die feste Rolle: $q = 1$;
c) für den Potenzrollenzug mit n beweglichen Rollen: $q = 2^n$;
d) für den Produktflaschenzug mit n beweglichen Rollen: $q = 2 \cdot n$;
e) für das Wellrad (Winde etc.): $q = \frac{R}{r}$;
f) für den Differential-Flaschenzug: $q = \frac{R - r}{2R}$.

Diese Werte sind das Ergebnis der Anwendung der für die einfachen Formen des Hebels bestehenden mechanischen Gesetze auf die einzelnen Hebelmaschinen.

Durch vollkommen selbständige, rein geometrische Betrachtungen erhält man anderseits für die einzelnen Maschinen Beziehungen zwischen den Wegen W_k und W_L, welche von K und L bei eintretender Bewegung gleichzeitig gemacht werden; diese Beziehungen lassen sich sämtlich in der Form

$$W_k = p \cdot W_L \text{ darstellen.}$$

p ist das Übersetzungsverhältnis der Wege.

Die nachträgliche Vergleichung ergibt, dass für jede Maschine die vollkommen unabhängig von einander gefundenen Werte von q und p übereinstimmen. Ist also für eine beliebige Maschine im Falle des Gleichgewichts $K = \frac{L}{u}$, so ist für dieselbe Maschine bei eintretender Bewegung $W_k = u.\ W_L$.

Diese Übereinstimmung ist selbstverständlich keine zufällige; sie macht vielmehr gerade das Wesen der einfachen Maschine aus; nämlich:

Zur Hebung einer Last von L kg um h m ist an und für sich (d. h. ohne Anwendung einer Maschine) eine Kraft K = L kg auf eine Weglänge von h m erforderlich; daher ist die zur Hebung der Last erforderliche Arbeit

$$A_L = L \,.\, h \text{ (mkg)}.$$

Bei Benützung einer Maschine mit dem Übersetzungsverhältnis u ist (abgesehen von der zur Hebung einzelner Bestandteile der Maschine, z. B. der Rollen eines Rollenzuges, sowie zur Überwindung der Reibung erforderlichen Extrakraft) zur Hebung derselben Last L um h m eine Kraft $K = \frac{L}{u}$ kg auf eine Weglänge von (h . u) m erforderlich, daher ist die bei Anwendung der betreffenden Maschine von der Kraft zu leistende Arbeit

$$A_k = \frac{L}{u} \,.\, hu \text{ (mkg)} = L \,.\, h \text{ (mkg)} = A_L.$$

Das auf dem Wege der Erfahrung gefundene Gesetz, dass für jede der bisher behandelten Maschinen das Übersetzungsverhältnis der Kräfte und das Übersetzungsverhältnis der Wege den gleichen Wert haben, führt also zu dem Resultate, dass bei Hebung einer Last mittels einer beliebigen Maschine die von der Kraft zu leistende Arbeit gerade so gross ist, als die zur Hebung derselben Last an und für sich (d. h. ohne Anwendung einer Maschine) erforderliche Arbeit.

Dieses Ergebnis der Erfahrung aber erscheint, einmal erkannt, geradezu als eine selbstverständliche Forderung, als ein Fundamentalprinzip, aus welchem die Übersetzungsverhältnisse der einzelnen Maschinen und damit rückwärts auch die Gesetze des Gleichgewichts am einfachen Hebel durch geometrische Betrachtungen deduziert werden können.

III.

Das Parallelogramm-Prinzip.

23. Dritte Art der Verteilung einer Last: Die Komponenten K_1 und K_2 haben mit R den Angriffspunkt gemeinsam, jedoch verschiedene, von der Vertikalen abweichende Richtungen. Eine Ausführung dieser Verteilung bietet die in Fig. 15 dargestellte Aufhängung einer Last: Die Last wird getragen durch die in die Richtungen A B und A C fallenden Widerstände der Schnüre und Haken; diese Widerstände ersetzen die eine Kraft R, welche der Last L gleich sein und deren Richtung in die Verlängerung von D A fallen müsste. Der Verknüpfungspunkt A der drei Schnüre stellt dabei den gemeinsamen Angriffspunkt dar.

Fig. 15. Fig. 16.

Die Last L werde mittels des Ringes D über einen festen Tragstift gehängt (Fig. 16), und durch Ziehen mit den Händen an den Schnüren A B und A C der Versuch gemacht, den Ring mit der Last vom Stifte abzuheben, und zwar bei immer andern Richtungen dieser Schnüre. Dabei ergibt sich zunächst Folgendes:

1. Das Abheben tritt nur dann ein, wenn die Kraftschnüre so angezogen werden, dass die Lastschnur D A in die Vertikale fällt; bei abgehobener Last liegen die Schnüre A D, A B und A C in einer vertikalen Ebene.
2. Bei abgehobener Last geht die Verlängerung von D A stets durch den Winkel B A C, d. h. die Kräfte K_1 und K_2 müssen nach entgegengesetzten Seiten von der Vertikalen abweichen.
3. Für jede Wahl der Abweichungswinkel α und β kann die Last abgehoben und im Gleichgewicht gehalten werden, solange $\alpha + \beta < 180^0$. Markiert man nämlich auf der vertikalen Wandtafel vertikal über dem Punkte d, in welchem der Tragstift angebracht ist, in passender Entfernung den Punkt a (a d = A D), ferner die durch a gehende Vertikale a v und ganz beliebig rechts und links von a v die Richtungen a b und a c, so kann durch entsprechend starkes Ziehen bei

B und C die Zusammenstellung stets so gehalten werden, dass die Last frei hängt, und dass die Schnüre AB und AC und die Strahlen ab und ac sich decken, — solange $\measuredangle$ bac $< 180^0$.

Was die Grösse der jedesmal mit den Händen auszuübenden Zugkräfte K_1 und K_2 anlangt, so lassen sich schon nach dem Gefühle gewisse Gesetzmässigkeiten erkennen, z. B. dass man im allgemeinen um so stärker zu ziehen hat, je grösser die Winkel α und β werden, ferner dass bei konstantem Winkel α und wachsendem β K_1 immer grösser wird, K_2 dagegen unter Umständen zunächst abnimmt.

Durch Verwendung von Dynamometern an Stelle der Schnüre AB und AC können die Werte von K_1 und K_2, welche gegebenen (auf der Tafel vorgezeichneten) Winkeln α und β entsprechen, ohne weiteres bestimmt werden. Die auf die Hülsen B und C der Dynamometer aufzuschiebenden Korke (siehe No. 5 am Schluss) werden dabei natürlich so gewählt, dass ihr Durchmesser etwas grösser ist als der Durchmesser des als Last dienenden Gewichtsstückes (200 g), so dass dieses bei Ausführung der Versuche nicht an der Tafel anstreift.

24. Entwickelung der Beziehungen, welche im Falle des Gleichgewichtes zwischen L, α und β, K_1 und K_2 bestehen. Durchführung eines Vorversuches. Geht man bei Ausführung des durch Figur 16 dargestellten Versuches von einer Gleichgewichtsstellung aus, bei welcher α und β kleiner als 90^0, aber sonst beliebig sind, so erkennt man, dass jede der beiden Kräfte K_1 und K_2 zwei Wirkungen hat, eine hebende und eine schiebende. K_1 z. B. sucht den Angriffspunkt A mit der Last nicht blos zu heben, sondern auch nach links zu verschieben.

Im Falle des Gleichgewichts müssen offenbar die schiebenden Wirkungen von K_1 und K_2 sich gegenseitig aufheben, also entgegengesetzt gleich sein; die hebenden Wirkungen von K_1 und K_2 dagegen müssen miteinander die hebende Wirkung der zur Haltung von L erforderlichen einen Kraft R ersetzen, d. h. die Summe der hebenden Wirkungen von K_1 und K_2 muss der hebenden Wirkung von R gleich sein.

Es handelt sich also darum zu erkennen, von welchen Umständen die hebende und die schiebende Wirkung einer von der Vertikalen abweichenden Kraft abhängen.

Nun erscheint zunächst klar, dass die schiebende Wirkung einer Kraft verschwindet, wenn ihre Richtung in die Vertikale fällt, dass dagegen ihre hebende Wirkung $= 0$ wird, wenn ihr Abweichungswinkel von der Vertikalen 90^0 beträgt, mithin die Kraft horizontal ist.

Diese (instinktive) Erkenntnis veranlasst uns, die Untersuchung des in Fig. 17 dargestellten Falles ($\alpha = 90^0$, β wachsend von 0^0 an) voranzustellen. Hier ist nämlich die hebende Wirkung von K_1 stets $= 0$, mithin die hebende Wirkung von K_2 stets gleich der hebenden Wirkung

von R (= L). Der Versuch ist also geeignet zu zeigen, wie gross eine um den Winkel β von der Vertikalen abweichende Kraft K_2 sein muss, damit ihre hebende Wirkung so gross ist, wie die einer gegebenen vertikalen Kraft R = L.

Vorbereitung des Vorversuches. Zunächst wird (Fig. 17) auf der vertikalen Wandtafel der Punkt a markiert, welcher die Lage des Angriffspunktes A angeben soll; sodann werden durch a die Vertikale v v und die Horizontale h h gezogen. Vertikal unter a wählt man den Punkt d so, dass a d gleich ist der Länge der Lastschnur A D (gemessen bis zur Mitte des Ringes bei D): in d wird der Tragstift angebracht, an welchem sodann die Last mittels ihres Ringes angehängt wird.

Fig 17.

In einem beliebigen Punkte b von a h wird ein zweiter Stift befestigt und an diesem die Kraftschnur A B so angebracht, dass der den Angriffspunkt der drei Kräfte darstellende Knoten A bei gespannter Schnur den Punkt a deckt. Zieht man dann an der Kraftschnur A C in beliebiger Richtung so stark, dass die Last vom Tragstift abgehoben wird, und dass der Lastring den Stift gleichmässig umschliesst, so liegt der Angriffspunkt A direkt vor a, und die Schnur A B deckt die Horizontale a h; die eine Komponente K_1, ausgeübt durch den Widerstand des Stiftes bei b, ist also horizontal. Die Grösse der Kraft K_2, welche durch Ziehen mit der Hand an A C ausgeübt werden muss, um die angedeutete Gleichgewichtsstellung herbeizuführen, wird nun gemessen mit Hilfe eines an Stelle der Schnur A C in A angebrachten Dynamometers; die Stellhülse desselben wird so verschoben, dass bei nicht gespanntem Messdraht der Punkt A mit dem Ende der Stellhülse zusammenfällt, und demgemäss die kraftmessenden Verlängerungen von A aus zu messen sind und durch von a auslaufende Strecken dargestellt werden können.

Ausführung des Vorversuches.

a) Man hält das Dynamometer in der Richtung der Vertikalen a v und verschiebt dasselbe längs dieser Vertikalen, bis A mit a zusammenfällt; markiert man sodann die Stelle c auf a v, bei welcher das Ende der Stellhülse liegt, so gibt die Strecke a c die Grösse der einen Kraft R an, welche allein im stande ist, die Last zu halten. Die Schnur A B zeigt dabei keine Spannung, wodurch bestätigt ist, dass eine vertikale Kraft keine seitlich verschiebende Wirkung hat.

b) Man hält das Dynamometer nacheinander in zwei beliebig vorgezeichnete Richtungen a m_1 und a m_2 und verschiebt dasselbe jedesmal in diesen Richtungen, bis A mit a zusammenfällt; markiert man, wie oben, die Stellen c_1 auf a m_1 und c_2 auf a m_2, so geben die Strecken a c_1, beziehungsweise a c_2, an, wie gross die um die Winkel $\beta_1 = v a m_1$, bezw. $\beta_2 = v a m_2$, von den Vertikalen abweichende Kraft K_2 sein muss, damit ihre hebende Wirkung derjenigen der vertikalen Kraft R (= a c) gleich ist.

c) Beim Anblick der erhaltenen Figur fällt auf, dass die Punkte c, c_1, c_2 auf einer horizontalen Geraden liegen; hiernach liegt die Vermutung nahe, dass die von der Vertikalen abweichende Kraft K_2 so gross sein muss, dass ihre Projektion auf die Vertikale der einen vertikalen Kraft R (dargestellt durch a c) gleich ist. Um diese Vermutung zu bestätigen, zieht man c n parallel zu h h (horizontal) und wiederholt den Versuch für eine beliebige Richtung a m' (in Fig. 17 nicht eingezeichnet): man findet in der That, dass der Punkt c', welcher das Ende der Verlängerung des Messdrahtes markiert, auf c n fällt. Man kann daher sagen:

Soll eine von der Vertikalen abweichende Kraft K_2 dieselbe hebende Wirkung haben wie eine gegebene vertikale Kraft R, so muss die Vertikal-Projektion von K_2 der Kraft R gleich sein.

d) Bei den Versuchen unter b etc. zeigt die Schnur A B eine mehr oder weniger grosse Spannung, welche herrührt von der schiebenden Wirkung von K_2: Durch die Grösse dieser Spannung wird nun offenbar die schiebende Wirkung von K_2 gemessen. Man wird daher zur Bestimmung dieser Spannung an Stelle der Schnur A B ein zweites Dynamometer verwenden und unter Wiederholung der oben aufgeführten Versuche auch die Verlängerungen a b_1, a b_2 aufzeichnen, welche die Grösse der jedesmaligen Spannung angeben.

Nachdem man ferner bereits erkannt hat, dass die hebende Wirkung einer Kraft bedingt ist durch die Grösse ihrer Vertikal-Projektion, ist es naheliegend, auch die Horizontal-Projektionen a h_1, a h_2 ins Auge zu fassen. Die Vergleichung ergibt, dass a h_1 = a b_1, a h_2 = a b_2. Man kann also ferner sagen:

Die schiebende Wirkung einer von der Vertikalen abweichenden Kraft K_2 ist gerade so gross, wie die einer horizontalen Kraft, welche der Horizontal-Projektion von K_2 gleich ist.

Stellt man die unter c und d gefundenen Ergebnisse zusammen, so ergibt sich als

Resultat des Vorversuches:

Eine von der Vertikalen abweichende Kraft kann bezüglich ihrer hebenden und schiebenden Wirkung er-

setzt werden durch zwei Kräfte, von denen die eine vertikal und gleich der Vertikal-Projektion, die andere horizontal und gleich der Horizontal-Projektion jener Kraft ist.

25. Durchführung des Hauptversuches. Die Beziehungen, welche im Falle des Gleichgewichtes zwischen K_1 und K_2 einerseits und L, α und β anderseits bestehen, können aus dem eben erhaltenen Resultate ohne weitere Schwierigkeit deduziert werden. Wir wollen jedoch diese Beziehungen aus der wirklichen Durchführung allgemeiner Versuche für beliebige Winkel α und β entwickeln.

Nach dem Vorausgehenden ist klar, dass bei Beurteilung der Wirkung einer von der Vertikalen abweichenden Kraft die Vertikal- und die Horizontal-Projektion derselben eine besondere Rolle spielen. Dies veranlasst uns, die Einrichtung im folgenden so zu treffen, dass die Grösse dieser Projektionen unmittelbar abgelesen werden kann. Hiezu dient ein durch horizontale und vertikale gerade Linien in qcm (und qmm) geteilter Hintergrund, den man am einfachsten herstellt, indem man ein entsprechend grosses Stück sogenannten Koordinatenpapiers (Millimeterpapiers) an der Wandtafel befestigt. (Bei Ausführung der Versuche mit Hilfe der auf Seite 3 erwähnten Apparate wird eine besondere mit solchem Papier überzogene Zinkscheibe als Hintergrund an dem betreffenden Gestelle — Apparat B — angebracht.)

Selbstverständlich werden je die 5. und 10. Linie der horizontalen und der vertikalen Einteilung für die Beobachtung aus grösserer Entfernung entsprechend kräftig gezeichnet; im äussersten Falle wird man je die Quadrate von 5 cm Seite abwechslungsweise mit Hilfe eines blassen Tones (schachbrettartig) von einander unterscheiden.

Im Schnittpunkte zweier Hauptteilungslinien wird der Punkt a gewählt; diese Linien stellen dann die oben erwähnte Vertikale v v und die Horizontale h h dar.

Fig. 18.

Für die Ausführung der weiteren Versuche (Fig. 18) ist es bequemer, den Tragstift im Punkte a anzubringen, also die Lastschnur und die beiden Kraftschnüre, bez. die Dynamometer, am Ringe zu befestigen, dessen Mitte dann den gemeinsamen Angriffspunkt A der drei Kräfte L, K_1 und K_2 darstellt. Die Gleichgewichtsstellung ist also immer so zu wählen, dass der Ring den Stift gleichmässig umschliesst. Die Hülsen der Dynamometer sind natürlich so einzustellen, dass die Verlängerungen der Messdrähte von der Mitte des Ringes, also

in Gleichgewichtsstellung von der Achse des Tragstiftes aus gemessen und durch von a ausgehende Strecken dargestellt werden.

Führt man nun unter Berücksichtigung dieser Umstände die Versuche aus, indem man die Dynamometer in beliebigen Richtungen a p und a q so spannt, dass Ring und Last freihängen, so kann man an dem geteilten Hintergrunde unmittelbar die Grösse der Vertikalprojektionen $a v_1$ und $a v_2$, sowie die Grösse der Horizontalprojektionen $a h_1$ und $a h_2$ der gesuchten Kräfte K_1 und K_2 ablesen (Fig. 18). Diese Bequemlichkeit gestattet eine grosse Anzahl von Versuchen rasch hintereinander auszuführen.

Die Versuche ergeben nun, dass zur Herstellung des Gleichgewichtes die Kräfte K_1 (a b) und K_2 (a c) stets so gross sein müssen, dass

1. ihre entgegengesetzt gerichteten Horizontalprojektionen $a h_1$ und $a h_2$ einander gleich sind;

2. die Summe ihrer Vertikalprojektionen $a v_1$ und $a v_2$ konstant, und zwar gleich der einen Kraft R (a d) ist.

Fig. 19. $\frac{1}{10}$ n. G.

Bezeichnet man die Horizontalprojektionen mit H_1 und H_2, die Vertikalprojektionen mit V_1 und V_2, so lauten die gefundenen Beziehungen:

1) $H_1 = H_2$

2) $V_1 + V_2 = R\ (= L)$

Macht man den Gegenversuch, indem man zunächst die Dynamometer so spannt, dass diese beiden Bedingungen erfüllt sind, und erst nachträglich die Last L am Ringe anhängt, so tritt Gleichgewichtsstellung ein.

Wählt man einen der beiden Winkel, etwa $\beta > 90^0$, so erscheint die Vertikalprojektion der betreffenden Kraft K_2 abwärts gerichtet; man findet dann als 2. Bedingung

2 a) $V_1 - V_2 = R\ (= L)$.

$\frac{1}{10}$ n. G. Fig. 20.

Die Figuren 19 und 20 stellen in $\frac{1}{10}$ der natürlichen Grösse die Ausführung zweier Versuche mit einer Last von 200 g dar; der Hintergrund ist dabei durch Angabe der Teilungslinien von 5 zu 5 cm angedeutet; ebenso sind

Stücke der Dynamometer mit den ausgezogenen Messdrähten und den aufgeschobenen Korken schematisch dargestellt.

In Fig. 19 sind α und $\beta < 90^0$; man liest ab

1) $a h_1 = a h_2 = 15$ cm, $a v_1 = 15$ cm, $a v_2 = 5$ cm, also
2) $a v_1 + a v_2 = 20$ cm; daher ist
1) $H_1 = H_2 = 150$ g,
2) $V_1 + V_2 = 150$ g $+ 50$ g $= 200$ g ($= L$).

In Fig. 20 ist $\alpha < 90^0$ und $\beta > 90^0$. Es ist

1) $a h_1 = a h_2 = 10$ cm; $a v_1 = 25$ cm, $a v_2 = -5$ cm., also
2) $a v_1 - a v_2 = 20$ cm; daher
1) $H_1 = H_2 = 100$ g.
2) $V_1 - V_2 = 250$ g $- 50$ g $= 200$ g ($= L$).

26. Geometrische Darstellung der gefundenen Gleichgewichtsbedingungen; Lehrsatz vom Parallelogramm der Kräfte. Die Bestimmung von K_1 und K_2, wenn L, α und β gegeben sind, erscheint nach dem Vorausgehenden als ein geometrisches Problem: Auf den Strahlen a p und a q, welche um die gegebenen Winkel α und β nach entgegengesetzten Seiten von der Vertikalen abweichen, sollen die Strecken a b (K_1) und a c (K_2) so bestimmt werden, dass ihre Horizontalprojektionen gleich sind, und dass die Summe ihrer Vertikalprojektionen eine vorgeschriebene Grösse (= die Masszahl von L) hat.

Die Lösung dieser rein geometrischen Aufgabe stützt sich auf eine leicht zu beweisende Eigenschaft des Parallelogramms: Projiziert man zwei anstossende Seiten a b und a c eines Parallelogramms auf die von derselben Ecke ausgehende Diagonale a d (Fig. 21), so sind

1) die Projizierenden b b_1 und c c_1 einander gleich;

ferner ist

2) die Summe (Differenz) der Projektionen a b_1 und a c_1 gleich der Diagonale a d.

Fig. 21.

Denkt man sich, wie in Fig. 21, das Parallelogramm in solcher Stellung, dass die Diagonale a d vertikal erscheint, so sind b b_1 und c c_1 die Horizontalprojektionen, a b_1 und a c_1 die Vertikalprojektionen der Seiten a b und a c.

Zeichnet man also ein Parallelogramm a b d c so, dass seine Diagonale a d vertikal und ihre Masszahl gleich ist der Masszahl der gegebenen Last L, dass ferner die Winkel d a b und d a c gleich sind den gegebenen Winkeln α und β, mithin die Seiten a b und a c in die Richtungen der gesuchten Kräfte fallen, so bestimmen diese Seiten a b und a c die Grösse der gesuchten Kräfte K_1 und K_2. Der hiemit ent-

wickelte **Lehrsatz vom Parallelogramm der Kräfte** kann in etwas verallgemeinerter Form, wie folgt, ausgesprochen werden:

Wird eine Kraft R von gegebener Richtung (bisher vertikal aufwärts) und gegebenem Angriffspunkt A ersetzt durch zwei in demselben Punkte A angreifende Kräfte K_1 und K_2 von vorgeschriebenen Richtungen, so sind diese Kräfte dargestellt durch die anstossenden Seiten eines Parallelogramms, in welchem die Masszahl der zugehörigen Diagonale gleich ist der Masszahl von R, und in welchem die Winkel jener Seiten mit dieser Diagonale gleich sind den Winkeln α und β, welche die gesuchten Kräfte K_1 und K_2 mit R bilden sollen.

27. Zusätze. 1. In trigonometrischer Form lauten die gefundenen Gleichgewichtsbedingungen

$$1)\ K_1 \,.\, \sin\alpha - K_2 \sin\beta = 0$$
$$2)\ K_1 \,.\, \cos\alpha + K_2 \cos\beta = L.$$

Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich K_1 und K_2 aus L, α und β in einfacher Weise berechnen.

Die Vereinigung beider Gleichungen ergibt die eine Bedingung:

$$K_1^2 + K_2^2 + 2\ K_1 \,.\, K_2 \,.\, \cos(\alpha + \beta) = L^2.$$

Diese Gleichung aber sagt für den der Trigonometrie Kundigen aus, dass K_1 und K_2 der Grösse nach bestimmt sind durch zwei Seiten eines Dreiecks, in welchem die dritte Seite = L, und die anliegenden Winkel beziehungsweise = α und = β sind.

In der Parallelogrammfigur (Fig. 21) ist bd = ac, daher ist K_2 der Grösse nach auch durch bd (statt durch ac) dargestellt. Ferner ist $\measuredangle$ adb = β. Zur Bestimmung von K_1 und K_2 genügt also die Konstruktion des Dreiecks abd aus ad und den beiden anliegenden Winkeln, was mit dem obigen Resultate übereinstimmt.

2. Durch die gefundene Lösung der Aufgabe: K_1 und K_2 aus L, α und β zu bestimmen, sind zugleich nachstehende Aufgaben gelöst:

1. Gegeben: L, K_1 und K_2; gesucht: α und β.
2. „ L, K_1 und α; „ K_2 und β.
3. „ L, K_1 und β; „ K_2 und α.
4. „ K_1, K_2 und $\alpha + \beta$; „ L, α und β.

Die geometrische Behandlung erfordert im wesentlichen die Konstruktion eines Dreiecks, und zwar

ad 1) aus den 3 Seiten;
ad 2) aus 2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel;
ad 3) aus 2 Seiten und einem gegenüberliegenden Winkel;
ad 4) aus 2 Seiten und dem zugehörigen Aussenwinkel.

Bezüglich der rein experimentellen Lösung dieser Aufgaben, welcher nach dem Vorausgehenden nur die Bedeutung einer Bestätigung der durch Konstruktion oder Rechnung gewonnenen Lösungen zukommt, wird auf die oben (Seite 3) erwähnte Abhandlung verwiesen.

28. Entwickelung des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte in anderer Form. Zur Auffindung der Beziehungen, welche zwischen K_1 und K_2, L, α und β im Falle des Gleichgewichtes bestehen, kann man auch folgenden, wesentlich kürzeren Weg einschlagen. Man sucht zunächst die Frage zu beantworten, in welcher Weise K_2 sich ändert, wenn bei unveränderlichem Winkel α der Winkel β allmählich immer andere Werte annimmt.

(Der Fall $\alpha = 90^0$ wurde oben als Vorversuch behandelt.)

Ein Stift b (Fig. 22) trägt die Schnur BA, deren Ende A mit dem Ringe versehen ist, an welchem die Lastschnur sowie das Dynamometer zur Messung von K_2 angebracht wird. Man bringt BA in die durch den Winkel α bestimmte Richtung, wählt auf der Tafel den Punkt a so, dass bei gespannter Schnur BA die Mitte des Ringes den Punkt a deckt und schlägt in a einen 2. Stift senkrecht zur Tafel ein. Die Einstellung des Dynamometers geschieht genau wie oben.

Spannt man dasselbe zunächst in der Vertikalen av, sodann in verschiedenen vorgezeichneten Richtungen am_1, am_2 u. s. w. und zwar jedesmal so, dass der Ring den Stift a gleichmässig umschliesst, also die Last durch den ausgeübten Zug sowie durch den Widerstand des Stiftes b frei getragen wird, so gewinnt man auf den gewählten Richtungen die Punkte d, c_1, c_2 u. s. w. als Endpunkte der Verlängerungen des Messdrahtes und hat in den Strecken ad, ac_1, ac_2 etc. die Werte von K_2, welche den Winkeln $\beta = 0$, $\beta_1 = vam_1$ u. s. w. entsprechen.

Der Anblick der auf der Tafel zurückbleibenden Figur lehrt sofort, dass die Punkte d, c_1, c_2 u. s. w. auf einer Geraden liegen, und dass diese Gerade zu ba parallel ist: Die einem beliebigen Winkel β' entsprechende Grösse von K_2 ist also dargestellt durch die Strecke ac', welche auf der gewählten Richtung von K_2 abgeschnitten wird, wenn man durch d eine Parallele dn zur festen Richtung von K_1 zieht.

Nun erhält man offenbar bei Untersuchung der Frage, welche Werte von K_1 bei konstanter Richtung von K_2 den verschiedenen mög-

lichen Werten von α entsprechen, das analoge Resultat: Die Grösse von K_1 ist jedesmal dargestellt durch die Strecke a b′, welche auf der Richtung von K_1 abgeschnitten wird, wenn man durch d eine Parallele zur Richtung von K_2 zieht.

Um also zu gegebenen Werten von L, α und β die zugehörigen Werte von K_1 und K_2 zu bestimmen, zeichnet man (Fig. 23) die Strecke a d vertikal und so gross, dass ihre Masszahl derjenigen von L entspricht, trägt an a d links und rechts die Winkel d a p $= \alpha$ und d a q $= \beta$ an und zieht durch d Parallelen zu a p und a q; man erhält dadurch ein Parallelogramm a b d c, dessen Seiten a b und a c die gesuchten Kräfte K_1 und K_2 nicht bloss der Richtung, sondern auch der Grösse nach darstellen.

29. Ersetzung der einen Komponente K_1 durch Unterstützung der Last mittels eines geneigten ebenen Brettes. Wir benützen im folgenden als Last eine Walze, an deren beiderseits vorstehender Achse zwei leichtbewegliche Scheren zur Befestigung der Zugschnüre angebracht werden können.

Hebt man die Walze mittels einer Schnur, beziehungsweise mittels zweier (von der Vertikalen abweichenden) Schnüre auf (Fig. 24), so ist bei richtiger Ausführung die Achse stets horizontal und die Verlängerungen der Schnüre gehen durch die Mitte der Achse: dieser Punkt (der Schwerpunkt der Last) ist daher stets als der Angriffspunkt der betreffenden Kräfte anzusehen.

Fig. 24.

Legt man die Walze auf ein ebenes, horizontales Brett, so bleibt sie in Ruhe; durch den Widerstand dieser Unterstützung wird also eine in der Mitte der Achse angreifende und vertikal aufwärts gerichtete Kraft R = L vollständig ersetzt.

Wird das Brett geneigt (Fig. 25), so dass es mit der Horizontalen einen beliebigen Winkel α bildet, so muss die Last durch Anbringung einer besonderen Kraft am Herabrollen gehindert werden. Dies kann erreicht werden, indem man die Last mittels einer Schnur A C an einem passend angebrachten Haken C festbindet. Die auf solche Weise im Gleichgewichte erhaltene Last wird dabei offenbar teils durch den Widerstand dieser Anhängung, teils durch den Widerstand der Unterstützung durch das schiefe Brett getragen. Die Richtung des ersteren ist durch die Richtung der Schnur A C, seine Grösse durch die Spannung dieser Schnur bestimmt.

Fig. 25.

Findet man mit Hilfe eines Dynamometers, dass in einem bestimmten Falle diese Spannung a g beträgt, so ersetzt die Anhängung der Last mittels der Schnur A C eine in der Mitte der Achse angreifende und in der Richtung A C wirkende Kraft $K_2 = a\ g$.

Es handelt sich also noch darum, die Richtung und die Grösse derjenigen Kraft zu erfahren, welche durch Unterstützung der Last mittels des schiefen Brettes ersetzt wird. Zu diesem Zwecke schalten wir zunächst in die Schnur A C einen Messdraht ein, so dass jede Änderung der Spannung von A C sich in einer Bewegung der Walze auf der schiefen Bahn kundgibt, und machen sodann mittels einer an der zweiten Schere angebrachten Schnur A B durch Ziehen mit der Hand den Versuch, die Last vom Brette abzuheben.

Dabei zeigt es sich, dass jeder Zug an der Schnur A B im allgemeinen sofort eine Änderung der Spannung von A C zur Folge hat, und dass eine solche Änderung nur d a n n n i c h t eintritt, wenn die Richtung von A B senkrecht zur Ebene des Brettes gewählt wird. Daraus geht hervor, dass die Unterstützung durch die schiefe Ebene des Brettes nur eine solche Kraft ersetzen kann, welche zu dieser Ebene senkrecht steht. Zieht man also senkrecht zur Ebene des Brettes unter Verwendung eines Dynamometers an Stelle der Schnur A B, bis die Walze gerade vom Brette abgehoben wird, so erhält man die Grösse der durch den Widerstand des Brettes ersetzten Kraft.

Fig. 26 a

Fig. 26 b.

Der im vorausgehenden angedeutete Versuch kann ohne weiteres als Faustversuch durchgeführt werden. Eine bequeme und exakte Ausführung desselben ist in der auf Seite 3 erwähnten Abhandlung beschrieben.

Besonders anschaulich ist der nachfolgende Wandtafelversuch: Man befestigt (Fig. 26) an passender Stelle der vertikalen Wandtafel eine kreisförmige Kartonscheibe vom Durchmesser der Walze und zieht auf der Tafel einen geraden Strich m n von beliebiger Neigung so, dass er die Scheibe von unten berührt. Ausserdem werden noch durch den Mittelpunkt a der Scheibe die Vertikale a v, die zu m n Senkrechte a p und auf der andern Seite von a v der Strahl a q in beliebiger Richtung gezogen; es ist dann $\measuredangle$ v a p gleich dem Neigungswinkel α der Geraden m n mit der Horizontalen; $\measuredangle$ v a q $= \beta$ beliebig.

Man bringt zunächst die (wie in Fig. 24) an zwei Dynamometern hängende Walze dicht vor der Wandtafel in solche Lage, dass sie die Kartonscheibe deckt, und dass die Richtungen der durch Ziehen an den Dynamometern ausgeübten Kräfte K_1 und K_2 mit ap und aq zusammenfallen. Sodann wird, während die Walze sich in dieser Gleichgewichts-Stellung befindet, ein kleiner Wandträger mit ebenem glattem Deckbrett (Fig. 26 b) so an die Wandtafel angelegt, dass die Kante MN desselben in der Gegend der Papierscheibe in die Gerade mn fällt, also die Walze an der oberen Fläche des Trägers anliegt. Entfernt man hierauf das in der Richtung ap ($\perp$ mn) gehaltene Dynamometer, so ruht die Last auf dem Träger, ohne ihren Ort (vor der Kartonscheibe) zu verändern, also auch ohne Änderung der Komponente K_2; d. h. die Komponente K_1 kann ohne Änderung von K_2 ersetzt werden durch den Widerstand eines Brettes, dessen Ebene auf K_1 senkrecht steht.

Bringt man das zuvor entfernte Dynamometer wieder zur Anwendung und macht man den Versuch, die Last wieder vom Träger gerade abzuheben, so erkennt man, dass dies ohne Änderung von K_2 (welche sich sofort durch Vor- oder Rückwärtsrollen der Walze kundgibt) nur dann möglich ist, wenn dabei in der Richtung ap $\perp$ mn gezogen wird, woraus hervorgeht, dass der Widerstand des Brettes nur eine solche Kraft ersetzen kann, deren Richtung auf der Ebene desselben senkrecht steht.

30. Die schiefe Ebene. Aus dem Vorausgehenden geht hervor, dass unter Verwendung eines geneigten ebenen Brettes eine Last durch eine einzige von der Vertikalen abweichende Kraft K_2 im Gleichgewicht erhalten und aufwärts bewegt, also gehoben werden kann. Ein solches ebenes Brett, welches hinreichende Festigkeit besitzt, um den nötigen Widerstand ($= K_1$) auszuüben, stellt daher eine einfache Maschine dar: die schiefe Ebene. Zieht man in Figur 26a nr senkrecht zur Horizontalen mo, so heisst mn die Länge (l), nr die zugehörige Höhe (h), mo die zugehörige Basis (b) der durch mn dargestellten schiefen Ebene (eigentlich eines Stückes der schiefen Ebene); ferner heisst $\measuredangle$ nmr $= \alpha$ die Neigung und das Verhältnis nr : nm die Steigung derselben.

Es sei nun die Aufgabe vorgelegt, die Grösse der Kraft K_2 zu bestimmen, durch welche eine auf einer schiefen Ebene von gegebenem Neigungswinkel α liegende Last L im Gleichgewicht gehalten werden kann, wenn jene Kraft K_2 mit der Vertikalen den Winkel β [also mit der Horizontalen den Winkel $90^0 - \beta$ und mit der schiefen Ebene selbst den Winkel $90^0 - (\alpha + \beta)$] bilden soll. Die Last ist dabei gedacht in Form einer Walze, damit der Einfluss der Reibung nicht in Betracht gezogen werden muss.

Da nach dem Vorausgehenden der Widerstand der schiefen Ebene bereits eine Kraft K_1 ersetzt, welche in der Mitte der Achse (Schwer-

punkt der Last) der Walze angreift und zur schiefen Ebene senkrecht ist, so hat man die eine zur Haltung der Last nötige Kraft R = L nach dem Satze vom Kräfteparallelogramm in zwei Komponenten K_1 und K_2 zu zerlegen, von denen die erstere um den Winkel α, die andere um den Winkel β von der Vertikalen abweicht.

Die geometrische Lösung dieser Aufgabe ist in Fig. 26 a dargestellt: ad ist die eine vertikale Kraft R = L, ab und ac sind die Komponenten K_1 und K_2, durch welche R ersetzt werden kann. Da die Komponente K_1 (ab) durch den Widerstand der schiefen Ebene ausgeübt wird, so kann die Last durch die andere Komponente K_2 (ac) allein im Gleichgewicht gehalten werden.

Aus der Art der Bestimmung des Punktes c folgt, dass K_2 (ac) seinen kleinsten Wert hat, wenn aq $\perp$ ap, also $\parallel$ mn ist, d. h. wenn K_2 zur schiefen Ebene parallel ist. Soll also eine Last L auf einer schiefen Ebene von gegebenem Neigungswinkel α durch eine möglichst kleine Kraft K_2 im Gleichgewicht gehalten werden, so muss diese **Kraft zur schiefen Ebene parallel sein.**

Für diesen Fall ergeben sich durch geometrische Betrachtungen folgende einfache Beziehungen: Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke acd und nrm folgt

$$ac : cd : ad = nr : rm : mn.$$

Bezeichnet man die Seiten des letzteren Dreieckes, welche beziehungsweise die Höhe, Basis und Länge der schiefen Ebene darstellen, entsprechend mit h, b und l und beachtet man, dass die Seiten des $\triangle$ acd beziehungsweise die Grösse von K_2, K_1 und L darstellen, so erhält man:

$$K_2 : K_1 : L = h : b : l,$$

woraus unter anderm folgt

$K_2 = \dfrac{L}{\left(\dfrac{l}{h}\right)}$, d. h. für eine zur schiefen Ebene parallele Kraft ist

das Übersetzungsverhältnis der Kräfte $q = \dfrac{l}{h}$.

31. Hebung einer Last mit Hilfe einer schiefen Ebene. Die zu hebende Last hat an und für sich das Bestreben zu fallen, ihr Ziel ist dabei der Mittelpunkt der Erde. Wird eine Last von L kg um h m vertikal (also in der Richtung des Erdradius) gehoben, so wird sie dabei (auf dem kürzesten Wege) um h m von ihrem Ziele entfernt; die hiezu erforderliche Arbeit beträgt (L . h) mkg. Diesen einfachsten Fall bietet z. B. die Hebung einer Last mittels eines Wellrades oder eines Flaschenzuges.

Wird eine Last auf einer schiefen Ebene um ein Stück l = mn fortbewegt, so kommt sie gerade so weit, als wenn sie zuerst um die

zugehörige Basis b = mr horizontal verschoben und sodann um die zugehörige Höhe h = rn vertikal gehoben würde: von ihrem Ziele entfernt wird sie nur um die zu l gehörige Höhe h.

Geschieht die Fortbewegung auf der schiefen Ebene mit Hilfe einer zu derselben parallelen Kraft K, so muss diese offenbar den Weg l = mn zurücklegen, also eine Arbeit von (K . l) mkg leisten.

Was nun die Grösse dieser Kraft K anlangt, so beschränken wir uns auf den idealen Fall, dass kein Reibungswiderstand zu überwinden wäre. Dieser Fall ist, wenn die Last die Form der oben beschriebenen Walze hat, bei sorgfältiger Ausführung derselben, sowie bei Benützung einer entsprechend glatten und ebenen Bahn annähernd gegeben: Macht man nämlich den Versuch, eine solche Walze zunächst auf horizontaler und sodann auf geneigter Bahn gleichmässig und langsam fortzubewegen, so zeigt das Dynamometer im ersten Falle überhaupt keine nennenswerte Spannung, im zweiten nur eine Spannung, welche nicht merkbar grösser ist als diejenige, welche zuvor erforderlich war, um die Walze auf der geneigten Bahn nur im Gleichgewichte zu erhalten. Für eine Walze auf geneigter glatter Bahn ist also die zur Fortbewegung erforderliche Kraft $K = \frac{L}{q}$, wobei $q = \frac{l}{h}$ das Übersetzungsverhältnis der Kräfte darstellt.

Es ist demnach die von dieser Kraft zu leistende Arbeit $A_K = K \cdot l = \frac{L}{q} \cdot l = L \cdot h$, d. h. wenn eine Last auf einer schiefen Ebene um ein Stück l aufwärts bewegt werden soll, so ist die an und für sich — d. h. wenn die Reibung nicht inbetracht kommt — zu leistende Arbeit gerade so gross, als wenn die gleiche Last um die zugehörige Höhe h vertikal zu heben wäre. Mit anderen Worten: *als Weg der Last kommt nur inbetracht die Strecke h, um welche die Last von ihrem Ziele entfernt wird.* Daraus folgt sodann, dass das Übersetzungsverhältnis der Wege bei der schiefen Ebene $\left(p = \frac{W_K}{W_L}\right)$ durch $\frac{l}{h}$ dargestellt ist, also wie bei den Hebelmaschinen mit dem Übersetzungsverhältnis der Kräfte übereinstimmt. Die in No. 22 besprochenen Beziehungen gelten sonach auch für die schiefe Ebene und ihre besonderen Formen.

32. **Nachtrag zu 25: Gleichgewicht dreier Kräfte, welche auf einen Punkt wirken.** Aus den in 25 erhaltenen Resultaten lässt sich ohne weiteres der nachfolgende allgemeine Satz deduzieren: Wenn drei in einer beliebigen Ebene liegende Kräfte K_1, K_2 und K_3, welche auf einen Punkt wirken, sich gegenseitig Gleichgewicht halten — wie in 25 L, K_1 und K_2 in vertikaler Ebene —, so ist jede der Resultante der

Fig. 27.

beiden andern entgegengesetzt gleich; projiziert man (Fig. 27) zwei derselben etwa K_1 (ab) und K_2 (ac), auf die Richtung der dritten Kraft K_3 (ad), so sind jedesmal die Projizierenden (bb_1 und cc_1) unter sich und die Summe (bez. Differenz) der Projektionen (ab_1 und ac_1) der dritten Kraft (ad) entgegengesetzt gleich.

Die Richtigkeit dieser Beziehungen lässt sich mit verhältnismässig einfachen Mitteln auf folgende Art bestätigen (Fig. 28):

Fig. 28.

Drei Dynamometer D_1, D_2 und D_3 werden an niedrigen Stativen S_1, S_2 und S_3 mit schweren Füssen in gleicher Höhe über dem Tische horizontal befestigt, indem sie in die kurzen entsprechend stark federnden Röhrchen R_1, R_2 und R_3 eingeschoben werden.

Man stellt die Stative zunächst so auf den Tisch, dass die freien Enden der Dynamometer einander zugekehrt sind und verbindet die Enden der Messdrähte durch einen gemeinsamen Ring, dessen Mitte im folgenden den Angriffspunkt der drei Kräfte darstellt. Verschiebt man sodann zwei der Stative auf dem Tische beliebig weit vom Ringe weg, und dreht dieselben so, dass die Achsen der Dynamometer nach der Mitte des Ringes gerichtet sind, so sind durch die Spannungen der Messdrähte drei in der Mitte des Ringes angreifende, in horizontaler Ebene liegende Kräfte dargestellt, welche sich gegenseitig Gleichgewicht halten. Die

Stellhülsen der Dynamometer sind natürlich auch hier so zu verschieben, dass die Verlängerungen der Messdrähte, durch welche die Grösse der drei Kräfte angegeben wird, von der Mitte des Ringes aus zu messen sind.

Unter die ausgezogenen Messdrähte wird sodann der „Messtisch“ T eingeschoben; derselbe besteht aus einer Platte (Zinkscheibe) von ca. 40 cm Durchmesser, welche mittels eines Ansatzes auf das Stativ S gesteckt ist, so dass sie in horizontaler Ebene gedreht werden kann. Die Platte T trägt in der Mitte einen ausziehbaren Stift M und ist auf ihrer oberen Fläche in qcm geteilt, beziehungsweise mit Koordinatenpapier überzogen; beim Aufkleben ist darauf zu achten, dass zwei stärker zu zeichnende Hauptteilungslinien Durchmesser der kreisförmigen Platte werden. Die Höhe des Messtisches wird so gewählt, dass die obere mit der Teilung versehene Fläche dicht unter den Messdrähten liegt, ohne diese zu berühren.

Man verschiebt den Tisch zunächst so, dass die Mitte der Platte gerade unter der Mitte des Ringes liegt, also der nachträglich eingesetzte Stift M vom Ringe gleichmässig umschlossen wird. Hierauf dreht man die Platte so, dass eine der Hauptteilungslinien der Reihe nach mit den Richtungen der drei Messdrähte zusammenfällt, und liest jedesmal ab:

1) die Verlängerung (a d) desjenigen Messdrahtes, auf welchen die Hauptteilungslinie gerade eingestellt ist;
2) die Projektionen ($a\,b_1$ und $a\,c_1$) der Verlängerungen der beiden andern Messdrähte auf die Richtung des ersten;
3) die Grösse der zugehörigen Projizierenden $b\,b_1$ und $c\,c_1$.

Nachdem auf solche Weise die obigen Beziehungen für die zufällig gewählten Kräfte und Winkel bestätigt sind, hat man zur Herstellung anderer Kräfte und Winkel nur die Stative S_1, S_2 und S_3 beliebig auf dem Experimentiertische zu verschieben, dieselben wieder so zu drehen, dass die Achsen der Dynamometer nach der Mitte des Ringes gerichtet sind, und hierauf durch Verschiebung der Dynamometer in den Röhren R die Messdrähte so einzustellen, dass der Ring den Mittelstift M wieder gleichmässig umschliesst: die letzte „feine“ Einstellung geschieht am bequemsten durch entsprechende Verschiebung des Messtisches T.

Die beschriebene Vorrichtung kann bei festgestellter Platte des Messtisches auch zur Ausführung der in 24 etc. dargestellten Versuche dienen, indem die Platte die Stelle der Wandtafel vertritt. Auf die Platte wird ein Stück weissen Papiers ausgebreitet und mit Klebwachs befestigt; die Grösse der Kräfte kann mit Hilfe des Bleistiftes markiert werden, so dass die Ausführung der Versuche ungleich exakter wird. Ausserdem gestaltet sich dieselbe bequemer, da man die Messdrähte nicht mit den Händen gespannt zu halten braucht. Im übrigen verdient selbstverständlich die Wandtafelmethode im Unterrichte den Vorzug.

Durch vorausgehende Beschreibung und durch Fig. 28 ist die Vorrichtung so dargestellt, wie sie vom Verfasser aus vorhandenen Stücken in kurzer Zeit selbst zusammengestellt werden konnte. Eine bequemere und noch in anderen Beziehungen brauchbare Form würde sich ergeben, wenn die Stative S_1, S_2 und S_3, statt auf besonderen Füssen, an horizontalen, um S drehbaren Armen angebracht würden. Dies hätte unter anderm den Vorteil, dass die ganze Vorrichtung am gemeinsamen Fusse S aufgehoben und in beliebiger Stellung gehalten, also die Ebene der drei Kräfte beliebig gewählt werden könnte.

Das Gestelle B der auf Seite 3 erwähnten Apparate kann hiezu mit dem gleichen Vorteile ohne weiteres verwendet werden.

Inhaltsangabe.

I.

Einleitung in die Lehre von den einfachen Maschinen.

II.

Das Hebelprinzip und die Hebelmaschinen.

III.

Das Parallelogramm-Prinzip.

1511

Alexander Ziwet

Jahres-Bericht

über den Zustand

des

Königlichen Friedrich-Wilhelms-Gymnasium

zu Köln

während des

Schuljahres 1859—60,

erstattet von

Professor Hoß,

Oberlehrer des Gymnasiums.

Mit einer wissenschaftlichen Abhandlung aus der analytischen Mechanik vom Hülfslehrer Serf.

Köln, 1860.

Druck von M. DuMont-Schauberg.

Ueber

die Bewegung eines materiellen Punctes auf der Oberfläche eines homogenen Rotations-Ellipsoids

in Folge der von der Masse des letzteren nach dem Newton'schen Gesetze auf ihn ausgeübten Anziehung.

I.

1. Es sei P ein Punct im Innern eines auf seine Axen bezogenen Rotations-Ellipsoids, seine Coordinaten seien α, β, γ, seine Masse sei gleich der Massen-Einheit. Man denke sich durch das Ellipsoid eine unendlich große Menge unendlich naher Kugelflächen gelegt, deren gemeinschaftliches Centrum sich in P befindet, irgend eine dieser Kugelflächen durch Längenkreise, deren Ebenen sich in einem der X-Axe parallelen Durchmesser schneiden, und durch Parallelkreise, deren Ebenen der YZ-Ebene parallel sind, in unendlich kleine Quadrate getheilt und von P aus durch die Ecken derselben bis zur Oberfläche des Ellipsoids verlängerte Radivectoren gezogen. Hierdurch zerfällt das Ellipsoid in unendlich kleine Parallelepipeda, deren Inhalt ausgedrückt wird durch

$$\varrho^2 \, d\varrho \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi,$$

in welchem Ausdrucke ϱ die Länge des jedesmaligen Radiusvectors, d. h. die jedesmalige Entfernung eines solchen Parallelepipedons von P, ϑ den Winkel, den die Richtung dieses Radiusvectors mit der Richtung der positiven x, und φ den Winkel bezeichnet, den seine Projection auf die YZ-Ebene mit der Richtung der positiven y bildet. Versteht man ferner unter δ die Dichtigkeit des Ellipsoids und unter K die Größe derjenigen Anziehung, welche die Massen-Einheit in der Einheit der Entfernung auf P ausübt, so hat man für die Anziehung irgend eines der parallelepipedischen Volumen-Elemente auf P den Ausdruck

$$K\delta \cdot d\varrho \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Diejenigen Parallelepipeda, deren entsprechende Kanten Theile eben derselben Radivectoren sind, bilden zusammen eine von P bis zur Oberfläche des Ellipsoids reichende Pyramide. Bezeichnet man die Seitenkante einer solchen durch r, so ergibt sich als Anziehung derselben auf P:

$$K\delta \cdot \sin\vartheta d\vartheta d\varphi \int_0^r d\varrho = K\delta \cdot r \sin\vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Ist r' die Verlängerung von r über P bis zur Oberfläche des Ellipsoids, und sind ξ, η, ζ die Winkel, welche die Richtung von r mit den Richtungen der positiven x, y und z bildet, so hat man als Anziehung einer zweiten Pyramide, deren Kanten die Verlängerungen der Kanten der ersten sind,

$$K\delta \cdot r' \sin\vartheta d\vartheta d\varphi,$$

und als den Axen parallele Componenten der Gesammt-Anziehung, welche die Doppelpyramide auf P ausübt:

$$(r-r')\; K\delta \cdot \cos\xi \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$
$$(r-r')\; K\delta \cdot \cos\eta \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$
$$(r-r')\; K\delta \cdot \cos\zeta \sin\vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Da nun für jeden Punct der Oberfläche des Ellipsoids

$$x = \alpha + r \cos \xi$$
$$y = \beta + r \cos \eta$$
$$z = \gamma + r \cos \zeta$$

ist, so erhält man durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung des Ellipsoids:

$$\frac{\alpha^2 + 2\alpha r \cos\xi + r^2 \cos^2\xi}{a^2} + \frac{\beta^2 + \gamma^2 + 2r(\beta\cos\eta + \gamma\cos\zeta) + r^2(\cos^2\eta + \cos^2\zeta)}{b^2} = 1.$$

Hieraus ergibt sich:

$$r = -\frac{b^2\alpha\cos\xi + a^2(\beta\cos\eta + \gamma\cos\zeta)}{b^2\cos^2\xi + a^2(\cos^2\eta + \cos^2\zeta)}$$
$$\pm \sqrt{\left[\frac{b^2\alpha\cos\xi + a^2(\beta\cos\eta + \gamma\cos\zeta)}{b^2\cos^2\xi + a^2(\cos^2\eta + \cos^2\zeta)}\right]^2 - \frac{b^2\alpha^2 + a^2(\beta^2 + \gamma^2) - a^2b^2}{b^2\cos^2\xi + a^2(\cos^2\eta + \cos^2\zeta)}}.$$

Man erhält hieraus leicht den Werth von r', indem man statt der Winkel ξ, η, ζ ihre Supplemente, also statt $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ die entgegengesetzten Werthe substituirt. Da die Länge eines Radiusvectors etwas Positives ist, die Wurzelgröße also nur mit dem oberen Vorzeichen genommen werden kann, so ergibt sich

$$r - r' = -2\frac{b^2\alpha\cos\xi + a^2(\beta\cos\eta + \gamma\cos\zeta)}{b^2\cos^2\xi + a^2(\cos^2\eta + \cos^2\zeta)}$$

Berücksichtigt man ferner, daß $\cos\xi = \cos\vartheta$, $\cos\eta = \sin\vartheta\cos\varphi$, $\cos\zeta = \sin\vartheta\sin\varphi$ ist, und substituirt man diese Werthe in die für die Gesammt-Anziehung der Doppelpyramide gefundenen Ausdrücke, so gehen dieselben in folgende über:

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{2K\delta\cdot\sin\vartheta\cos\vartheta d\vartheta\left[b^2\alpha\cos\vartheta + a^2\sin\vartheta(\beta\cos\varphi + \gamma\sin\varphi)\right]d\varphi}{a^2\sin^2\vartheta + b^2\cos^2\vartheta} \\ -\dfrac{2K\delta\cdot\sin^2\vartheta d\vartheta\left[b^2\alpha\cos\vartheta + a^2\sin\vartheta(\beta\cos\varphi + \gamma\sin\varphi)\right]\cos\varphi\, d\varphi}{a^2\sin^2\vartheta + b^2\cos^2\vartheta} \\ -\dfrac{2K\delta\cdot\sin^2\vartheta d\vartheta\left[b^2\alpha\cos\vartheta + a^2\sin\vartheta(\beta\cos\varphi + \gamma\sin\varphi)\right]\sin\varphi\, d\varphi}{a^2\sin^2\vartheta + b^2\cos^2\vartheta} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Summirt man die Anziehungs-Componenten sämmtlicher Doppelpyramiden, in welche das Ellipsoid zerlegt ist, so erhält man die Componenten der Gesammt-Anziehung des letzteren. Zu diesem Zwecke hat man r alle Richtungen um P zu geben, die Werthe zu addiren, welche dadurch jeder der Ausdrücke (1) annimmt, und die Summe durch 2 zu dividiren. Da hierbei ϑ alle Werthe von 0 bis π, φ alle Werthe von 0 bis 2π erhält, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$X = -K\delta\int_0^\pi \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta}{a^2\sin^2\vartheta + b^2\cos^2\vartheta}\int_0^{2\pi}\left[b^2\alpha\cos\vartheta + a^2\sin\vartheta(\beta\cos\varphi + \gamma\sin\varphi)\right]d\varphi$$

$$Y = -K\delta\int_0^\pi \frac{\sin^2\vartheta d\vartheta}{a^2\sin^2\vartheta + b^2\cos^2\vartheta}\int_0^{2\pi}\left[b^2\alpha\cos\vartheta + a^2\sin\vartheta(\beta\cos\varphi + \gamma\sin\varphi)\right]\cos\varphi\, d\varphi$$

$$Z = -K\delta\int_0^\pi \frac{\sin^2\vartheta d\vartheta}{a^2\sin^2\vartheta + b^2\cos^2\vartheta}\int_0^{2\pi}\left[b^2\alpha\cos\vartheta + a^2\sin\vartheta(\beta\cos\varphi + \gamma\sin\varphi)\right]\sin\varphi\, d\varphi.$$

Führt man die Integration über φ aus, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} X = -2b^2\alpha\pi K\delta\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin\vartheta\cos^2\vartheta d\vartheta}{a^2\sin^2\vartheta + b^2\cos^2\vartheta} \\ Y = -a^2\beta\pi K\delta\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin^3\vartheta d\vartheta}{a^2\sin^2\vartheta + b^2\cos^2\vartheta} \\ Z = -a^2\gamma\pi K\delta\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin^3\vartheta d\vartheta}{a^2\sin^2\vartheta + b^2\cos^2\vartheta} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Um die Integration über ϑ auszuführen, muß man verschiedene Wege einschlagen, je nachdem das Ellipsoid abgeplattet oder gestreckt, also b größer oder kleiner als a ist. Nimmt man zuerst $b > a$ und setzt

$$\cos\vartheta = x\sqrt{\frac{a^2}{b^2-a^2}},$$

so ist

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\vartheta\cos^2\vartheta\, d\vartheta}{a^2\sin^2\vartheta + b^2\cos^2\vartheta} =$$

$$-\frac{1}{b^2-a^2}\sqrt{\frac{a^2}{b^2-a^2}}\int_{+\sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2}}}^{-\sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2}}} \frac{x^2dx}{1+x^2} = \frac{2}{b^2-a^2}\left(1-\sqrt{\frac{a^2}{b^2-a^2}}\ \operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2}}\right) \cdots\cdots \quad (3)$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^3\vartheta\, d\vartheta}{a^2\sin^2\vartheta + b^2\cos^2\vartheta} =$$

$$\frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{a^2}{b^2-a^2}}\int_{+\sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2}}}^{-\sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2}}} \frac{\frac{a^2x^2}{b^2-a^2}-1}{1+x^2}\,dx = \frac{2}{b^2-a^2}\left(\frac{b^2}{a^2}\sqrt{\frac{a^2}{b^2-a^2}}\ \operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2}} - 1\right) \cdots\cdots \quad (4)$$

Nimmt man sodann $a > b$ und setzt

$$\cos\vartheta = x\sqrt{\frac{a^2}{a^2-b^2}},$$

so ist

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos^2\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta}{a^2\sin^2\vartheta + b^2\cos^2\vartheta} =$$

$$\frac{1}{a^2-b^2}\sqrt{\frac{a^2}{a^2-b^2}}\int_{+\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}}^{-\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}} \frac{x^2dx}{x^2-1} = \frac{2}{a^2-b^2}\left(\sqrt{\frac{a^2}{a^2-b^2}}\ \log\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b} - 1\right) \cdots \quad (5)$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^3\vartheta\, d\vartheta}{a^2\sin^2\vartheta + b^2\cos^2\vartheta} =$$

$$\frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{a^2}{a^2-b^2}}\int_{+\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}}^{-\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}}\frac{1-\frac{a^2x^2}{a^2-b^2}}{x^2-1}\,dx=\frac{2}{a^2-b^2}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\sqrt{\frac{a^2}{a^2-b^2}}\,log\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)\quad\ldots\ldots\ldots\ (6)$$

Substituirt man endlich die mit (3), (4), (5) und (6) bezeichneten Werthe in die Gleichungen (2), so ergeben sich für die den Axen parallelen Componenten der Anziehung eines Rotations-Ellipsoids auf einen Punct in seinem Innern folgende Ausdrücke:

1. Für das abgeplattete Rotations-Ellipsoid:

$$\left.\begin{aligned}X&=-\frac{4\pi b^2\alpha K\delta}{b^2-a^2}\left(1-\sqrt{\frac{a^2}{b^2-a^2}}\,arc\ tang\sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2}}\right)\\Y&=-\frac{2\pi a^2\beta K\delta}{b^2-a^2}\left(\frac{b^2}{a^2}\sqrt{\frac{a^2}{b^2-a^2}}\,arc\ tang\sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2}}-1\right)\\Z&=-\frac{2\pi a^2\gamma K\delta}{b^2-a^2}\left(\frac{b^2}{a^2}\sqrt{\frac{a^2}{b^2-a^2}}\,arc\ tang\sqrt{\frac{b^2-a^2}{a^2}}-1\right)\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ (I)$$

2. Für das gestreckte Rotations-Ellipsoid:

$$\left.\begin{aligned}X&=-\frac{4\pi b^2\alpha K\delta}{a^2-b^2}\left(\sqrt{\frac{a^2}{a^2-b^2}}\,log\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}-1\right)\\Y&=-\frac{2\pi a^2\beta K\delta}{a^2-b^2}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\sqrt{\frac{a^2}{a^2-b^2}}\,log\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)\\Z&=-\frac{2\pi a^2\gamma K\delta}{a^2-b^2}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\sqrt{\frac{a^2}{a^2-b^2}}\,log\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ (II)$$

2. Befindet sich zwischen dem Puncte P und der Oberfläche des Ellipsoids eine andere ähnliche und ähnlich liegende ellipsoidische Fläche, und heißen die Axen der letzteren a_1 und b_1, so erhält man die Componenten der Anziehung, welche die von ihr eingeschlossene Masse auf P ausübt, indem man in den Formeln (I) und (II) überall a mit a_1 und b mit b_1 vertauscht. Da aber die Aehnlichkeit beider Flächen die Gleichung

$$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}$$

zur Folge hat, so wird durch diese Substitution die Größe obiger Werthe nicht geändert. Hieraus folgt, daß die Summe der Wirkungen sämmtlicher Elemente einer zwischen zwei ähnlichen und ähnlich liegenden ellipsoidischen Rotationsflächen enthaltenen homogenen Schicht auf einen Punct innerhalb ihrer inneren Begränzungsfläche gleich Null ist.

3. Liegt der Punct P nicht im Innern, sondern auf der Oberfläche des Rotations-Ellipsoids, so kann man dasselbe ganz auf die oben angegebene Art in eine unendlich große Anzahl von Pyramiden zerlegen,

deren Spitzen sich in P befinden. Für die Componenten der von einer solchen auf P ausgeübten Anziehung ergeben sich die Ausdrücke

$$K\delta \cdot r\cos\xi\sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$
$$K\delta \cdot r\cos\eta\sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$
$$K\delta \cdot r\cos\zeta\sin\vartheta d\vartheta d\varphi,$$

welche mit den durch (1) bezeichneten vollkommen übereinstimmen, da, wie sich leicht zeigen läßt, r in diesem Falle den Werth

$$-2\frac{b^2\alpha\cos\xi + a^2(\beta\cos\eta + \gamma\cos\zeta)}{b^2\cos^2\xi + a^2(\cos^2\eta + \cos^2\zeta)}$$

hat. Da nun für supplementare Werthe der Winkel ξ, η, ζ die Ausdrücke (1) sich nicht ändern, während von zwei supplementaren Richtungen um P stets nur eine die Richtung eines r ist, so erhellt, daß man auch hier die Componenten der Gesammt-Anziehung findet, indem man in den Ausdrücken (1) den Winkeln ξ, η, ζ alle Werthe von 0 bis π ertheilt, die Werthe, welche dadurch jeder der drei Ausdrücke annimmt, summirt und die Summen durch 2 dividirt. Es folgt daraus, daß die mit (I) und (II) bezeichneten Gleichungen auch für die Componenten derjenigen Anziehung gelten, welche ein Rotations-Ellipsoid auf einen Punct seiner Oberfläche ausübt.

II.

1. Bezeichnet man der Kürze wegen den Werth von X durch $-\alpha p$, den von Y durch $-\beta q$, den von Z durch $-\gamma q$, wobei die Werthe p und q für das abgeplattete Ellipsoid aus den Gleichungen (I), für das gestreckte aus den Gleichungen (II) sich ergeben; sind ferner x, y, z die Coordinaten eines Punctes P auf der Oberfläche eines Rotations-Ellipsoids, welcher sich auf dieser ohne Reibung bewegen kann und außer der Anziehung des Ellipsoids keiner anderen Kraft unterworfen ist, als einer normal auf die Oberfläche gerichteten, von ihr fortwährend erzeugten Kraft N, welche den Punct hindert, sie zu verlassen, und bringt man endlich die Gleichung des Ellipsoids auf die Form $f(x, y, z) = 0$, so kann nur für diejenigen Werthe von x, y und z Gleichgewicht Statt finden, welche der Gleichung

$$-pxdx - qydy - qzdz + \frac{N\left[\frac{df(x,y,z)}{dx}dx + \frac{df(x,y,z)}{dy}dy + \frac{df(x,y,z)}{dz}dz\right]}{\sqrt{\left[\frac{df(x,y,z)}{dx}\right]^2 + \left[\frac{df(x,y,z)}{dy}\right]^2 + \left[\frac{df(x,y,z)}{dz}\right]^2}} = 0,$$

oder, da das letzte Glied auf der linken Seite gleich Null ist, der Gleichung

$$-pxdx - qydy - qzdz = 0$$

genügen. Subtrahirt man diese Gleichung von der mit $-\frac{q}{a^2}$ multiplicirten Differential-Gleichung des Ellipsoids, so erhält man

$$\frac{a^2p - b^2q}{a^2} x dx = 0,$$

woraus folgt:

$$\frac{a^2p - b^2q}{a^2} x = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Addirt man ferner obige Gleichung zu der mit $\frac{p}{b^2}$ multiplicirten Differential-Gleichung des Ellipsoids, so erhält man

$$\frac{a^2p - b^2q}{b^2} y\, dy + \frac{a^2p - b^2q}{b^2} z\, dz = 0,$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a^2p - b^2q}{b^2} y = 0 \\ \frac{a^2p - b^2q}{b^2} z = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

Bevor hieraus weitere Schlüsse gezogen werden können, ist es nöthig, die Werthe von

$$\frac{a^2p - b^2q}{a^2} \quad \text{und} \quad \frac{a^2p - b^2q}{b^2}$$

einer näheren Prüfung zu unterziehen. Man erhält für das abgeplattete Rotations-Ellipsoid aus den Gleichungen (I):

$$\frac{a^2p - b^2q}{a^2} = \frac{2\pi b^2 K\delta}{b^2 - a^2}\left(3 - \frac{2a^2 + b^2}{a^2}\sqrt{\frac{a^2}{a^2 - b^2}}\, arc\ tang \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{a^2}}\right)$$

$$\frac{a^2p - b^2q}{b^2} = \frac{2\pi a^2 K\delta}{b^2 - a^2}\left(3 - \frac{2a^2 + b^2}{a^2}\sqrt{\frac{a^2}{a^2 - b^2}}\, arc\ tang \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{a^2}}\right).$$

Multiplicirt man den in beiden Gleichungen übereinstimmenden eingeklammerten Factor der rechten Seite mit

$$\frac{a^2}{2a^2 + b^2}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{a^2}}$$

und nimmt von dem Producte

$$\frac{3a^2}{2a^2 + b^2}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{a^2}} - arc\ tang \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{a^2}}$$

den ersten Differential-Quotienten nach b, so erhält man

$$\frac{4a(a^2 - b^2)\sqrt{b^2 - a^2}}{b(2a^2 + b^2)^2}.$$

Für alle Werthe von b, welche größer sind als a, ist also der erste Differential-Quotient negativ, mithin die Function selbst abnehmend, also von Null verschieden und negativ, da sie für $b = a$ verschwindet. Hieraus folgt, daß auch

$$\frac{a^2p - b^2q}{a^2} \text{ und } \frac{a^2p - b^2q}{b^2}$$

von Null verschieden und negativ sind.

Für das gestreckte Rotations-Ellipsoid erhält man aus den Gleichungen (II):

$$\frac{a^2p - b^2q}{a^2} = \frac{2\pi b^2 K\delta}{a^2 - b^2}\left(\frac{2a^2 + b^2}{a^2}\sqrt{\frac{a^2}{a^2 - b^2}}\, log\, \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} - 3\right)$$

$$\frac{a^2p - b^2q}{b^2} = \frac{2\pi a^2 K\delta}{a^2 - b^2}\left(\frac{2a^2 + b^2}{a^2}\sqrt{\frac{a^2}{a^2 - b^2}}\, log\, \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} - 3\right).$$

Multiplicirt man den in beiden Gleichungen übereinstimmenden eingeklammerten Factor der rechten Seite mit

$$\frac{a^2}{2a^2 + b^2}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}},$$

und nimmt von dem Producte

$$log\, \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} - \frac{3a^2}{2a^2 + b^2}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

den ersten Differential-Quotienten nach a, so erhält man

$$\frac{4(a^2 - b^2)\sqrt{a^2 - b^2}}{(2a^2 + b^2)^2}.$$

Für alle Werthe von a, welche größer sind als b, ist somit der erste Differential-Quotient positiv, mithin die Function selbst zunehmend, also von Null verschieden und positiv, da sie für $a = b$ verschwindet. Es folgt hieraus, daß auch

$$\frac{a^2p - b^2q}{a^2} \text{ und } \frac{a^2p - b^2q}{b^2}$$

von Null verschieden und positiv sind.

Wenden wir diese Resultate auf die Gleichungen (7) und (8) an, so ergibt sich, daß der ersteren nur dann genügt wird, wenn x, den letzteren, wenn y und z gleich Null sind. Der Punct P wird also unter den gemachten Voraussetzungen nur dann im Gleichgewichte sein, wenn er sich auf dem Durchschnitte der YZ-Ebene mit der Oberfläche (dem Aequator) oder in den Endpuncten der Rotations-Axe (den Polen) befindet. In allen anderen Lagen wird der Punct eine Bewegung annehmen, zu deren Bestimmung wir im Folgenden schreiten.

2. Bezeichnet man mit t die veränderliche Zeit und mit x, y, z die laufenden Coordinaten der Trajektorie, so finden folgende Gleichungen Statt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= -px + \frac{N\dfrac{df(x,y,z)}{dx}}{\sqrt{\left[\dfrac{df(x,y,z)}{dx}\right]^2+\left[\dfrac{df(x,y,z)}{dy}\right]^2+\left[\dfrac{df(x,y,z)}{dz}\right]^2}}\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= -qy + \frac{N\dfrac{df(x,y,z)}{dy}}{\sqrt{\left[\dfrac{df(x,y,z)}{dx}\right]^2+\left[\dfrac{df(x,y,z)}{dy}\right]^2+\left[\dfrac{df(x,y,z)}{dz}\right]^2}}\\
\frac{d^2z}{dt^2} &= -qz + \frac{N\dfrac{df(x,y,z)}{dz}}{\sqrt{\left[\dfrac{df(x,y,z)}{dx}\right]^2+\left[\dfrac{df(x,y,z)}{dy}\right]^2+\left[\dfrac{df(x,y,z)}{dz}\right]^2}}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (III)$$

Addirt man diese Gleichungen, nachdem man die erste mit $2\frac{dx}{dt}$, die zweite mit $2\frac{dy}{dt}$, die dritte mit $2\frac{dz}{dt}$ multiplicirt hat, so erhält man

$$2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2} = -2px\frac{dx}{dt} - 2qy\frac{dy}{dt} - 2qz\frac{dz}{dt},$$

und hieraus durch Integration

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = -px^2 - qy^2 - qz^2 + const.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist der Ausdruck für das Quadrat der veränderlichen Geschwindigkeit. Nennt man diese v, so ist

$$v^2 = -px^2 - q(y^2 + z^2) + const.$$

Heißen α, β, γ die Coordinaten der Anfangslage des Punctes P, und ist V die demselben ertheilte Anfangs-Geschwindigkeit in der Tangential-Ebene, so erhält man durch Substitution dieser Werthe in die vorige Gleichung

$$V^2 = -p\alpha^2 - q(\beta^2 + \gamma^2) + const,$$

woraus folgt:

$$const = V^2 + p\alpha^2 + q(\beta^2 + \gamma^2).$$

Demnach ist

$$v^2 = V^2 + p\alpha^2 + q(\beta^2 + \gamma^2) - px^2 - q(y^2 + z^2),$$

oder

$$v^2 = V^2 + (\alpha^2 - x^2)\frac{a^2p - b^2q}{a^2} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

und

$$v = \pm\sqrt{V^2 + (\alpha^2 - x^2)\frac{a^2p - b^2q}{a^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

Das positive Vorzeichen ist zu nehmen, wenn die Bewegung die Abscissen vergrößert, das negative, wenn sie dieselben verkleinert.

Bei der Discussion dieser Gleichung nehmen wir zuerst an, daß $V = 0$ ist, in welchem Falle dieselbe übergeht in

$$v = \pm \sqrt{(\alpha^2 - x^2)\frac{a^2p - b^2q}{a^2}}.$$

Da $\frac{a^2p - b^2q}{a^2}$, wie früher (II. 1.) gezeigt wurde, beim abgeplatteten Ellipsoid negativ, beim gestreckten positiv ist, so wird im ersten Falle v reell für solche x, deren absoluter Werth größer, im zweiten für solche, deren absoluter Werth kleiner als der von α ist. Beim abgeplatteten Ellipsoid entfernt sich also der Punct P mit wachsender Geschwindigkeit vom Aequator, bis diese in seiner größten Entfernung von letzterem ihr Maximum erreicht hat; hierauf nähert er sich demselben wieder mit allmählich verminderter Geschwindigkeit, welche endlich zu Null wird, sobald er in eine Lage gekommen ist, für welche x wieder gleich α ist. Beim gestreckten Ellipsoid nähert sich P dem Aequator mit wachsender Geschwindigkeit, passirt denselben mit dem Maximum der letzteren und entfernt sich dann wieder von ihm, während die Geschwindigkeit abnimmt und in einer Lage gleich Null wird, für welche x gleich $-\alpha$ ist. Sobald das Letztere geschehen ist, beginnt in beiden Fällen die Bewegung von Neuem in entgegengesetzter Richtung; sie ist also pendelförmig.

Setzen wir sodann den Fall, daß V von Null verschieden ist, so treten andere Verhältnisse ein, je nachdem V^2 größer oder kleiner als ein gewisser Gränzwerth, oder gleich demselben ist. Dieser Werth ist für das abgeplattete Ellipsoid

$$\frac{\alpha^2(b^2q - a^2p)}{a^2},$$

für das gestreckte

$$\frac{(a^2 - \alpha^2)(a^2p - b^2q)}{a^2}.$$

Ist V^2 kleiner als derselbe, so wird die Geschwindigkeit zum ersten Male gleich Null für

$$x = \pm \sqrt{\alpha^2 + \frac{a^2V^2}{a^2p - b^2q}},$$

wobei zu bemerken ist, daß beim abgeplatteten Rotations-Ellipsoid das Vorzeichen von x sich nach dem von α richtet, während beim gestreckten das positive Vorzeichen zu nehmen ist, wenn V die Abscissen zu vergrößern, das negative, wenn V dieselben zu verkleinern sucht. Hat der Punct diese Lage einmal erreicht, so ist seine fernere Bewegung so, als ob er ohne Anfangs-Geschwindigkeit von ihr ausgegangen wäre; die Bewegung ist also auch in diesem Falle pendelförmig.

Ist V^2 größer als jener Gränzwerth, so kann die Geschwindigkeit in keiner Lage gleich Null werden; die Bewegung hört auf, pendelförmig zu sein, und P bewegt sich ununterbrochen in derselben Richtung um das Ellipsoid herum.

Ist endlich V^2 gleich dem Gränzwerthe, so würde die Geschwindigkeit beim gestreckten Ellipsoid für $x = \pm a$, beim abgeplatteten für $x = 0$ zu Null werden, der Punct also im ersten Falle in einem der beiden Pole, im zweiten auf dem Aequator zur Ruhe kommen, wenn nicht, wie wir später (II. 5.) zeigen werden, dieses eine Gränzlage wäre, gegen welche P anstrebt, ohne sie jemals erreichen zu können.

3. Multiplicirt man von den Gleichungen (III) die erste mit z, die zweite mit y, zieht darauf die erste von der zweiten ab und berücksichtigt, daß

$$z\frac{df(x,y,z)}{dy} = y\frac{df(x,y,z)}{dz}$$

ist, so erhält man

$$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist der vollständige Differential-Quotient von

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}$$

nach t, mithin ist

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Bezeichnet r die Projection irgend eines vom Coordinaten-Anfangspuncte nach einem Puncte der Oberfläche gezogenen Radiusvectors auf die YZ-Ebene und φ den Winkel, den diese Projection mit der positiven Richtung der Y-Axe bildet, so hat man

$$r\cos\varphi = y, \quad r\sin\varphi = z,$$

folglich

$$\cos\varphi\frac{dr}{dt} - r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

$$\sin\varphi\frac{dr}{dt} + r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dz}{dt},$$

woraus

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Versteht man ferner unter F den von der Projection des Radiusvectors der Trajectorie auf der YZ-Ebene beschriebenen Flächenraum, so ist

$$dF = \tfrac{1}{2}r^2 d\varphi,$$

mithin

$$\frac{dF}{dt} = \tfrac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt} = \tfrac{1}{2}k,$$

und

$$F = \tfrac{1}{2}kt + const,$$

oder, wenn man Zeit und Flächenräume vom Anfange der Bewegung zu zählen anfängt,

$$F = \tfrac{1}{2} kt.$$

Die Projection des Radiusvectors auf die *YZ*-Ebene beschreibt also in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume.

Um die Constante k zu bestimmen, zerlege man die Anfangsgeschwindigkeit V in zwei Componenten, von denen die eine senkrecht auf eine Ebene gerichtet ist, welche durch die X-Axe und die Anfangslage von P geht, die andere in dieser Ebene selbst liegt. Heißt ψ der Winkel, den die erste Componente mit der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit bildet, und bezeichnet man dasjenige r, welches der Abscisse α entspricht, mit ϱ, so ist der Weg, den die Projection des Punctes P auf die *YZ*-Ebene in Folge jener ersten Componente der Anfangsgeschwindigkeit in einem unendlich kleinen Zeitmomente zurücklegt, gleich $V\cos\psi\,dt$. Andererseits läßt sich dieser Weg auch durch $\varrho\,d\varphi$ ausdrücken, woraus folgt:

$$\varrho\,d\varphi = V\cos\psi\,dt; \quad \varrho^2 \frac{d\varphi}{dt} = \varrho V\cos\psi,$$

folglich mit Berücksichtigung der Gleichung (12)

$$k = \varrho V\cos\psi = V\cos\psi \cdot \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \alpha^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13).$$

4. Differentiirt man die Gleichung des Rotations-Ellipsoids nach t und quadrirt das Resultat, so erhält man

$$b^4 x^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = a^4 \left[y^2 \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 2yz\,\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dz}{dt} + z^2 \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right]$$

Addirt man hierzu die ins Quadrat erhobene und darauf mit a^4 multiplicirte Gleichung (11), so ist

$$b^4 x^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + a^4 k^2 = a^4 (y^2 + z^2) \left[\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right].$$

Nun ist aber

$$y^2 + z^2 = \frac{b^2 (a^2 - x^2)}{a^2},$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = c^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = V^2 + (a^2 - x^2)\frac{a^2 p - b^2 q}{a^2} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2;$$

folglich

$$b^4 x^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + a^4 k^2 = a^2 b^2 (a^2 - x^2) \left[V^2 + (a^2 - x^2)\frac{a^2 p - b^2 q}{a^2} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \right],$$

und nach Substitution des Werthes von k aus der Gleichung (13)

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{(a^2 p - b^2 q)\left[x^4 - x^2 \left(a^2 + \alpha^2 + \frac{a^2 V^2}{a^2 p - b^2 q} \right) + a^2 \alpha^2 \right] + a^2 V^2 \left[\alpha^2 - (a^2 - \alpha^2)\cos^2\psi \right]}{x^2 (b^2 - a^2) + a^4}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{dt}{dx} = \pm \sqrt{\frac{x^2(b^2-a^2)+a^4}{(a^2p-b^2q)\left[x^4-x^2\left(a^2+\alpha^2+\frac{a^2V^2}{a^2p-b^2q}\right)+a^2\alpha^2\right]+a^2V^2[a^2-(a^2-\alpha^2)\cos^2\psi]}},$$

und wenn man die Wurzelgröße durch $F(x)$ bezeichnet,

$$t = \pm \int F(x)\,dx + const \quad \ldots\ldots\ldots \quad (IV).$$

Das positive Vorzeichen ist zu nehmen, wenn für wachsendes t auch x wächst, das negative, wenn das Entgegengesetzte der Fall ist. Das Integral ist im Allgemeinen in endlicher Form nicht ausführbar.

Da $r^2 = \frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}$, und $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ ist, so erhält man durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung (12)

$$\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2} \cdot \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = k,$$

oder

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{a^2k}{b^2(a^2-x^2)} \cdot \frac{dt}{dx},$$

und wenn man statt $\frac{dt}{dx}$ seinen Werth setzt,

$$\frac{d\varphi}{dx} = \pm \frac{a^2kF(x)}{b^2(a^2-x^2)},$$

$$\varphi = \pm \frac{a^2k}{b^2} \int \frac{F(x)\,dx}{a^2-x^2} + const \quad \ldots\ldots\ldots \quad (V).$$

Ist die Anfangsgeschwindigkeit gleich Null, oder fällt ihre Richtung in eine durch die Anfangslage von P und die Abscissenaxe gehende Ebene, so ist nach (13) k gleich Null und mithin φ constant. In diesem Falle bewegt sich der Punct auf dem Durchschnitt jener Ebene mit der Oberfläche; seine Bahn ist also die Ellipse, durch deren Drehung das Ellipsoid entstanden ist. Ist k von Null verschieden, so ist die Integration in endlicher Form nicht ausführbar.

5. Der einzige Fall, in welchem die rechte Seite der Gleichung (IV) in endlicher Form integrirt werden kann, ist derjenige, in welchem die Anfangsgeschwindigkeit den in II. 2. erwähnten Gränzwerth hat, beim gestreckten Ellipsoid also

$$V = \pm \sqrt{\frac{(a^2-\alpha^2)(a^2p-b^2q)}{a^2}},$$

beim abgeplatteten

$$V = \pm \sqrt{\frac{a^2(b^2q - a^2p)}{a^2}}$$

und außerdem $\psi = 90^0$, k also gleich Null ist. Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (IV), so erhält man für das gestreckte Ellipsoid

$$dt = \pm \sqrt{\frac{a^4 - x^2(a^2 - b^2)}{(a^2p - b^2q)(a^2 - x^2)^2}} \cdot dx,$$

woraus folgt:

$$t\sqrt{a^2p - b^2q} = \pm \int \frac{\sqrt{a^4 - x^2(a^2 - b^2)}}{a^2 - x^2} \cdot dx + const \quad \ldots \ldots \quad (14).$$

Für das abgeplattete Ellipsoid erhält man

$$dt = \pm \sqrt{\frac{a^4 + x^2(b^2 - a^2)}{(b^2q - a^2p)x^2(a^2 - x^2)}} \cdot dx.$$

Führt man in diesem Ausdrucke statt der Abscisse x die Projection r des Radiusvectors auf die YZ-Ebene ein, welche mit x durch die Gleichung

$$r^2 = \frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2}$$

verbunden ist, so erhält man

$$\sqrt{\frac{a^4 + x^2(b^2 - a^2)}{(b^2q - a^2p)\, x^2(a^2 - x^2)}}\, dx = \pm \sqrt{\frac{b^4 - r^2(b^2 - a^2)}{(b^2q - a^2p)(b^2 - r^2)^2}} \cdot dr.$$

Da nun die Gleichung

$$r^2 = \frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2}$$

für jeden positiven oder negativen Werth von x besteht, mag man r positiv oder negativ nehmen, aus der aus jener sich ergebenden Gleichung

$$\frac{dr}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{r}$$

aber folgt, daß dr und dx entgegengesetzte Vorzeichen haben, wenn r und x gleiche, dagegen gleiche, wenn letztere entgegengesetzte Vorzeichen haben, so ist entweder

$$t\sqrt{b^2q-a^2p} = \mp\int\frac{\sqrt{b^4-r^2(b^2-a^2)}}{b^2-r^2}\cdot dr + const,$$

oder

$$t\sqrt{b^2q-a^2p} = \pm\int\frac{\sqrt{b^4-r^2(b^2-a^2)}}{b^2-r^2}\cdot dr + const,$$

je nachdem man r das Vorzeichen von x oder das entgegengesetzte ertheilt. In beiden Fällen ist das obere Vorzeichen zu nehmen, wenn die Bewegung die Abscissen vergrößert, das untere, wenn sie dieselben verkleinert.

Um die Integration auf der rechten Seite der Gleichung (14) auszuführen, setze man

$$a^2+\sqrt{a^4-x^2(a^2-b^2)} = zx\sqrt{a^2-b^2} \qquad (15)$$

Durch diese Substitution erhält man:

$$\int\frac{\sqrt{a^4-x^2(a^2-b^2)}}{a^2-x^2}\cdot dx = \sqrt{a^2-b^2}\int\frac{-2a^2(1-z^2)^2\,dz}{[a^2(1-z^2)^2-b^2(1+z^2)^2](1+z^2)}.$$

Bringt man den Nenner des zu integrirenden Ausdruckes auf die Form

$$[a(1-z^2)+b(1+z^2)]\;[a(1-z^2)-b(1+z^2)]\,(1+z^2),$$

so erkennt man, daß er sich in folgende Factoren zerlegen läßt:

$$a^2-b^2,\quad z-\sqrt{\frac{a+b}{a-b}},\quad z+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}},\quad z-\sqrt{\frac{a-b}{a+b}},\quad z+\sqrt{\frac{a-b}{a+b}},\quad 1+z^2.$$

Demnach ergibt sich durch Zerlegung in Partialbrüche:

$$\sqrt{a^2-b^2}\int\frac{-2a^2(1-z^2)^2\,dz}{[a^2(1-z^2)^2-b^2(1+z^2)^2](1+z^2)}$$

$$=\frac{b}{2}\left[\int\frac{dz}{z+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}}+\int\frac{dz}{z-\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}}-\int\frac{dz}{z-\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}}-\int\frac{dz}{z+\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}}\right]-2\sqrt{a^2-b^2}\int\frac{dz}{1+z^2}$$

$$=\frac{b}{2}\log\frac{z^2+\frac{2bz}{\sqrt{a^2-b^2}}-1}{z^2-\frac{2bz}{\sqrt{a^2-b^2}}-1}-2\sqrt{a^2-b^2}\cdot arc\,tang\;z+const.$$

Substituirt man in dem letzten Ausdrucke für z seinen Werth aus der Gleichung (15), so erhält man für das gestreckte Ellipsoid

$$t\sqrt{a^2p-b^2q} =$$

$$\pm\left[\frac{b}{2}\log\frac{(a^2+bx)\left(a^2+\sqrt{a^4-x^2(a^2-b^2)}\right)-x^2(a^2-b^2)}{(a^2-bx)\left(a^2+\sqrt{a^4-x^2(a^2-b^2)}\right)-x^2(a^2-b^2)}-2\sqrt{a^2-b^2}\cdot arc\,tang\,\frac{a^2+\sqrt{a^4-x^2(a^2-b^2)}}{x\sqrt{a^2-b^2}}\right]+const.,$$

und wenn man hierin x mit r und a und b mit einander vertauscht, für das abgeplattete Ellipsoid:

$$t\sqrt{b^2q-a^2p} =$$

$$\mp\left[\frac{a}{2}\log\frac{(b^2+ar)\left(b^2+\sqrt{b^4-r^2(b^2-a^2)}\right)-r^2(b^2-a^2)}{(b^2-ar)\left(b^2+\sqrt{b^4-r^2(b^2-a^2)}\right)-r^2(b^2-a^2)}-2\sqrt{b^2-a^2}\cdot arc\,tang\,\frac{b^2+\sqrt{b^4-r^2(b^2-a^2)}}{r\sqrt{b^2-a^2}}\right]+const.,$$

oder:

$$t\sqrt{b^2q-a^2p} =$$

$$\pm\left[\frac{a}{2}\log\frac{(b^2+ar)\left(b^2+\sqrt{b^4-r^2(b^2-a^2)}\right)-r^2(b^2-a^2)}{(b^2-ar)\left(b^2+\sqrt{b^4-r^2(b^2-a^2)}\right)-r^2(b^2-a^2)}-2\sqrt{b^2-a^2}\cdot arc\,tang\,\frac{b^2+\sqrt{b^4-r^2(b^2-a^2)}}{r\sqrt{b^2-a^2}}\right]+const.,$$

je nachdem man r das Vorzeichen von x oder das entgegengesetzte ertheilt.

Wie schon früher (II. 2.) bemerkt wurde, wird unter den für V gemachten Annahmen beim gestreckten Ellipsoid für $x = \pm a$, beim abgeplatteten für $x = 0$ die Geschwindigkeit zu Null. Heißt T die Zeit, nach welcher dieses geschieht, so ist für das gestreckte Ellipsoid,

A. wenn V positiv ist:

$$T\sqrt{a^2p-b^2q} = \int_\alpha^a \frac{\sqrt{a^4-x^2(a^2-b^2)}}{a^2-x^2}\cdot dx = \infty;$$

B. wenn V negativ ist:

$$T\sqrt{a^2p-b^2q} = -\int_\alpha^{-a} \frac{\sqrt{a^4-x^2(a^2-b^2)}}{a^2-x^2}\cdot dx = \infty.$$

Nimmt man beim abgeplatteten Ellipsoid zuerst den Fall, daß man r das Vorzeichen von x ertheilt, so ist

A. wenn α und V positiv sind:

$$T\sqrt{b^2q-a^2p} = -\int\limits_{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\alpha^2}}^{0} \frac{\sqrt{b^4-r^2(b^2-a^2)}}{b^2-r^2}\cdot dr + \int\limits_{0}^{b} \frac{\sqrt{b^4-r^2(b^2-a^2)}}{b^2-r^2}\cdot dr = \infty;$$

B. wenn α positiv, V negativ ist:

$$T\sqrt{b^2q-a^2p} = \int\limits_{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\alpha^2}}^{b} \frac{\sqrt{b^4-r^2(b^2-a^2)}}{b^2-r^2}\cdot dr = \infty;$$

C. wenn α negativ, V positiv ist:

$$T\sqrt{b^2q-a^2p} = -\int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\alpha^2}}^{-b} \frac{\sqrt{b^4-r^2(b^2-a^2)}}{b^2-r^2}\cdot dr = \infty;$$

D. wenn α und V negativ sind:

$$T\sqrt{b^2q-a^2p} = \int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\alpha^2}}^{0} \frac{\sqrt{b^4-r^2(b^2-a^2)}}{b^2-r^2}\cdot dr - \int\limits_{0}^{-b} \frac{\sqrt{b^4-r^2(b^2-a^2)}}{b^2-r^2}\cdot dr = \infty.$$

Ertheilt man zweitens r das entgegengesetzte Vorzeichen von x, so ist

A. wenn α und V positiv sind:

$$T\sqrt{b^2q-a^2p} = \int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\alpha^2}}^{0} \frac{\sqrt{b^4-r^2(b^2-a^2)}}{b^2-r^2}\cdot dr - \int\limits_{0}^{-b} \frac{\sqrt{b^4-r^2(b^2-a^2)}}{b^2-r^2}\cdot dr = \infty;$$

B. wenn α positiv, V negativ ist:

$$T\sqrt{b^2q-a^2p} = -\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\alpha^2}}^{-b} \frac{\sqrt{b^4-r^2(b^2-a^2)}}{b^2-r^2}\cdot dr = \infty;$$

C. wenn α negativ, V positiv ist:

$$T\sqrt{b^2q-a^2p} = \int_{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\alpha^2}}^{b} \frac{\sqrt{b^4-r^2(b^2-a^2)}}{b^2-r^2}\cdot dr = \infty;$$

D. wenn α und V negativ sind:

$$T\sqrt{b^2q-a^2p} = \int_{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\alpha^2}}^{0} \frac{\sqrt{b^4-r^2(b^2-a^2)}}{b^2-r^2}\cdot dr + \int_{0}^{b} \frac{\sqrt{b^4-r^2(b^2-a^2)}}{b^2-r^2}\cdot dr = \infty.$$

Ist also beim gestreckten Rotations-Ellipsoid die Anfangsgeschwindigkeit gleich

$$\pm\sqrt{\frac{(a^2-\alpha^2)(a^2p-b^2q)}{a^2}},$$

beim abgeplatteten gleich

$$\pm\sqrt{\frac{\alpha^2(b^2q-a^2p)}{a^2}},$$

und fällt ihre Richtung in eine durch P und die X-Axe gehende Ebene, so strebt im ersten Falle der Punct einem der beiden Pole, im zweiten dem Aequator unaufhörlich zu, ohne diese Lage jemals erreichen zu können.

6. Ist die Anfangs-Geschwindigkeit gleich Null, so geht die Gleichung (IV) in folgende über:

$$t = \pm\int\sqrt{\frac{x^2(b^2-a^2)+a^4}{(a^2p-b^2q)(x^4-x^2(a^2+\alpha^2)+a^2\alpha^2)}}\cdot dx + const.$$

Nennt man T die Dauer einer Schwingung, d. h. diejenige Zeit, welche P gebraucht, um von einer

Ruhelage zu der nächsten zu gelangen, und betrachtet man eine solche Schwingung, für welche dt und dx gleiche Vorzeichen haben, so ergibt sich für das gestreckte Ellipsoid

$$\tfrac{1}{2}\,T\sqrt{a^2p-b^2q} = \int_{\alpha}^{0}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{x^4-x^2(a^2+\alpha^2)+a^2\alpha^2}}\cdot dx.$$

Setzt man $x = \alpha \sin\vartheta$ und bezeichnet der Kürze wegen $\frac{a^2-b^2}{a^2}$ mit e^2, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\,T\sqrt{a^2p-b^2q} = a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\frac{a^2-\alpha^2e^2\sin^2\vartheta}{a^2-\alpha^2\sin^2\vartheta}}\cdot d\vartheta$$

$$= a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[1-\frac{\alpha^2e^2}{a^2}\sin^2\vartheta\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[1-\frac{\alpha^2}{a^2}\sin^2\vartheta\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot d\vartheta.$$

Bezeichnet man noch $\frac{\alpha^2}{a^2}$ mit ε^2 und entwickelt die beiden Factoren unter dem Integralzeichen nach dem binomischen Lehrsatze, so ist

$$[1-e^2\varepsilon^2\sin^2\vartheta]^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{e^2\varepsilon^2\sin^2\vartheta}{1.2}-\frac{e^4\varepsilon^4\sin^4\vartheta}{1.2.2^2}-\frac{1.3.e^6\varepsilon^6\sin^6\vartheta}{1.2.3.2^3}-\frac{1.3.5.e^8\varepsilon^8\sin^8\vartheta}{1.2.3.4.2^4}-\ldots\ldots$$

$$[1-\varepsilon^2\sin^2\vartheta]^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{\varepsilon^2\sin^2\vartheta}{1.2}+\frac{1.3.\varepsilon^4\sin^4\vartheta}{1.2.2^2}+\frac{1.3.5.\varepsilon^6\sin^6\vartheta}{1.2.3.2^3}+\frac{1.3.5.7.\varepsilon^8\sin^8\vartheta}{1.2.3.4.2^4}+\ldots\ldots$$

Multiplicirt man diese beiden Reihen mit einander, so erhält man:

$$[1-e^2\varepsilon^2\sin^2\vartheta]^{\frac{1}{2}}\,[1-\varepsilon^2\sin^2\vartheta]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$1+\frac{\varepsilon^2\sin^2\vartheta}{1.2}+\frac{1.3.\varepsilon^4\sin^4\vartheta}{1.2.2^2}+\frac{1.3.5\varepsilon^6\sin^6\vartheta}{1.2.3.2^3}+\frac{1.3.5.7\varepsilon^8\sin^8\vartheta}{1.2.3.4.2^4}+\ldots\ldots$$

$$-\frac{e^2\varepsilon^2}{1.2}\left[\sin^2\vartheta+\frac{\sin^4\vartheta}{1.2}+\frac{1.3.\sin^6\vartheta}{1.2.2^2}+\frac{1.3.5.\sin^8\vartheta}{1.2.3.2^3}+\ldots\ldots\right]$$

$$-\frac{e^4\varepsilon^4}{1.2.2^2}\left[\sin^4\vartheta+\frac{\sin^6\vartheta}{1.2}+\frac{1.3.\sin^8\vartheta}{1.2.2^2}+\ldots\ldots\right]$$

$$-\frac{1.3.e^6\varepsilon^6}{1.2.3.2^3}\left[\sin^6\vartheta+\frac{\sin^8\vartheta}{1.2}+\ldots\ldots\right]$$

$$-\frac{1.3.5.e^8\varepsilon^8}{1.2.3.4.2^4}\left[\sin^8\vartheta+\ldots\ldots\right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Alle diese Glieder sind mit $d\vartheta$ zu multipliciren und von $\frac{\pi}{2}$ bis π zu integriren. Vermittelst der Reductions-Formel

$$\int \sin^m \vartheta d\vartheta = -\frac{\sin^{m-1}\vartheta \cos\vartheta}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2}\vartheta d\vartheta$$

findet man aber:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^4 \vartheta d\vartheta = \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^6 \vartheta d\vartheta = \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\pi}{2} \text{ ꝛc.}$$

Demgemäß erhält man

$$\frac{1}{\pi a} T\sqrt{a^2p - b^2q} =$$

$$1 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3.\varepsilon^2}{2.4}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5.\varepsilon^3}{2.4.6}\right)^2 + \cdots\cdots + \left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)\varepsilon^n}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 + \cdots\cdots$$

$$-\frac{e^2\varepsilon^2}{1.2}\left[\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \frac{5}{6}\left(\frac{1.3.\varepsilon^2}{2.4}\right)^2 + \frac{7}{8}\left(\frac{1.3.5.\varepsilon^3}{2.4.6}\right)^2 + \cdots\cdots\right]$$

$$-\frac{e^4\varepsilon^4}{1.2.2^2}\left[\frac{1.3}{2.4} + \frac{3.5}{4.6}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \frac{5.7}{6.8}\left(\frac{1.3.\varepsilon^2}{2.4}\right)^2 + \cdots\cdots\right]$$

$$-\frac{1.3.e^6\varepsilon^6}{1.2.3.2^3}\left[\frac{1.3.5}{2.4.6} + \frac{3.5.7}{4.6.8}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \frac{5.7.9}{6.8.10}\left(\frac{1.3.\varepsilon^2}{2.4}\right)^2 + \cdots\cdots\right]$$

. . . .

$$-\frac{1.3.5\ldots.(2m-3)e^{2m}\varepsilon^{2m}}{1.2.3\ldots.m.2^m}\left[\frac{1.3.5\ldots.(2m-1)}{2.4.6\ldots.2m} + \frac{3.5.7\ldots.(2m+1)}{4.6.8\ldots.(2m+2)}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots\cdots + \frac{(2n+1)(2n+3)\ldots(2n+2m-1)}{(2n+2)(2n+4)\ldots(2n+2m)}\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)\varepsilon^n}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2 + \cdots\right]$$

. . . .

m bedeutet die Anzahl der Reihen, gerechnet von der zweiten; n die Anzahl der Glieder in den einzelnen Reihen, ebenfalls gerechnet vom jedesmaligen zweiten.

Sind die Schwingungen von geringem Ausschlag, ist also ε^2 sehr klein, so convergiren die gefundenen Reihen sehr stark. Für unendlich kleine Schwingungen erhält man

$$T = \frac{a\pi}{\sqrt{a^2 p - b^2 q}}.$$

Je kleiner demnach die Schwingungen sind, desto mehr nähert sich ihre Dauer einer constanten Gränze.

Für das abgeplattete Rotations-Ellipsoid ergeben ähnliche Betrachtungen ein ähnliches Resultat.

Val. Serf.

Schul-Nachrichten.

I. Allgemeine Lehrverfassung.

I. Oberprima. Ordinarius: Prof. Hoß.

Religion: 1) evangelische: Geschichte der christlichen Kirche nach Petri's Lehrbuch. Die Apostelgeschichte wurde größtentheils im Urtext gelesen. 2 Stunden. Regierungsrath Grashof; 2) katholische: Glaubenslehre: die Lehre von der Weltregierung; von dem Urstande, dem Sündenfalle, der Erbsünde und der Erlösung. Sittenlehre: die Pflichten des Christen gegen sich selbst und gegen den Nächsten. 2 St. Religionsl. Dr. Schlünkes. — Deutsch: Geschichte der deutschen Sprache und Literatur; Lectüre von Lessing's Laokoon; Erörterung einzelner Theile aus der Logik und der Theorie des Styls; Correctur der Aufsätze. 3 St. Oberl. Dr. Pfarrius. — Latein: Tacit. dialogus de Orr., Agricola und Germania; im Sommer Cic. de claris oratoribus. Schreibübungen anfänglich nach Dictaten, nachher nach Nägelsbach's Uebungen; außerdem wöchentlich ein Extemporale; Sprechübungen und freie Aufsätze. 6 St. der Ordinarius. Horat. Carm. lib. III u. IV und die Epoden mit Auswahl; repetirt wurden lib. I u. II; Sat. lib. I, 1, 4, 9; lib. II, 1. Zwölf Oden wurden auswendig gelernt. 2 St. Oberl. Haentjes. — Griechisch: Thuc. lib. II; Demosth. oratt. Olynth. 3, de Pace und die drei Philippischen Reden. 4 St. der Ordinarius. Hom. Il. XXI—XXIV. I. Griechische Extemporalien. 2 St. Gymnasiall. Dr. Weinkauff. — Französisch: Horace p. Corneille. L'avare p. Molière. Schriftliche und mündliche Uebersetzungen aus dem Uebungsbuche von Probst; Sprechübungen. 2 St. Oberl. Dr. Probst. — Hebräisch: Wiederholung der Formenlehre bis einschließlich sämmtlicher unregelmäßiger Verben nach Gesenius' Grammatik. Gelesen wurden aus Brückner's Lesebuch Seite 76—90 (Exod. 1—4), 101—109 (1, Sam. 16. 17. 18. 2, Sam. 7.) und einige kleine Psalmen. 2 St. Regierungsrath Grashof. — Geschichte: Geschichte der neueren Zeit nebst Repetition der Geschichte des Alterthums. 3 St. Oberl. Dr. Pfarrius. — Mathematik: Stereometrie; planimetrische und stereometrische Aufgaben; Combinationslehre mit Anwendung auf Wahrscheinlichkeitsrechnung; binomischer Lehrsatz mit ganzen positiven Exponenten. 4 St. Oberl. Feld. — Physik: Lehre vom Weltgebäude und Optik. 2 St. Oberl. Feld. — Turnen: im Winter: Geräthturnen, namentlich am Schwingel; im Sommer hauptsächlich Freispringen mit und ohne Stange, Hantelübungen und Gerwerfen, in 6 Riegen. 2 St. Oberl. Dr. Probst. — Gesang: vierstimmige Gesänge classischer Meister, Cantaten, Oratorien, Messen und Lieder für Männerstimmen. 2 St. Musik-Dir. Weber.

II. Unterprima. Ordinarius: Oberlehrer Dr. Probst.

Religion: combinirt mit Oberprima. — Deutsch: Geschichte der deutschen Literatur bis zur Reformation; Proben von den hervorragendsten Dichtungen dieser Periode wurden in der Schule gelesen und erklär

Correctur der Aufsätze nebst Anleitung zur Disposition derselben. 3 St. Oberl. Haentjes. — Latein: Cic. orat. pro Milone. Disputat. Tusc. lib. I und der Anfang von lib. V. Wöchentliche Exercitien, Extemporalien, lateinische Aufsätze, Vorträge, Sprechübungen. 6 St. der Ordinarius. Horat. aus Od. l. III u. IV und Epod. ausgewählte Oden (12 Oden wurden auswendig gelernt). Epist. I ep. 1—17. 2 St. Prof. Hoß. — Griechisch: Plutarchi Philopoemen et Pyrrhus. Xenoph. Memorab. I. 1. 2. II. 1, 21—34. 4. 6, 1—28. III, 6 u. 7. IV, 1, 2, 3 u. 8. Tempus und Moduslehre nach Buttmann, verbunden mit Schreibübungen. 4 St. der Ordinarius. Hom. Il. l. XIV—XXI; lib. I ohne Vorbereitung. 2 St. Oberl. Haentjes. — Französisch: Nouvelles pittoresque (Ausg. von Goebel). Récits historiques (Ausg. von Schwalb). Syntax des Infinitivs und Particips nach Knebel. Mündl. u. schriftl. Uebersetzungen aus Probst's Uebungsbuch. 2. Theil. 2 St. der Ordinarius. — Geschichte: Geschichte des Mittelalters nebst Repetition der Geschichte des Alterthums. 3 St. Oberl. Dr. Pfarrius. — Mathematik: Logarithmen; Trigonometrie; trigonometrische u. planimetrische Aufgaben; Gleichungen vom zweiten Grade mit mehreren Unbekannten; diophantische Gleichungen vom ersten Grade; Progressionen mit Anwendung auf Zinseszins- und Rentenrechnung. 4 St. Oberl. Feld. — Physik: Lehre vom Gleichgewichte und der Bewegung fester, tropfbar flüssiger und luftförmiger Körper, verbunden mit Aufgaben; Akustik. 2 St. Oberl. Feld. — Turnen: siehe Oberprima. — Gesang: wie Oberprima.

III. Obersecunda. Ordinarius: Oberlehrer Haentjes.

Religion: 1) katholische: die Lehre von den Vollkommenheiten und der Dreipersönlichkeit Gottes, so wie von den Pflichten gegen Gott. 2 St. Religionslehrer Dr. Schlünkes; 2) evangelische: Einleitung in die heilige Schrift Alten und Neuen Testamentes nach Petri's Lehrbuche. Memorirt wurden eine große Anzahl Psalmen und Sprüche. 2 St. Regierungsrath Grashof. — Deutsch: Erklärung u. Uebung im Vortrage von Gedichten aus Deycks' Sammlung; Herder's Cid, Schiller's Wilhelm Tell, die beiden Piccolomini und Wallenstein's Tod wurden in der Schule gelesen und erklärt. Correctur der Aufsätze. 2 St. der Ordinarius. — Latein: Liv. hist. l. XXX—XXXIII, im Winter 4, im Sommer 2 St., während in den 2 anderen Stunden Cic. ep. sel. ed. Süpfle mit Auswahl gelesen wurden. Auswendig gelernt wurden ausgewählte Capitel aus Livius. Aus Zumpt's Grammatik die Lehre von den temp. u. modis und einzelne Partieen aus der Syntaxis ornata. Wöchentlich ein Exercitium und ein Extemporale. 7 St. der Ordinarius. Virg. Aen. l. III. IV. V. (300 Verse). Memorirt wurden 100 Verse. 2 St. Oberl. Dr. Eckertz. — Griechisch: Ausgewählte Stücke aus den sechs ersten Büchern des Herodot; Grammatik nach Buttmann. 4 St. Oberl. Dr. Pfarrius. Hom. Odyss. XIV—XIX. Memorirt wurden 200 Verse. 2 St. der Ordinarius. — Französisch: Hist. de la première croisade p. Michaud c. VII bis zu Ende. Syntax nach Knebel bis zum Conjunctiv. Mündl. u. schriftl. Uebersetzungen aus Probst's Uebungsbuch. 2. Theil. 2 St. Oberl. Dr. Probst. — Hebräisch: Die Elementar- und Formenlehre bis zu den Verbis mit Gutturalen nach der Grammatik von Gesenius. Zu Uebungen im Lesen und Uebersetzen (1. Mos. I—III) diente das Lesebuch von Brückner. 2 St. Religionsl. Dr. Schlünkes. — Geschichte: Geschichte der Römer. 3 St. Oberl. Dr. Pfarrius. — Mathematik: Proportionalität der Figuren, Inhaltsbestimmung, Auflösung planimetrischer Aufgaben. Potenzen und Wurzeln, Gleichungen des ersten Grades mit mehreren und des zweiten Grades mit einer Unbekannten. 4 St. Oberl. Feld. — Physik: Lehre vom Magnetismus, der Elektricität und der Wärme nach dem Lehrbuche von Koppe. 2 St. Oberl. Feld. — Turnen: siehe Oberprima. — Gesang: wie Oberprima.

IV. Untersecunda. Ordinarius: Oberlehrer Dr. Eckertz.

Religion: comb. mit Obersecunda. — Deutsch: Wiederholung der Satzlehre. Erklärung von Stücken aus Deycks' Sammlung. Uebungen im Vortrage. Alle vier Wochen ein Aufsatz. 2 St. der Ordinarius. — Latein: Cic. or. pro imperio Cn. Pompeii (13 Capitel memorirt), or. pro S. Roscio Amerino. Sal. bellum jugurthinum (nicht ganz). Virg. Aen. l. I u. II. (150 Verse memorirt). Die Lehre vom Gebrauche der Casus, des Indicativs, Conjunctivs und der Participien nach Zumpt. Wöchentlich schriftl. u. mündl. Uebersetzungen aus Süpfle's Uebungsbuch. 10 St. der Ordinarius. — Griechisch: die regelmäßige u. unregelmäßige Formenlehre, die Casuslehre. 3 St. der Ordinarius, vom Mai ab Hülfsl. Dr. Behrns. Hom. Odyss. l. I, II, III (theilweise) 2 St. der Ordinarius. Xenoph. Cyrop. l. I u. II, anfänglich in 2 wöchentl. St., gegen Ende des Winter-Halbjahres 3 St. Prof. Hoß. — Französisch: Hist. d'Alexandre le Grand p. Rollin. c. 1—XIV. Syntax nach Knebel bis §. 89 (zeigende Fürw.). Mündl. und schriftl. Uebersetzungen aus Probst's Uebungsbuch, 2. Theil. 2 St. Oberl. Dr. Probst. — Geschichte: Geschichte

der alten Völker mit Ausschluß der Indier u. Juden; Geschichte Griechenlands bis zum peloponnes. Kriege. 3 St. Oberl. Haentjes. Im Sommer: Geschichte Griechenlands vom peloponnes. Kriege bis zur Stiftung des Aetol. Bundes. 3 St. Hülfsl. Dr. Behrns. — Mathematik: Wiederholung des Pensums der Tertia, Decimalbrüche, Proportionen, Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten. Lehre vom Kreis, Proportionalität der Linien, einfache planimetrische Aufgaben. 4 St. Oberl. Feld. — Turnen: siehe Oberprima. — Gesang: wie Oberprima.

V. Tertia. Ordinarius: Oberlehrer Oettinger.

Religion: 1) katholische: Wiederholung der Glaubenslehre; die Sittenlehre nach Ontrup's Katechismus. 2 St. Religionsl. Dr. Schlünkes; 2) evangelische: Geschichte des Apostels Paulus, Lesung der Briefe: 1. Thessal. u. 2. Timoth.; auch des Briefes Jakobi, aus denen größere Abschnitte memorirt wurden; auch die früher gelernten Kirchenlieder wurden wiederholt. 2 St. Regierungsr. Grashof. — Deutsch: Lesen und Erklärung prosaischer u. poetischer Musterstücke aus dem Lesebuche, mit daran geknüpften Excursen über die Satzlehre. Alle drei Wochen eine schriftliche Arbeit. Uebungen im mündlichen Vortrage. 2 St. der Ordinarius. — Latein: Wiederholung der Casuslehre, dann die übrige Syntax nach Siberti eingeübt an memorirten Beispielen der Grammatik, durch Extemporalien u. durch mündl. u. schriftl. Uebersetzungen aus Süpfle; wöchentl. Probearbeiten. Caes. de b. Gall. VII. VIII. 8 St. Gymnasiall. Dr. Weinkauff. Ausgewählte Stücke aus Siebelis' Tiroc. u. Ovid's Metamorph. (Delectus ed. Merkel), übersetzt gegen 1000 Verse, memorirt 230. Lehre von der Prosodie nach Siberti. 2 St. Im Winter Gymnasiall. Dr. Weinkauff, im Sommer Hülfsl. Dr. Behrns. — Griechisch: Wiederholung des Pensums der Quarta, die Verba auf $\mu\iota$ und die Anomala nach Buttmann; Uebersetzen aus dem griech. Elementarbuche von Dominicus, 1. u. 2. Abth. 6 St.; im Sommer 4 St., in den zwei anderen Stunden homerische Formenlehre u. Uebung im Lesen des Hexameters. Aus Odyss. IX. wurden 150 Verse übersetzt, 50 auswendig gelernt. Gymnasiall. Dr. Weinkauff. — Französisch: Wiederholung der Formenlehre bis zum regelm. Zeitwort, darauf die wichtigsten unregelmäßigen Zeitwörter nach Knebel, eingeübt an Beispielen aus Probst's Uebungsbuch. Gelesen wurden in Knebel's franz. Lesebuche die Sätze zur Einübung der Formenlehre, die Anekdoten, l'Hermite p. Voltaire, l'Humoriste p. Leclercq, Décheance de Louis XVI. p. Thiers, Entrée de Napoléon dans Moscou p. Ségur. 2 St. Im Winter Gymnasiall. Dr. Weinkauff, im Sommer Hülfsl. Dr. Behrns. — Geschichte u. Geographie: Die deutsche Geschichte; Hauptbegebenheiten aus der franz. u. engl. Geschichte; die brandenburgisch-preuß. Geschichte von ihrem Ursprunge bis auf den großen Kurfürsten; specieller von da bis auf die jetzige Zeit. Wiederholung der Geogr. von Europa; Asien u. America. 3 St. der Ordinarius. — Mathematik: Sätze über Producte, Quotienten und Brüche; Division mehrgl. Ausdrücke; Decimalbrüche. Uebungen hierüber in der Classe und zu Hause nach Heis. Sätze über die Eigenschaften der Dreiecke; Congruenz derselben; Sätze von den Vierecken, insbesondere von den Parallelogrammen; Vergleichung der Parallelogramme mit den Dreiecken in Rücksicht des Inhalts. 3 St. der Ordinarius. — Naturkunde: Zoologie u. Mineralogie. 2 St. Hülfsl. Serf. — Turnen: Geräthturnen, Laufen u. Springen in 8 Riegen. 2 St. Oberl. Dr. Probst. — Gesang: wie Oberprima.

VI. Quarta. Ordinarius: Gymnasiallehrer Dr. Kocks.

Religion: 1) katholische: Wiederholung des in Quinta durchgenommenen Theiles der Glaubenslehre; Fortsetzung u. Vollendung derselben mit der Lehre von der Gnade, den Gnadenmitteln und den letzten Dingen. 2 St. Religionsl. Dr. Schlünkes; 2) evangelische: die Apostelgeschichte wurde erklärt u. einzelne Stücke daraus memorirt, einige Psalmen gelernt. Einübung der Namen von den Büchern des neuen Testaments. Geographie des heiligen Landes nach Braselmann. 2 St. der Ordinarius. — Deutsch: Die Lehre vom Satzgefüge. Monatlich einen Aufsatz. Uebungen im Vortrage auswendig gelernter Gedichte und erzählter Abschnitte aus dem Lesebuche. 2 St. der Ordinarius. — Latein: die Syntaxis congruentiae und die Casuslehre; dazu die Capitel über die Ablativi absol., Gerundium, Gerundivum u. Supinum nach Siberti. Aus Nepos wurden im Winter-Halbjahre gelesen: Miltiades, Themistokles, Aristides, Pausanias, Cimon, Lysander u. theilweise Alcibiades; (im Sommer: Alcibiades (zu Ende), Thrasybulus, Conon, Epaminondas, Pelopidas, Agesilaus. 4 St. Hülfsl. Dr. Behrns). Die Lehre vom Hexameter, Pentameter und der lateinischen Prosodie nach Siberti; eingeübt wurde sie an dem Tiroc. von Siebelis, etwa 120 Hexameter wurden memorirt. 10 St. der Ordinarius. — Griechisch: die regelm. Formenlehre nach Buttmann und die entsprechenden Stücke aus dem Uebungsbuche von Dominicus. 6 St. der Ordinarius. — Französisch: Wiederholung des Pensums für Quinta u. besonders Einübung des Zeitwortes; schriftl. u. mündl. Uebersetzen

der deutschen Stücke von 1—34 aus Probst's Uebungsbuch. 2 St. Hülfsl. Berghaus. — Mathematik: Fortgesetzte Uebung im praktischen Zahlenrechnen, Anfangsgründe der Buchstabenrechnung; geometr. Anschauungslehre, Anfangsgründe der Planimetrie. 3 St. Oberl. Oettinger. — Geschichte u. Geographie: Hauptmomente aus der Geschichte der Staaten des Alterthums, allgemeine Kenntniß der griechischen u. römischen Geschichte. Die politische Geographie der deutschen Bundesstaaten, des österreichischen und preußischen Staates; von letzterem auch die administrative Eintheilung u. allgemeine statistische Notizen. 3 St. Oberl. Oettinger. — Zeichnen: Erklärung und Uebung der Grundbestandtheile der Formen. Zeichnen verschiedener Gegenstände perspectivischer Art nach Vorzeichnungen des Lehrers. Die Lehre von Licht und Schatten. Die Grundzüge von der Lehre der Perspective. Das Schattiren. 2 St. Zeichenl. Nagel. — Turnen: siehe Tertia. — Gesang: comb. mit Tertia.

VII. Quinta. Ordinarius: Hülfslehrer Serf.

Religion: 1) katholische: die Glaubenslehre bis zur Lehre von der Gnade nach Ontrup. 3 St. Religionsl. Dr. Schlünkes; 2) evangelische: biblische Geschichte des Neuen Testamentes nach Zahn. Die Bergpredigt wurde ganz gelernt, auch wurden 13 Kirchenlieder memorirt. 3 St. Regierungsr. Grashof. — Deutsch: Erklärung des Nothwendigsten aus der Lehre vom zusammengesetzten Satze mit beständiger Rücksichtnahme auf das Lateinische; orthographische Uebungen; Uebungen im Lesen und Wiedererzählen gelesener oder erzählter Stücke; alle 3 Wochen eine schriftl. Arbeit. Im Winter 2 St.; im Sommer 3 St. der Ordinarius. — Latein: Repetition der regelmäßigen, Einübung der unregelmäßigen Formenlehre mit Zugrundelegung des Uebungsbuches von Spieß; 16 Fabeln wurden memorirt; Erlernung von Vocabeln nach Meiring. Im Winter 10 St., im Sommer 9 St. der Ordinarius. — Französisch: die wichtigsten Theile aus der Formenlehre; schriftl. u. mündl. Uebersetzen der Stücke aus der praktischen Vorschule der franz. Sprache von Probst. 3 St. Hülfsl. Berghaus. — Geographie u. Geschichte: die Flüsse von Europa nach ihren Hauptabdachungen, specieller die von Deutschland; bildliche Darstellung einzelner Flußgebiete und Abdachungen aus dem Gedächtniß. Aus der Staatenkunde die südwestlichen und nordöstlichen Staaten von Europa. Das historisch Wichtigste wurde bei Gelegenheit an den geographischen Unterricht geknüpft. 2 St. Oberl. Oettinger. — Rechnen: Wiederholung der Bruchrechnung, Regeldetri mit Brüchen, Vertheilungs- und Zinsrechnung. 3 St. der Ordinarius. — Naturkunde: Beschreibung von Säugethieren u. Vögeln nach vorgezeigten ausgestopften Exemplaren; Pflanzenbeschreibung. 2 St. der Ordinarius. — Zeichnen: die allgemeinen Elemente, als: Kenntniß u. Uebung der Linien, Winkel u. Figuren. Die ersten Elemente der Linear-Perspective. Perspectivisches Zeichnen einfacher Gegenstände nach Vorzeichnungen an der Schultafel. Messen verschiedener Körper, Flächen und Linien nach dem Augenmaße. 2 St. Zeichenlehrer Nagel. — Schreiben: Nach Vorlegeblättern von Heinrigs und Grashof. 3 St. Hülfsl. Berghaus. — Turnen: Exercir- u. Freiübungen 2 St. der Ordinarius. — Gesang: dreistimmige Lieder guter Meister, nebst Vorübungen zum vierstimmigen Gesange. 2 St. Musik-Director Weber.

VIII. Sexta. Ordinarius: Hülfslehrer Berghaus.

Religion: 1) katholische: die biblische Geschichte des alten und neuen Bundes nach Kellermann. Die Lehre von den Eigenschaften Gottes und vom Bußsacramente. 3 St. Religionsl. Dr. Schlünkes; 2) evangelische: biblische Geschichte des alten Testamentes nach Zahn. Außer mehreren Psalmen wurden 12 Kirchenlieder memorirt und die zehn Gebote besonders erklärt. 3 St. Regierungsrath Grashof. — Deutsch: die Lehre vom einfachen Satze, von den Satzzeichen; Uebungen im Rechtschreiben und in der Anfertigung kleiner Erzählungen; Leseübungen und Vorträge kleiner Gedichte aus dem Lesebuche für das Friedr.-Wilh.-Gymnasium. 2 St. der Ordinarius. — Latein: das Wichtigste aus den Declinationen u. Conjugationen nach Siberti und nach dem Uebungsbuche von Spieß. 10 St. der Ordinarius. — Geographie u. Geschichte: Vorbegriffe der mathematischen Geographie, Grundzüge der klimatischen Verhältnisse; Kenntniß der fünf Hauptmeere, Inseln u. Halbinseln; Hauptländer der Erdtheile; Begriffe u. Erklärungen über die Unebenheiten der Erde; Gebirgszüge von Europa, specieller die von Deutschland; bildliche Darstellung derselben. Schilderungen einzelner hervorragender Ereignisse und Persönlichkeiten werden bei Gelegenheit des geogr. Unterrichtes mitgetheilt. 2 St. Oberl. Oettinger. — Rechnen: die Grundrechnungen mit ganzen unbenannten u. benannten Zahlen; die Grundrechnungen mit Brüchen. 4 St. Hülfsl. Serf. — Naturkunde: Beschreibung von Säugethieren und Vögeln nach vorgezeigten ausgestopften Exemplaren; Pflanzenbeschreibung. 2 St. Hülfsl. Serf. — Schreiben: nach Vorlegeblättern von Heinrigs. 3 St. der Ordinarius. — Zeichnen: die ersten Elemente, Kenntniß und Uebung der Linien, Winkel und Figuren. Geo-

metrisches Zeichnen einfacher Gegenstände nach Vorzeichnungen an der Schultafel. Das Augenmaß. Messen gerader Linien und gerader Flächen nach dem Augenmaße. 2 St. Zeichenlehrer Nagel. — Turnen: comb. mit Quinta. — Gesang: Elemente der Musik bis zum zweistimmigen Gesange, einschließlich zweistimmige Lieder von Nägeli. 2 St. Musik-Director Weber.

An dem für Tertia bis Oberprima eingerichteten Zeichen-Unterricht betheiligten sich freiwillig 22 Schüler.

Uebersichts-Tabelle

über die Verwendung der Lehrerkräfte und die Vertheilung des Unterrichtes *).

Lehrer.	Oberprima	Unterprima	Obersecunda	Untersecunda	Tertia	Quarta	Quinta	Sexta	Summe Stunden.
Hoß, Professor, Ord. Ia.	Latein 6 St. Griech. 4„	Latein 2 St.		Griech. 3 St.					15
Dr. Pfarrius, Oberlehrer.	Deutsch 3„ Geschichte 3„	Geschichte 3„	Griech. 4 St. Geschichte 3„						16
Grashof, Reg.-Rath, evangel. Rel.-Lehrer.	Religion 2 St. Hebräisch 2 „		Religion 2 St.		Relig. 2 St.		Relig. 3 St.	Relig. 3 St.	14
Dr. Schlünkes, kath. Rel.-Lehrer.	Religion 2 „		Religion 2 „ Hebr. 2 St.		Relig. 2„	Relig. 2 St.	Relig. 3„	Relig. 3„	16
Oettinger, Oberlehrer, Ord. III.					Deutsch 2„ Gesch. u. Geogr. 3„ Mathem. 3„	Geogr. u. Gesch. 3„ Mathem. 3„	Geogr. 2„	Geogr. 2„	18
Haentjes, Oberlehrer, Ord. IIa.	Latein 2 St.	Deutsch 3 St. Griech. 2„	Deutsch 2 St. Latein 7„ Griech. 2„						18
Dr. Probst, Oberlehrer, Ord. Ib.	Franz. 2 St.	Latein 6„ Griech. 4„ Franz. 2„	Franz. 2„	Franz. 2„	(leitet auch die Turnübungen in I—IV)				18
Dr. Eckertz, Oberlehrer, Ord. IIb.			Latein 2„	Deutsch 2„ Latein 10„ Griech. 2„					16
Feld, Oberlehrer.	Mathem. 4„ Physik 2„	Mathem. 4„ Physik 2„	Mathem. 4„ Physik 2„	Mathem. 4„					22
Dr. Weinkauff, Gymnasiallehrer.	Griechisch 2„			Latein 8„ Griech. 6„					16
Dr. Koch, Gymnasiallehrer, Ord. IV.						Relig. 2 St. Deutsch 2„ Latein 6„ Griech. 6„			16
Berghaus, Hülfslehrer, Ord. VI.						Franz. 2„	Franz. 3 St. Schreiben 3„	Deutsch 2 St. Latein 10„ Schreiben 3„	23
Serf, Hülfslehrer, Ord. V.	(leitet auch die Turnübungen in V u. VI)				Naturk. 2 St.		Deutsch 3„ Latein 9„ Rechnen 3„ Naturk. 2„	Rechnen 4„ Naturk. 2„	23
Dr. Behrns, Schulamts-Candidat.				Griech. 3„ Geschichte 3„	Latein 2 St. Franz. 2„	Latein 4„			14
Nagel, Zeichenlehrer.	Zeichnen (Oberprima bis Tertia) . . . 2 St.					Zeichnen 2„	Zeichnen 2„	Zeichnen 2„	8
Weber, Musik-Director, Gesanglehrer.	Gesang im ersten Cötus 2 St.						Gesang 2„	Gesang 2„	6

*) Nach dem Lectionsplane für den Sommer; die Abweichungen im Winter erhellen aus der vorangehenden Aufstellung der absolvirten Lehrpensa.

Zu freien Ausarbeitungen wurden in beiden Primen folgende Themata aufgegeben:

A. in Oberprima:

I. Lateinische, vom Prof. Hoß: 1. De causis et eventu belli inter Corcyraeos et Corinthios gesti. 2. Caesar Rubiconem transgressurus milites alloquitur. 3. Illustretur et amplificetur Horatianum illud: „Fortes creantur fortibus et bonis“ cet. 4. Pausanias gloriosam vitam turpi morte maculavit. 5. Uter plus damni patriae attulerit, Catilina an Alcibiades.

II. Deutsche, vom Oberlehrer Dr. Pfarrius: 1. a) Das Studium der Geschichte ein Beförderungsmittel opferwilliger Vaterlandsliebe. b) Die Stürme in der Natur ein Bild der Leiden im Menschenleben. 2. Wer an sich selbst bessert, bessert am Ganzen. 3. a) Ueber die Vergrößerung Brandenburgs durch den westphälischen Frieden und die Ursachen derselben. b) Ueber den Begriff und das Wesen der deutschen Heldensage. c) Lob der Genügsamkeit und Selbstbeschränkung. 4. a) Lob Heinrich's des Vogelstellers. b) Zu den theuersten Gemeingütern eines Volkes gehört seine Sprache. c) Ueber den Sinn des Ausspruches: „Der letzte Dichter ist der letzte Mensch!“ 5. Die Macht der Gewohnheit. 6. a) Ueber Veranlassung und Ausgang des zweiten Kreuzzuges. b) Erörterung des Sinnes des Sprüchwortes: „Es ist dafür gesorgt, daß die Bäume nicht in den Himmel wachsen!“ c) Der Schlaf ein Bild des Todes.

B. in Unterprima:

I. Lateinische, vom Oberl. Dr. Probst: 1. Philopoemen quibus maxime virtutibus praeditus fuerit, quid in republica gerenda spectaverit, quibus denique rebus ad consilia sua repraesentanda usus sit. 2. Ciceronem magistratu abeuntem vere iuravisse rempublicam atque urbem sua unius opera esse salvam. 3. P. Cornelius Scipio Africanus minor viri vere magni et civis de republica egregie meriti exemplar. 4. Rectene dixit Hannibal, non populum Romanum totiens caesum fugatumque, sed senatum Carthaginiensem obtrectatione atque invidia se vicisse? 5. Quibus de causis Cicero Epaminondam principem Graeciae dixerit? 6. Quas Cicero in primo Tusc. disput. capite commemorat virtutes, gravitatem, constantiam, magnitudinem animi, probitatem, fidem summas fuisse in pop. Romano exemplis ex hist. Rom. petitis probetur. 7. Εἷς οἰωνὸς ἄριστος ἀμύνεσθαι περὶ πάτρης.

II. Deutsche, vom Oberl. Haentjes: 1. Wer am Wege baut, hat viele Meister. 2. Ueber die Abhängigkeit des menschlichen Urtheils von der Neigung und der Leidenschaft. 3. Welche Vortheile gewährt uns das gesellige Leben? 4. Welche äußere Umstände waren es vornehmlich, durch welche die geistige Bildung der Griechen so früh befördert wurde? 5. Der Gedankengang in der Rede pro Milone. 6. Haben die Deutschen wirklich Grund, auf ihren Namen stolz zu sein? 7. Durch welche Umstände wurden bei den Phöniziern Schifffahrt und Handel befördert? 8. Durch welche Gründe bewegt die Gräfin Terzky Wallenstein, sich mit den Schweden zu verbinden? 9. Weßhalb ist der Verrath des Pausanias so auffallend? 10. Was du beginnst, beginn mit Vorsicht; was du thust, thue mit Umsicht, und was du beurtheilst, richte mit Nachsicht.

Themata zu den schriftlichen Abiturienten-Arbeiten.

1. Aus der Religionslehre: a) der katholischen: Von der Communion oder dem Genusse des heiligen Abendmahles; b) der evangelischen: Wie stimmt der Ausspruch Matth. 19. 17.: „Willst du aber zum Leben eingehen, so halte die Gebote!“ (verglichen mit Luc. 10. 28.) mit der Paulinischen Lehre von der Rechtfertigung durch den Glauben allein? (Röm. 3. 28. u. Ephes. 2. 8.—10.). 2. Deutsches: Ueber den Einfluß der klimatischen Verhältnisse eines Landes auf den Charakter seiner Bewohner. 3. Lateinisches: Quantum amor patriae valuerit ad rem publicam Atheniensium stabiliendam et augendam. 4. Mathematische: a) Das Volumen einer geraden quadratischen Pyramide beträgt 3200 Kubikfuß, ihre Gesammt-Oberfläche 1440 Quadratfuß. Wie groß ist die Seite der Grundfläche und wie groß die Höhe der Pyramide? b) Von zwei Puncten, deren Entfernung 850 Fuß beträgt, gehen zwei Körper einander entgegen; der erste geht $17\frac{1}{2}$ Minuten früher ab, als der andere, legt aber in jeder Minute 7 Fuß weniger zurück und trifft mit ihm auf der Mitte des Weges zusammen. Wie viel Fuß legt der zweite in jeder Minute zurück und nach wie viel Minuten trifft er mit dem ersten zusammen? c) Von einem Puncte sind nach einer Ebene zwei gerade Linien gezogen, deren Neigungswinkel $36^\circ\ 42'\ 11''$ und $72^\circ\ 43'\ 9''$ sind. Der Abstand ihrer Fuß-

puncte in der Ebene ist 211 Fuß. Wie groß ist der Winkel, welchen die beiden Linien mit einander bilden? d) Auf einer Seite eines gegebenen Dreiecks einen Punct zu finden, der von einer der beiden anderen Seiten und dem Fußpuncte der zur dritten Seite gehörigen Höhe gleichen Abstand hat.

II. Verfügungen der vorgesetzten Behörden.

Unter den im abgelaufenen Schuljahre von der Provincial-Schulbehörde erlassenen Verordnungen und Verfügungen werden als zur Veröffentlichung geeignet hier folgende aufgeführt:

1. In den über die Abiturienten-Prüfungen der Gymnasien und Realschulen erlassenen Instructionen ist bestimmt worden, daß ein Zeugniß der Nichtreife nur auf Verlangen des Geprüften oder seiner Angehörigen ausgestellt werden soll. Sofern diese im Falle der nicht bestandenen Prüfung es vorziehen, statt eines Zeugnisses der Nichtreife ein gewöhnliches Abgangs-Zeugniß zu verlangen, ist ihnen solches nach einer ministeriellen Verordnung vom 14. Januar c. nicht vorzuenthalten, in dasselbe jedoch am Schlusse die Bemerkung aufzunehmen, daß der betreffende Schüler an der Abiturienten-Prüfung Theil genommen und sie nicht bestanden habe.

2. Durch Verfügung vom 26. Januar d. J. ist die frühere Bestimmung vom 8. April 1840, daß der Genuß der Schulgeld-Befreiung denjenigen Schülern, welche zugleich ein Stipendium beziehen, nur in so fern bewilligt werden kann, als das letztere die Summe von 50 Thalern nicht übersteigt, dahin abgeändert, daß wegen inzwischen eingetretener Veränderung der Lebens-Verhältnisse der Maximal-Satz des jährlichen Stipendiums, neben welchem die Schulgeld-Befreiung bewilligt werden kann, auf 80 Thaler erhöht worden.

3. Durch Verfügung vom 10. Mai c. wird eine Anordnung des vorgeordneten Königlichen Ministeriums vom 21. April 1835 wieder in Erinnerung gebracht, wonach für sämmtliche Gymnasien der Rheinprovinz ein achtjähriger Cursus, je ein Jahr für die vier unteren Classen, je zwei Jahre für die beiden oberen festgesetzt ist; für Schüler der Tertia aber, welche in den mit besonderer Strenge anzustellenden Ascensions-Prüfungen auch nur in Einem Haupt-Unterrichts-Gegenstande für Secunda nicht reif befunden werden, in der Tertia ein zweijähriger Cursus eintreten solle. — Diese Verfügung erfordert, daß der streng systematische Unterricht in Tertia jedes Jahr derselbe ist, und dasselbe grammatische, historische und mathematische Pensum durchgearbeitet wird, dagegen in der Lectüre aus Classikern, Chrestomathieen, in den Exercitien und Aufsätzen, welche dem grammatischen Unterrichte zur Seite gehen, und in den geometrischen und arithmetischen Aufgaben, welche den betreffenden systematischen Unterricht begleiten müssen, Jahr um Jahr gewechselt wird.

III. Chronik des Gymnasiums.

1. Das neue Schuljahr wurde am 6. October vorigen Jahres mit einem feierlichen Gottesdienste, dem sämmtliche Schuler und Lehrer beiwohnten, eröffnet, nachdem an den vorhergehenden Tagen dir Prüfung der neu eintretenden und der zu versetzenden Schüler Statt gefunden hatte. Nach beendigtem Gottesdienste wurden die Schüler in ihre Classen geführt und ihnen der Lectionsplan mitgetheilt. Den Schülern der beiden obersten Classen wurde in den folgenden Tagen die vorschriftsmäßige Mittheilung über die Bestimmungen des Abiturienten-Reglements gemacht.

2. Das Geburtsfest Seiner Majestät des Königs beging die Anstalt am 15. October nach einer Allerhöchsten Willens-Aeußerung durch eine kirchliche Feier, indem die katholischen Lehrer und Schüler in der St.-Jakobs-Pfarrkirche einem feierlichen Gottesdienste beiwohnten, und die evangelischen in dem würdig geschmückten Gesangssaale zu einer religiösen Feier sich vereinigten.

3. Mit der interimistischen Verwaltung der Director-Stelle wurde der Professor Hoß auch für das neue Schuljahr bis zur Gewinnung und Berufung eines eigenen Directors durch Verfügung des Königlichen Schul-Collegiums vom 26. October vorigen Jahres beauftragt.

4. Am 9. November vorigen Jahres wurde in der St.-Jakobs-Pfarrkirche ein besonderer feierlicher Gottesdienst zum Seelenheile und Andenken an die frommen Stifter der dahier bestehenden und von dem Gymnasial-Verwaltungsrathe verwalteten bedeutenden Studien-Stiftungen abgehalten, welchem die katholischen Lehrer und Schüler beiwohnten.

5. Am 10. November vorigen Jahres wurde der 100ste Geburtstag Schiller's durch eine zwar einfache aber erhebende Schulfeier von der Anstalt begangen.

6. Der Gesundheits-Zustand der Lehrer wie der Schüler war in dem abgelaufenen Schuljahre im Ganzen ein sehr zufriedenstellender. Nur ein einziger Lehrer der oberen Classen mußte wegen Krankheit längere Zeit (drei Wochen) im Anfange dieses Jahres vertreten werden. Indessen wurden uns in diesem Schuljahre zwei hoffnungsvolle Schüler durch den Tod entrissen. Schon am 31. October v. J. am Nervenfieber der Sextaner Arnold Echstaedt, und wurde durch die Anstalt zu seiner letzten Ruhe begleitet. Am 28. April d. J. verschied der Tertianer Wilhelm Bremer ebenfalls am Nervenfieber während eines Besuches bei seinen Anverwandten zu Neuß, welchem zu unserem Bedauern wegen der eingetretenen Osterferien in herkömmlicher Weise die letzte Ehre nicht erwiesen werden konnte. Beide waren wohlbegabte Schüler, und besaßen durch Wohlverhalten und Fleiß die volle Zufriedenheit und Liebe ihrer Lehrer. Für beide wurde ein Seelenamt in der Pfarrkirche St. Jakob gehalten, welchem die katholischen Schüler und Lehrer beiwohnten.

7. Auch in diesem Jahre erhielt die Anstalt von dem nämlichen Kaufmanne, dessen Söhne das Gymnasium besuchen, wieder die ansehnliche Summe von 50 Thalern zu beliebigen Gymnasial-Zwecken, mit dem Versprechen, jedes Jahr, so lange einer seiner Söhne das Gymnasium besuche, eine gleiche Summe zu übermachen. Und wir verfehlen nicht, dem edlen und großmüthigen Geschenkgeber hier den gefühltesten Dank auszusprechen.

8. Durch Rescript des Königlichen Schul-Collegiums vom 13. April c. ist der Probe-Candidat Dr. Behrns zur Aushülfe, und zwar zunächst zur Erleichterung der drei Lehrer, welche die Lectionen des verstorbenen Directors Knebel übernommen hatten, provisorisch überwiesen worden.

9. Dem Maler Franz Everard Bourel ist auf seinen der vorgesetzten Behörde vorgetragenen Wunsch durch Rescript des Königlichen Schul-Collegiums vom 16. Januar d. J. die Entlassung aus seiner Stellung als Zeichenlehrer unseres Gymnasiums bewilligt worden. Seine Functionen für das Sommer-Semester wurden durch Verfügung der Provincial-Behörde vom 24. Februar c. dem Zeichenlehrer der hiesigen Realschule Herrn Nagel übertragen. Eben so wurde von der nämlichen Behörde der Königliche Musik-Director Herr Franz Weber durch Verfügung vom 2. Juni c. von der Gesanglehrer-Stelle entbunden, der jedoch diesen Unterricht bis zum Schlusse fortgesetzt hat. Beide Collegen haben eine lange Reihe von Jahren mit Eifer und Hingebung der Anstalt ihre Zeit und Kraft mit glücklichem Erfolge gewidmet, und Lehrer wie Schüler werden beiden Lehrern ein ehrendes Andenken bewahren.

10. Ein anderer, schwer zu ersetzender Verlust steht unserem Gymnasium bevor, indem der katholische Religionslehrer Dr. Schlünkes und der Oberlehrer Dr. Probst am Schlusse dieses Schuljahres aus unserer Mitte ausscheiden werden. Beide haben in Treue und Liebe — Herr Schlünkes nahe 23 Jahre und Herr Probst 17 Jahre — mit unverdrossenem Eifer und glücklichem Erfolge gewirkt; beide sind durch das Allerhöchste Vertrauen in Anerkennung ihrer Verdienste berufen worden: Herr Schlünkes, um das Amt eines Regierungs- und Schulrathes bei der Königlichen Regierung zu Düsseldorf anzutreten, und Herr Probst, um als Director die Leitung des Gymnasiums zu Cleve zu übernehmen.

Wir leben der sicheren Hoffnung, daß die sämmtlichen erledigten Stellen noch vor dem Beginne des neuen Schuljahres besetzt werden.

11. Ein so wichtiges Ereigniß, wie das gleichzeitige Ausscheiden zweier Hauptlehrer, die der Anstalt so viele Jahre angehört, konnte nicht unbezeichnet vorübergehen. Das Lehrer-Collegium veranstaltete am 8. August 1860 eine Feier im Reichardt'schen Locale, an welcher außer einigen Collegen von anderen Anstalten auch Herr Geheimerath Dr. Landfermann und Herr Domcapitular Schweizer Antheil nahmen. Hier fanden die Gefühle der Liebe und Achtung, welche die Scheidenden in hohem Maße genossen, in einer Ansprache des zeitigen Directors, des Herrn Professors Hoß, den aufrichtigsten Ausdruck. „Nur der Gedanke könne uns den Abschied erleichtern," schloß er, „daß den Scheidenden eine ehrenvolle Beförderung zu Theil werde, daß sich ihrer frischen Kraft ein bedeutender Wirkungskreis eröffne." Beide dankten gerührt für die Gesinnung, die sich für sie kund gab; Herr Regierungsrath Dr. Schünkes hob namentlich die Einmüthigkeit hervor, die im Collegium herrsche, und daß er in seinem wichtigen Amte als katholischer Religionslehrer und Seelsorger von

allen Lehrern der Anstalt stets aufrichtig unterstützt worden sei. Herr Director Dr. Probst erinnerte an die lange Zeit, die er an dem Gymnasium gearbeitet; sein Leben sei ganz mit der Anstalt verwachsen; ihr verdanke er allseitige Anregung und seine Ausbildung als Lehrer. Da ihm nun die speciellere Leitung einer Anstalt anvertraut würde, so habe auch das Friedrich-Wilhelms-Gymnasium an dieser Beförderung seinen Antheil. Darauf nahm Herr Geheimerath Dr. Landfermann das Wort und schilderte in treffenden Worten die Verdienste der beiden Abgehenden, ihre loyale Gesinnung, ihre Pflichttreue, ihre gesegnete Wirksamkeit. Zwei Mittel — sagte er unter Anderem — hätten Beide in glücklicher Verbindung der Jugend gegenüber anzuwenden gewußt: Strenge und Liebe, indem nach dem Ausspruche eines Pädagogen die Liebe im Vordertreffen stehen, die Strenge in der Reserve bleiben müsse; nur wo die Liebe nicht ausreiche, müsse die Strenge ins Vordertreffen treten. Vom Herrn Regierungsrathe Dr. Schlünkes rühmte er insbesondere, daß er als katholischer Priester und Religionslehrer fest und treu an seinem Glauben gehalten und seiner Kirche gedient, und doch dabei stets gegen die evangelischen Lehrer der Anstalt Achtung, Humanität, Freundlichkeit und Milde geübt habe. Herr Oberlehrer Dr. Pfarrius sprach über das wechselvolle Schicksal der Anstalt, erwähnte der vielen Männer, die im Laufe der Zeit aus der Anstalt geschieden seien; ein Trost sei dabei, daß nämlich die Scheidenden in eine höhere Stellung gerückt seien, und nach Höherem strebe ja der Mensch. Er gedachte auch der früheren Leiter der Anstalt und ihrer Verdienste, der Herren Directoren Grashof, Hoffmeister und Knebel; wie es aber auch kommen möge, so könne die Anstalt guten Muthes sein, da sie in der Hand eines weisen und liebevollen Führers sei: des hochverehrten Herrn Geheimenrathes Dr. Landfermann.

12. Gleich nach dem Tode des Directors Knebel war der Gedanke aufgetaucht, die Grabstätte desselben mit einem Denkmale zu schmücken, und es wurde zu diesem Zwecke eine Sammlung von freiwilligen Beiträgen unter den Lehrern und Schülern des Gymnasiums veranstaltet, welche die Summe von etwa 190 Thalern ergab. Herr Porzelt, Inhaber einer Marmor-Fabrik hierselbst, von dem bereits mehrere Söhne die Anstalt besucht haben und gegenwärtig noch einer Schüler derselben ist, hatte kaum von diesem Vorhaben gehört, als er sich erbot, die Beschaffung des Monumentes zum kostenden Preise zu übernehmen. Eben so erklärte sich Herr Stadtbaumeister Raschdorff bereit, den Entwurf nebst den nöthigen Zeichnungen zu verfertigen, und durch diese eben so seltene als anerkennungswerthe Uneigennützigkeit beider Männer ist es gelungen, die Ruhestätte des verstorbenen Directors mit einem des Todten eben so würdigen als künstlerisch schönen Monumente zu bezeichnen. Dasselbe, schon durch seinen bedeutenden Umfang hervorragend, ist aus münchener Sandstein, und erhebt sich in Gestalt eines antiken Sarkophags auf einem Sockel von derselben Steinart, der auf einer Unterlage von niedermendiger Platten ruht; die Vorderseite trägt auf einer weißen Marmortafel folgende vergoldete Inschrift:

HIC. SITUS. EST.
HENRICUS. KNEBEL.
PHIL. DR. GYMNASII. FRID. GUIL. COLONIENS. RECTOR.
NATUS. DIE. XIII. M. APRIL. A. MDCCCI.
MORTUUS. DIE. XVII. MENS. MART. A. MDCCCLIX

und um den oberen Rand des Sockels zieht sich ein Fries, der von folgenden in den Stein gehauenen Worten gebildet wird:

CONDIDIT. HOC. MONUMENTUM. PRAECEPTORUM. GYMNASII. ET. DISCIPULORUM.
PIETAS. DIE. XXV. M. AUGUST. A. MDCCCLIX

Am 28. August fand die Enthüllung vor den versammelten Lehrern und Schülern Statt, wobei von dem Sänger-Chore des Gymnasiums unter Leitung des Herrn Musik-Directors Weber einige passende Gesänge ausgeführt und von dem Oberlehrer Dr. Probst eine Ansprache gehalten wurde. — Wir fühlen uns gedrungen, den beiden Männern, durch deren freundliches Entgegenkommen es allein möglich gewesen ist, für obige Summe ein so bedeutendes Monument herzustellen, auch an dieser Stelle unseren Dank auszusprechen.

IV. Statistische Uebersicht.

1. Das Lehrer-Collegium besteht gegenwärtig aus folgenden Personen:

. Professor Hoß, Oberlehrer.
. Dr. Pfarrius, Oberlehrer.
. Regierungsrath Grashof, evangel. Religionslehrer.
. Dr. Schlünkes, katholischer Religionslehrer.
. Oettinger, Oberlehrer.
. Haentjes, Oberlehrer.
. Dr. Probst, Oberlehrer.
. Dr. Eckertz, Oberlehrer.
9. Feld, Oberlehrer.
10. Dr. Weinkauff, Gymnasiallehrer.
11. Dr. Kocks, Gymnasiallehrer.
12. Berghaus, Hülfslehrer.
13. Serf, Hülfslehrer.
14. Dr. Behrns, Schulamts-Candidat.
15. Musik-Director Weber, Gesanglehrer.
16. Nagel, Zeichenlehrer.

2. Die Schülerzahl betrug in:

	I a.	I b.	II a.	II b.	III.	IV.	V.	VI.	Summa.
im Winter-Semester	32	31	25	33	56	66	51	54	348
im Sommer-Semester	25	35	24	26	57	67	54	56	344

Nach den Confessionen: im Winter: 225 katholische, 113 evangelische, 10 israelitische; im Sommer: 224 katholische, 110 evangelische, 10 israelitische.

3. Von den katholischen Schülern des Gymnasiums befanden sich in diesem Jahre 47 im Genusse von Stiftungen. Die Freischule genossen 20 Schüler als Söhne von Lehrern und Schulbeamten; durch die Lehrer-Conferenz waren 39 Schüler ganz und 10 halb von der Zahlung des Schulgeldes befreit.

4. Zu der am 14. März d. J. unter dem Vorsitze des Königlichen Commissarius Herrn Geheimenrathes Dr. Landfermann abgehaltenen Abiturienten-Prüfung hatten sich 5 Oberprimaner gemeldet, von denen 4 nebst einem Auswärtigen das Zeugniß der Reife erhielten. Zu der Abiturienten-Prüfung, welche am 7. und 8. August d. J. ebenfalls unter dem Vorsitze des Herrn Geheimenrathes Dr. Landfermann Statt hatte, hatten sich 24 Oberprimaner gemeldet, von denen 23 nebst einem Auswärtigen das Zeugniß der Reife erhielten. Die Namen derselben sind folgende:

Nr.	Namen.	Geburtsort.	Confession.	Alter. Jahre.	Studirt.	Wo?
	a. Ostern:					
1	Hennerici, Johann	Mayen	katholisch	22½	Medicin	Bonn.
2	Krott, Wilhelm	Ensival (Belgien)	katholisch	23	Theologie	Münster.
3	Lievenbruck, Jakob	Lechenich	katholisch	22	Mathematik u. Naturw.	Bonn.
4	Schreiner, Matthias	Köln	katholisch	21	Jurisprudenz	Bonn.
(externe)	Wüllenweber, Heinrich ..	Gerscheid im Kreise Solingen	evangelisch	21	Philologie	Bonn.
	b. Herbst:					
1	von der Ahe, Friedrich ...	Köln	evangelisch	18	unentschieden	
2	Broicher, Otto	Köln	katholisch	17½	Jurisprudenz	
3	Gummich, Johann	Köln	katholisch	19	Medicin	
4	Jackson, Joseph	Köln	katholisch	18½	Verwaltungsfach	
5	Jüngst, Johann	Wiehl	evangelisch	19	Theologie	
6	Kirsch, Ferdinand	Köln	katholisch	18	Handlungswissenschaft	
7	König, Anton	Köln	katholisch	18½	Medicin	
8	Kruft, Heinrich	Kreuznach	katholisch	21	Cameralwissenschaft	
9	Leich, Karl..............	Haltern in Westphalen	evangelisch	21	Theologie	
10	Melcher, Karl	München-Gladbach	katholisch	16½	Theologie	
11	Menden, Heinrich	Kempen	katholisch	18	Theologie	
12	Meurer, Wilhelm	Elberfeld	katholisch	18½	Jurisprudenz u. Cameralia	
13	Norrenberg, Karl.......	Köln	katholisch	17½	Baufach	
14	Peltzer, Jakob	Grambusch (Kreis Erkelenz)	evangelisch	19	unentschieden	
15	Rebender, Karl	Köln	katholisch	23	unentschieden	
16	Schlidum, Robert........	Heiligenhaus bei Elberfeld	evangelisch	20	unentschieden	
17	Schmitz, Friedrich	Eschweiler	katholisch	16½	Jurisprudenz	
18	von Schwartz, Joseph.....	Köln	evangelisch	19	Forstwissenschaft	
19	Schwechten, Franz	Köln	evangelisch	19	Baufach	
20	Ströver, Franz	Köln	katholisch	19½	Jurisprudenz	
21	Wiechers, Albert	Liblar	katholisch	18½	Jurisprudenz	
22	Wilmius, Wilhelm	Köln	katholisch	24½	Bergwissenschaft	
23	Zopp, Paul	Köln	katholisch	20½	Theologie	
(externe)	Wieacker, Johann	Bendi bei Duisburg	evangelisch	25½	Philologie	

Den zwölf Abiturienten: von der Ahe, Jackson, Jüngst, Melcher, Meurer, Norrenberg, Peltzer, Schlickum, Schmitz, Schwechten, Ströver, Wiechers wurde die mündliche Prüfung erlassen.

V. Stand der Lehrmittel.

A. Die Gymnasial-Bibliothek hat folgenden Zuwachs erhalten:

a. Durch Schenkung des Königlichen Ministeriums:

1) Förstemann, altdeutsches Namenbuch, 2. Band. 2) Schneider, neue Beiträge zur alten Geschichte u. Geogr. der Rheinlande, erste Folge. 3) Ernst aus'm Werth, Kunst-Denkmäler, 2. Band. 4) Zober, zur Geschichte des Stralsunder Gymnasiums, 5. u. 6. Beitrag.

b. Durch Schenkung des Königlichen Provincial-Schul-Collegiums:

1) Zeichnungen von Asmus, Carstens ꝛc. 2) Gerhard, Denkmäler u. Forschungen, Lief. 41—44. 3) Fidicin, die Territorien der Mark Brandenburg. Band 3.

c. Durch Schenkung von Verfassern und Verlegern:

1) Pütz, Charakteristiken, 2 Bände. 2) Viehoff, Hülfsbuch für den deutschen Unterricht.

d. Durch Ankauf:

1) Strabo's Erdbeschreibung, übers. von Großkurd, 4 Theile. 2) Jourdain, Geschichte der aristotel. Schriften, übers. von Stahr. 3) Furlanetti, Appendix Lexici Forcellini. 4) Dr. Fresne, Glossarium, 2 Bände Folio. 5) Liebig, chemische Briefe, 2 Bände. 6) Moleschott, der Kreislauf des Lebens, 1 Band. 7) v. Sybel, Geschichte der Revolutionszeit, 3 Bde. 8) Taciti opera ed. Orelli. Vol. I. Annales. 9) Karl Zell, das Sittliche in der griechischen Volksreligion. 10) Guizot, Geschichte der engl. Revolution. 11) Stöckhardt, die Schule der Chemie. 12) Eichhorn, Antiqua historia, 3 Bde. 13) Leunis, Synopsis der Naturgeschichte des Thierreiches. 14) Ritter, Erdkunde, 19. Theil. 15) Heeren u. Uckert, Geschichte des osmanischen Reiches von Zinkeisen, 6. Theil. 16) Fischer, Lebens- u. Charakterbilder griech. Staatsmänner u. Philosophen. 17) Leonhard Schmitz, Geschichte Griechenlands. 18) Fischer, Aesthetik, 4 Bde. 19) Houben, praktischer Lehrgang zur Erlernung der franz. Sprache, erster Cursus. 20) v. Klöden, Handbuch der physischen Geographie. 21) Shakespeare, von G. Gervinus, 4 Bde. 22) Lehrs, de Aristarchi studiis Homericis. 23) Preller, römische Mythologie, 2 Bde. 24) Bähr, Geschichte der römischen Literatur, 2 Bde. 25) C. O. Müller, Handbuch der Archäologie. 26) Lübker, Real-Lexikon des classischen Alterthums. 27) Bernhardy, Grundriß der griech. Literatur, 2 Thle. 28) J. v. Müller's sämmtliche Werke, 23 Bde. 29) Horatii Flacci opera ed. Fea. 30) van Heusde, Initia philos. Platonicae, 3 voll. 31) Thaulow, Hegel's Ansichten über Erziehung u. Unterricht. 32) Düntzer, Wieland's Oberon erläutert, 1 Bändchen.

Außerdem die Fortsetzungen von Leutsch, Philologus, Jahrg. 13 u. 14; Zeitschrift für Gymnasialwesen, Jahrg. 13; neun Jahrbücher für Philologie, Jahrg. 1859; Centralblatt für die gesammte Unterrichts-Verwaltung, Jahrg. 1859; v. Sybel, historische Zeitschrift, Jahrg. 1859; Ersch u. Gruber, Sect. I, Bd. 69 u. 70; Schmid, Encyklopädie.

B. Die Schüler-Bibliothek wurde um folgende Werke vermehrt:

a. Geschenke des Herrn Collegen Dr. Weinkauff:

1) Borussia, Museum für preuß. Vaterlandskunde. 2) Pfennig-Magazin, 11 Bde.

b. Durch Ankauf erworben:

1) Fiedler, Geschichte der Römer. Dazu 1 Heft mit Abbildungen. 2) Stoll, Handbuch der Religion und Mythologie der Griechen und Römer. 3) Stoll, die Götter u. Heroen des class. Alterthums, 2 Bde. 4) Lübker, Real-Lexikon des class. Alterthums. 5) Schwenk, Wörterbuch der deutschen Sprache. 6) Claudius, sämmtl. Werke. 7) Herbst, M. Claudius, ein

Lebensbild. 8) Rocholz, deutsche Arbeits-Entwürfe, 2 Theile. 9) Otto von Mirbach, römische Briefe, 2 Thle. 10) Spieß, Schiller's Leben. 11) Lewes, Goethe's Leben, übers. von Frese. 12) Thomas, das Buch wunderbarer Erfindungen. 13) Hauff's sämmtl. Schriften, 6 Bde. 14) Arndt, Gedichte. 15) Vogel, Reisen u. Entdeckungen. 16) Kröger, norddeutsche Freiheitskämpfe, 3 Bde. 17) Pösche, das Leben der Natur. 18) Raff, Naturgesch. f. Kinder. 19) Pyrker, sämmtl. Werke, 2 Bde. 20) Saalfeld, Geschichte Napoleon's, 2 Bde. 21) Lenz, gemeinnützige Naturgeschichte, Bd. I. 22) Müller, die jungen Pelzjäger. 23) Müller, die jungen Büffeljäger. 24) Bade, Louise, Königin von Preußen.

C. Zur Landkarten-Sammlung sind hinzugekommen:

1) Gergovia et Caesaris castra, Handzeichnung in großem Maßstabe vom Tertianer Seeger. 2) Antiquitates Romanorum militares, Handzeichnung in großem Maßstabe vom Tertianer Linnartz. 3) Orbis terrarum Homericus, Handzeichnung in großem Maßstabe vom Tertianer Linnartz.

D. Zur Musicalien-Sammlung ist hinzugekommen:

Schiedmeier, Messe für 4 Singstimmen. 100 Singstimmen, sämmtliche Orchesterstimmen und Partitur (Geschenk der Schüler des Gymnasiums).

E. Der physikalische Apparat hat folgenden Zuwachs erhalten:

1) Apparat für den Ausfluß von Flüssigkeiten. 2) Hydraulischer Widder. 3) Blechrohr mit Gummischläuchen. 4) Apparat für Klangfiguren. 5) Wärmeleitungs-Apparat. 6) Optischer Spiegel. 7) Apparat für Kohlenspitzen. 8) Zwei getheilte Glas-Cylinder. 9) Ein Lunarium, Geschenk des Obersecundaners Baumeister. 10) Eine kleine Sammlung von chemischen Präparaten nebst mancherlei Glasgeräthschaften (Geschenk des Oberprimaners Wilh. Meurer.)

F. Dem naturhistorischen Cabinet sind geschenkt worden:

1) Canis vulpes, der Balg geschenkt vom Herrn Bürgermeister Schaurte aus Deutz, ausgestopft von freiwilligen Beiträgen der Sextaner und Quintaner. 2) Felis catus, der Balg geschenkt vom Herrn Hafen-Rendanten Wolters aus Köln, ausgestopft von freiwilligen Beiträgen der Sextaner und Quintaner. 3) Nucifraga caryocatactes, Geschenk des Herrn Hafen-Rendanten Wolters. 4) Eine kleine Sammlung americanischer Insecten nebst einem Neste von Icterus Baltimore, Geschenk des Herrn Fabricanten Friedr. Graff jun. aus Kreuznach.

Zur Nachricht.

Die Ferien-Beschäftigung wird auch in den bevorstehenden Ferien in derselben Weise, wie in früheren Jahren, unter der Leitung von zwei Lehrern der Anstalt Statt haben.

Der neue Cursus wird am Montag den 8. October mit der Prüfung der Neueintretenden eröffnet; Dinstag der 9. October ist für die Versetzungs-Prüfungen bestimmt, und am Mittwoch Morgen zu gewöhnlicher Zeit haben sich sämmtliche Schüler zum Schul-Gottesdienste einzufinden und sich demnächst in ihre Classen zu begeben.

1889

Alexander Ziwet

XIV.

Programm

des

Stadtgymnasiums zu Stettin

Ostern 1883.

Inhalt:

Stettin.

Druck von Herrcke & Lebeling.

1883. Progr. Nr. 126.

„**Ueber die Bewegung eines in einer vertikalen Ebene verbleibenden materiellen Punktes unter dem Einflusse der Schwere und einer Beschleunigung, deren Richtung durch ein festes Centrum der Ebene hindurchgeht und deren Grösse direkt proportional der Entfernung ist. Die Ebene, in welcher der Punkt zu verbleiben gezwungen ist, bewegt sich mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um eine durch das feste Centrum gehende Vertikale.**“

Bevor wir dieses Problem behandeln, lösen wir 2 Aufgaben, welche als besonders einfache Specialfälle des obigen Problems betrachtet werden können.

I a) „Der bewegliche Punkt befindet sich in der Vertikalaxe und hat keine Anfangsgeschwindigkeit.“

Bezeichnen wir die Vertikalaxe mit M_0 M_1, das feste Centrum mit O, die Intensität der Centralkraft in der Einheit der Entfernung mit λ^2, die Entfernung des beweglichen Punktes M von O zur Zeit t mit r; so ergiebt sich, wenn wir die der Schwere entgegengesetzte Richtung als die positive annehmen, für die Bewegung des Punktes M, dessen Masse = 1 sei, folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\lambda^2 r - g. \qquad (1.)$$

Fig. 1.

Setzen wir $\frac{d^2r}{dt^2} = r''$ und differenzieren zweimal, so erhalten wir:

$$\frac{d^2r''}{dt^2} = -\lambda^2 r''.$$

Die Integralgleichung zu dieser Differentialgleichung ist bekanntlich:

$$r'' = A \cos \lambda t + B \sin \lambda t.$$

Es ist aber aus (1.): $r = \frac{-r'' - g}{\lambda^2}$, mithin $r = -\frac{A}{\lambda^2} \cos \lambda t - \frac{B}{\lambda^2} \sin \lambda t - \frac{g}{\lambda^2}$,

oder, wenn man $-\frac{A}{\lambda^2} = A_1$, $-\frac{B}{\lambda^2} = B_1$ setzt,

$$r = A_1 \cos \lambda t + B_1 \sin \lambda t - \frac{g}{\lambda^2}. \qquad (2.)$$

Zur **Konstantenbestimmung** ist die Geschwindigkeit v zu benutzen; es ist

$$v = \frac{dr}{dt} = -A_1 \lambda \sin \lambda t + B_1 \lambda \cos \lambda t.$$

Es sei zur Zeit $t = 0 \left\} \begin{array}{l} r = b \\ v = 0. \end{array}\right.$

Daraus ergiebt sich:

$$b = A_1 - \frac{g}{\lambda^2}, \text{ und } B_1\lambda = 0,$$

$$\text{mithin } A_1 = b + \frac{g}{\lambda^2}, \; B_1 = 0.$$

So erhalten wir schliesslich folgende Gleichungen für die Bewegung des Punktes:

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \left(b + \frac{g}{\lambda^2}\right) \cos \lambda t - \frac{g}{\lambda^2} \\ v = -\left(b + \frac{g}{\lambda^2}\right) \lambda \sin \lambda t. \end{array} \right. \tag{3.}$$

Der Punkt beginnt seine Bewegung vom Punkte M_0 (Fig. 1) aus mit der Geschwindigkeit $= 0$, fällt dann mit wachsender Geschwindigkeit in der Richtung der Schwere bis O_1; von diesem Punkte ab, der die Entfernung $-\frac{g}{\lambda^2}$ von O hat, nimmt die Geschwindigkeit ab bis M_1, der tiefsten Lage, die der bewegliche Punkt erreichen kann. M_1 ist $= -b - \frac{2g}{\lambda^2}$. In M_1 ist die Geschwindigkeit $= 0$ geworden und von hier ab bewegt sich der Punkt mit positiver Geschwindigkeit aufwärts, welche ihr Maximum wieder in O_1 erreicht; von da ab wird die Bewegung langsamer, bis der Punkt wieder in M_0 angelangt ist, wo $v = 0$ geworden ist. Von jetzt an wiederholt sich die Bewegung in der angegebenen Weise unaufhörlich; dieselbe ist also eine periodische, welche zwischen den Grenzlagen $M_0 = +b$ und $M_1 = -b - \frac{2g}{\lambda^2}$ oscilliert. M_1 wird erreicht zur Zeit T_1; T_1 findet sich aus der Gleichung $\cos \lambda T_1 = -1$, woraus $T_1 = \frac{\pi}{\lambda}, \frac{3\pi}{\lambda}, \frac{5\pi}{\lambda}$ etc.

Analog findet sich, dass M_0 erreicht wird, wenn $\cos \lambda T_0 = +1$. Dies tritt ein, wenn $T_0 = 0, \frac{2\pi}{\lambda}, \frac{4\pi}{\lambda}$ etc.

Das Maximum der Geschwindigkeit tritt ein, wenn

$$\sin \lambda t = \pm 1, \text{ d. h. wenn } \lambda t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \text{ etc.}$$

$$\text{also } t = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\lambda}, \; \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{\lambda}, \; \frac{5}{2} \cdot \frac{\pi}{\lambda} \text{ etc.}$$

Die Oscillationsdauer der Bewegung ist $T = \frac{2\pi}{\lambda}$, die Oscillationsweite $= 2\left(b + \frac{g}{\lambda^2}\right)$. Der Punkt O_1 ist mithin der Mittelpunkt der letzteren.

Das Centrum O wird von dem beweglichen Punkte passiert, wenn $\left(b + \frac{g}{\lambda^2}\right) \cos \lambda t = \frac{g}{\lambda^2}$ ist, woraus

$$\cos \lambda t = \frac{g}{b\lambda^2 + g}.$$

Aus dieser Gleichung ersehen wir, dass der bewegliche Punkt das Centrum gar nicht passieren kann, wenn b negativ ist und $> -\frac{2g}{\lambda^2}$. Dies ergiebt sich auch aus den bisherigen Erörterungen. Ist $b = -\frac{g}{\lambda^2}$, d. h. wenn M_0 mit O_1 zusammenfällt, wird die Oscillationsweite $= 0$, der Punkt M bleibt also in Ruhe.

Verlegen wir nun den Koordinatenanfang in den Mittelpunkt der Oscillationsweite O_1, so haben wir $r_1 = r + \frac{g}{\lambda^2}$ zu setzen. Wir haben dann das Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{aligned} r_1 &= \left(b + \frac{g}{\lambda^2}\right) \cos \lambda t \\ v &= \frac{dr_1}{dt} = -\left(b + \frac{g}{\lambda^2}\right) \lambda \sin \lambda t. \end{aligned}\right. \tag{4.}$$

Diese Gleichungen stellen aber die Bewegung eines Punktes dar, welcher von einer im Punkte O_1 befindlichen, proportional der Entfernung wirkenden Centralkraft λ^2 beschleunigt wird und zur Zeit $t = 0$ die Entfernung $\left(b + \frac{g}{\lambda^2}\right)$ vom Centrum hat. Die Schwere und die ursprüngliche Centralkraft O können also ersetzt werden durch eine einzige Centralkraft in O_1.

Die Grösse $b + \frac{g}{\lambda^2}$, welche auch später noch oft vorkommen wird, wollen wir mit b_1 bezeichnen.

Ib) „Der bewegliche Punkt hat eine Anfangsgeschwindigkeit in der Richtung der Vertikale."

Für diesen Fall ist nur eine andere Konstantenbestimmung der Gleichung (2.) nötig. Man hat, wenn $v_0 = c$ ist:

$$\left.\begin{aligned} (r_0 =)\ A_1 \cos \lambda t + B_1 \sin \lambda t - \frac{g}{\lambda^2} &= b \\ \text{und } (v_0 =) -A_1 \lambda \sin \lambda t + B_1 \lambda \cos \lambda t &= c \end{aligned}\right\} \text{für } t = 0;$$

$$\text{hieraus } A_1 = b + \frac{g}{\lambda^2} = b_1, \text{ wie vorher, und}$$

$$B_1 = \frac{c}{\lambda}.$$

Wir erhalten somit als Gleichungen der Bewegung des Punktes M für diesen Fall:

$$\left\{\begin{aligned} r &= b_1 \cos \lambda t + \frac{c}{\lambda} \sin \lambda t - \frac{g}{\lambda^2} \\ v &= -b_1 \lambda \sin \lambda t + c \cos \lambda t. \end{aligned}\right. \tag{5.}$$

M erreicht seine höchste Lage, wenn r ein Maximum wird; dies tritt ein, wenn

$$\operatorname{tg} \lambda t = \frac{c\lambda}{b\lambda^2 + g}.$$

Wir haben nun zu unterscheiden, ob c positiv oder negativ ist. Ist zunächst c positiv, so tritt zuerst ein Maximum ein und zwar für $\lambda t < \frac{\pi}{2}$. Bezeichnen wir diesen Wert von

λt mit α_1, so wird M seinen tiefsten Punkt erreichen, wenn $\lambda t = \pi + \alpha_1$; denn für diesen Wert von λt wird

$$r = b_1 \cos(\pi + \alpha_1) + \frac{c}{\lambda} \sin(\pi + \alpha_1) - \frac{g}{\lambda^2},$$

oder $r = -b_1 \cos \alpha_1 - \frac{c}{\lambda} \sin \alpha_1 - \frac{g}{\lambda^2}$, während für das Maximum

$$r = + b_1 \cos \alpha_1 + \frac{c}{\lambda} \sin \alpha_1 - \frac{g}{\lambda^2} \text{ sich ergiebt.}$$

Die höchsten Lagen wiederholen sich für $\lambda t = 2n\pi + \alpha_1$, die tiefsten dagegen für $\lambda t = (2n+1)\pi + \alpha_1$.

Die Geschwindigkeit ist in diesen Grenzlagen wieder $= 0$; dieselbe erreicht ihren grössten Wert, im absoluten Sinne genommen, wenn

$$\operatorname{cotg} \lambda t = -\frac{c\lambda}{b\lambda^2 + g} \text{ ist. Dies muss aber eintreten, wenn } \lambda t = \frac{\pi}{2} + \alpha_1.$$

Für diesen Wert des λt ergiebt sich aber, dass $r = -\frac{g}{\lambda^2}$. Der Punkt hat also seine grösste Geschwindigkeit in der Mitte zwischen den beiden Grenzlagen, in O_1, wie schon in dem vorigen Fall.

Ist zweitens c negativ, so wird r ein Maximum, wenn $\pi > \lambda t > \frac{\pi}{2}$, der Punkt erreicht daher zuerst seine tiefste Lage.

Um die Bewegung des Punktes M für diese Aufgabe zu erläutern (Fig. 2), nehmen wir an, es sei $b = g$, $\lambda^2 = 1$, $c = +2g$. Wir erhalten dann das Gleichungssystem:

$$\begin{cases} r = 2g \cos t + 2g \sin t - g \\ v = -2g \sin t + 2g \cos t; \end{cases}$$

r wird ein Maximum, wenn $t = \frac{\pi}{4}$; dasselbe ist

$$r_{max} = 2g\left(\sqrt{1/2} + \sqrt{1/2}\right) - g = 2{,}828\,g - g = +1{,}828\,g;$$

ferner ist $r_{min} = -2g\left(\sqrt{1/2} + \sqrt{1/2}\right) - g = \quad = -3{,}828\,g.$

Das Maximum der Geschwindigkeit ist $v_{max} = \pm 2{,}828\,g$; dasselbe tritt zum ersten Male ein, wenn $t = \frac{3\pi}{4}$ und $r = -g$.

II) „Der bewegliche Punkt liegt im Anfange der Bewegung ausserhalb der Vertikalaxe; die Ebene, in welcher der Punkt M zu verbleiben gezwungen ist, bewegt sich nicht."

Zum Anfangspunkt der Koordinaten nehmen wir das feste Centrum O, die Vertikale sei die y-Axe, und die in O auf der Vertikalaxe Senkrechte sei die x-Axe. Die positive y-Axe möge, wie vorher, entgegengesetzt der Richtung der Schwere sein, die positive x-Axe sei von O aus nach rechts gerichtet.

Die Differentialgleichungen für die Bewegung des Punktes M sind dann:

Fig. 2.

$+1{,}828\,g$ — M_1
$+g$ — M_0
O
$-g$ — O_1
$-2g$
$-3g$
$-3{,}828\,g$ — M_2

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda^2 x \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\lambda^2 y - g.\end{array}\right. \qquad (6.)$$

Als allgemeine Lösungen derselben erhalten wir

$$\left.\begin{array}{l}x = A \cos\lambda t + B \sin\lambda t \\ y = A_1 \cos\lambda t + B_1 \sin\lambda t - \frac{g}{\lambda^2}.\end{array}\right\} \qquad (6^a.)$$

A. Konstantenbestimmung ohne Anfangsgeschwindigkeit. (Tafel Fig. 3.)

$$\text{Es sei } \left.\begin{array}{l}x = a;\ v_x = 0 \\ y = b;\ v_y = 0\end{array}\right\} \text{ für } t = 0;$$

daraus ergiebt sich $A = a;\ B = 0,$

$$A_1 = b + \frac{g}{\lambda^2} = b_1;\ B_1 = 0.$$

Die Bewegungsgleichungen für M sind daher:

$$\left\{\begin{array}{l}x = a \cos\lambda t \\ y = b_1 \cos\lambda t - \frac{g}{\lambda^2}.\end{array}\right. \qquad (7.)$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen λt, indem man z. B. $\cos\lambda t = \frac{x}{a}$ setzt, so wird gefunden

$$y = \frac{b_1}{a} x - \frac{g}{\lambda^2}.$$

Dies ist aber die Gleichung einer geraden Linie, welche die y-Axe im Punkte $y = -\frac{g}{\lambda^2}$ schneidet, und mit der x-Axe einen $\angle \alpha$ bildet, dessen $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b_1}{a}$ ist.

Das Maximnm für x und y tritt ein, wenn $\lambda t = 0,\ 2\pi,\ 4\pi$ etc.; es ist $x = a,\ y = b$; das Minimum tritt ein für $\lambda t = \pi,\ 3\pi,\ 5\pi$ etc.; es ist $x = -a;\ y = -\left(b_1 + \frac{g}{\lambda^2}\right)$.

Der Punkt M schneidet die Vertikale der Bahn wieder in dem uns schon bekannten Punkte O_1, und zwar, wenn $\lambda t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ etc. O_1 liegt auch in diesem Falle wieder in der Mitte der Bahn des Punktes M.

Aus den Gleichungen (7) erhalten wir als Komponenten der Geschwindigkeit:

$$\left\{\begin{array}{l}v_x = \frac{dx}{dt} = -a\,\lambda \sin\lambda t \\ v_y = \frac{dy}{dt} = -b_1\,\lambda \sin\lambda t;\end{array}\right.$$

daraus ergiebt sich als absolute Geschwindigkeit des Punktes M

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \lambda \sin\lambda t \sqrt{a^2 + b_1^2}.$$

Die grösste Geschwindigkeit ist demnach

$$v_{max} = \lambda . \sqrt{a^2 + b_1^2};$$

dieselbe wird erreicht, wenn $\lambda t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ etc.; d. h., wenn der bewegliche Punkt in der Mitte seiner Bahn angelangt ist.

Transformiert man nun das Koordinatensystem so, dass der Anfangspunkt nach O_1 verlegt wird und zugleich die Axen um den $\angle \alpha$ gedreht werden, so wird die neue x'-Axe in die Gerade M_0M_1 fallen und die y' werden = 0. Die Bewegung des Punktes M ist dann ausgedrückt durch die einzige Gleichung:

$$x' = [a \cos \alpha + b_1 \sin \alpha] \cos \lambda t,$$

in welcher $\angle \alpha$ bestimmt ist durch die Gleichung $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b_1}{a}$. Der Ausdruck in der Klammer ist aber $= M_0O_1$, $M_0O_1 = \sqrt{a^2 + b_1^2}$; mithin

$$x' = \sqrt{a^2 + b_1^2} \cdot \cos \lambda t.$$

Auch diese Gleichung lehrt uns, dass bei den Bedingungen dieser Aufgabe die Schwere und die Centralkraft O ersetzt werden können durch eine einzige, proportional der Entfernung wirkende Centralkraft O_1.

B. Konstantenbestimmung, wenn der Punkt M beliebig gerichtete Anfangsgeschwindigkeit hat.

Zur Konstantenbestimmung in den Gleichungen (6a) dienen für diesen Fall folgende Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{l} x = a;\ v_x = c_1 \\ y = b;\ v_y = c_2 \end{array}\right\} \text{für } t = 0.$$

Man erhält daraus $A = a$, $B = \frac{c_1}{\lambda}$,

$$A_1 = b + \frac{g}{\lambda^2} = b_1;\ B_1 = \frac{c_2}{\lambda}.$$

Die Bewegung des beweglichen Punktes wird dann also dargestellt durch das Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{array}{l} x = a \cos \lambda t + \frac{c_1}{\lambda} \sin \lambda t \\ y = b_1 \cos \lambda t + \frac{c_2}{\lambda} \sin \lambda t - \frac{g}{\lambda^2} \end{array}\right. \tag{8.}$$

Um die durch dieses Gleichungssystem dargestellte Kurve leichter bestimmen zu können, eliminieren wir λt; wir erhalten dann die Gleichung:

$$\left[c_2 x - c_1 \left(y + \frac{g}{\lambda^2}\right)\right]^2 + \lambda^2 \left[b_1 x - a\left(y + \frac{g}{\lambda^2}\right)\right]^2 = (ac_2 - b_1 c_1)^2.$$

Verwandeln wir nun das Koordinatensystem so, dass der Anfangspunkt in den Punkt $y = -\frac{g}{\lambda^2}$ verlegt wird, so ist $y_1 = y + \frac{g}{\lambda^2}$ zu setzen. Wenn wir nun gleichzeitig die Klammern ausrechnen und die Gleichung ordnen, ergiebt sich:

$$(c_2^2 + \lambda^2 b_1^2)\, x^2 + (c_1^2 + \lambda^2 a^2)\, y_1^2 - 2(c_1 c_2 + \lambda^2 a b_1)\, x y_1 - (ac_2 - b_1 c_1)^2 = 0. \tag{9.}$$

Dies ist aber die Gleichung eines auf seinen Mittelpunkt bezogenen Kegelschnitts,

welcher sich durch genauere Untersuchung im allgemeinen als eine Ellipse herausstellt. Bezeichnen wir nämlich die Koëfficienten von x^2, y_1^2, $2xy_1$, der Reihe nach mit A, B, C, so erhalten wir

$$C^2 - AB = -\lambda^2 . (ac_2 - b_1c_1)^2. \tag{10.}$$

Diese Grösse ist aber eine negative, ausser wenn $\lambda^2 = 0$, oder $ac_2 - b_1c_1 = 0$ ist; mithin ist die Kurve im allgemeinen eine Ellipse, deren Mittelpunkt im Punkte O_1 sich befindet.

Ist nun die in (10.) dargestellte Differenz = 0, und ist erstens $ac_2 - b_1c_1 = 0$, so ergiebt diese Bedingung, dass auch das absolute Glied der Gleichung (9.) zugleich verschwindet. Beide Bedingungen bedeuten aber, dass die Gleichung (9.) keine eigentliche Kurve, sondern zwei sich deckende Gerade darstellt. Aus der Bedingung $ac_2 - b_1c_1 = 0$ folgt, dass $\frac{a}{b_1} = \frac{c_1}{c_2}$ sein muss, und hieraus wieder, dass die Anfangsgeschwindigkeit in die Richtung $M_0\,O_1$ fallen muss.

Wir erhalten somit wieder als Resultat unserer Untersuchung, dass Punkt O_1 als Centrum der Bewegung angesehen werden kann.

Ist nun zweitens in Gleichung (10.) $\lambda^2 = 0$, so ergeben die Lehren der analytischen Geometrie für unsern Kegelschnitt eine Parabel. Auch dies Resultat liess sich voraussehen. Denn in diesem Falle muss die Centralkraft O als nicht vorhanden betrachtet werden, und wir haben einen sich bewegenden Punkt, der nur der Schwere unterworfen ist. Ein solcher muss aber eine Parabel beschreiben.

Sollte die in (10.) dargestellte Differenz positiv sein, so würde der Kegelschnitt (9.) bekanntlich eine Hyperbel sein. Diese Differenz kann aber nur dann positiv sein, wenn λ^2 selbst negativ ist, d. h. wenn die Centralkraft abstossend wirkt. Die Gleichungen (8.) würden sich dann durch Exponentialfunktionen darstellen lassen, welche für x und y keine periodisch wiederkehrenden Werte ergeben. Dieselben würden vielmehr nur einen einzigen Zweig einer Hyperbel darstellen, dessen unendlich ferner Punkt nach der Zeit $t = \infty$ erreicht wird. —

III) Wir gehen nun zu unserer eigentlichen Aufgabe über, der Bewegung eines materiellen Punktes in einer mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit um eine Vertikalaxe rotierenden Ebene, wenn derselbe der Schwere und einer in der Vertikale befindlichen Centralkraft, welche direkt proportional der Entfernung wirkt, unterworfen ist.

Die absolute Bewegung des Punktes setzt sich aus zwei Bewegungen zusammen, aus der relativen Bewegung in der rotierenden Ebene, und der durch die Rotation der Ebene hervorgerufenen. Wir bestimmen zunächst die relative Bewegung des beweglichen Punktes in der rotierenden Ebene; da die Ebene mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit rotiert, lassen sich mit Leichtigkeit aus den Koordinaten der relativen Bewegung die absoluten Raumkoordinaten herleiten.

Wir haben zunächst die Differentialgleichungen für die relative Bewegung des Punktes M in der rotierenden Ebene aufzustellen. Wir nennen die Koordinaten ξ und η, nehmen zur Koordinatenebene die rotierende Ebene selbst, legen den Anfangspunkt der Koordinaten wieder in das Centrum O, die η-Axe lassen wir mit der Vertikale zusammenfallen; senkrecht auf derselben in O steht die ξ-Axe.

Die Intensität der Centralkraft in O sei in der Einheit der Entfernung λ^2, die Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Ebene in der Einheit der Entfernung ω.

Die Beschleunigungen, welche auf Punkt M wirken, sind nun folgende:

1) Die im Punkte O befindliche Centralkraft, welche proportional der Entfernung wirkt. Dieselbe ist $= -\lambda^2 r$ und beeinflusst die beiden Beschleunigungskomponenten.
2) Die Centrifugalbeschleunigung, welche durch die Rotation der Ebene hervorgerufen wird; dieselbe ist senkrecht zur Rotationsaxe und beeinflusst daher nur die Beschleunigungkomponente φ_ξ; dieselbe ist $= \omega^2\xi$.
3) Die Beschleunigung der Schwere, welche in die Richtung der Vertikale fällt; dieselbe beeinflusst nur die Komponente φ_η und ist, da wir die positiven η entgegengesetzt der Richtung der Schwere annehmen, $= -g$.

Wir erhalten demnach für die relative Bewegung des Punktes M folgende Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = -\lambda^2\xi + \omega^2\xi = (\omega^2 - \lambda^2)\,\xi = \varkappa^2\xi \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = -\lambda^2\eta - g. \end{cases} \tag{11.}$$

Die Integration der zweiten Gleichung ist schon oben in (Ia) gegeben worden; dagegen sind für die erste Gleichung 3 Fälle zu unterscheiden, ob $\omega^2 > \lambda^2$, $\omega^2 = \lambda^2$, $\omega^2 < \lambda^2$ ist. Ist $\omega^2 > \lambda^2$, wird $\varkappa^2$ positiv; ist $\omega^2 = \lambda^2$, wird $\varkappa^2 = 0$; ist $\omega^2 < \lambda^2$, wird $\varkappa^2$ negativ. Wir setzen zuerst $\varkappa^2 = 0$ und erhalten dann:

$$\begin{cases} \xi = Ct + D \\ \eta = A_1 \cos \lambda t + B_1 \sin \lambda t - \dfrac{g}{\lambda^2}; \end{cases} \tag{12a.}$$

zweitens für $\omega^2 - \lambda^2 = -\varkappa^2$ ergiebt sich:

$$\begin{cases} \xi = A \cos \varkappa t + B \sin \varkappa t \\ \eta = A_1 \cos \lambda t + B_1 \sin \lambda t - \dfrac{g}{\lambda^2}; \end{cases} \tag{12b.}$$

und drittens für $\omega^2 - \lambda^2 = +\varkappa^2$:

$$\begin{cases} \xi = C_1\, e^{\varkappa t} + D_1\, e^{-\varkappa t} \\ \eta = A_1 \cos \lambda t + B_1 \sin \lambda t - \dfrac{g}{\lambda^2}. \end{cases} \tag{12c.}$$

A. Konstantenbestimmung ohne Anfangsgeschwindigkeit.

Es sei

$$\left.\begin{array}{l} \xi = a;\ v_\xi = 0 \\ \eta = b;\ v_\eta = 0 \end{array}\right\} \text{ für } t = 0.$$

Hieraus erhalten wir:

$$A = a,\ B = 0$$

$$A_1 = b + \frac{g}{\lambda^2} = b_1;\ B_1 = 0$$

$$C = 0;\ D = a$$

$$C_1 = D_1 = \frac{a}{2}.$$

Die Gleichungen der relativen Bewegung des Punktes sind daher:

$$\begin{cases} \xi = a \\ \eta = b_1 \cos \lambda t - \frac{g}{\lambda^2}; \end{cases} \tag{13^a}$$

$$\begin{cases} \xi = a \cos \varkappa t \\ \eta = b_1 \cos \lambda t - \frac{g}{\lambda^2}; \end{cases} \tag{13^b}$$

$$\begin{cases} \xi = \frac{a}{2}(e^{\varkappa t} + e^{-\varkappa t}) \\ \eta = b_1 \cos \lambda t - \frac{g}{\lambda^2}. \end{cases} \tag{13^c}$$

Von diesen Koordinaten ist uns der Verlauf der η, welche für alle drei Fälle dieselben bleiben, schon aus den früheren Untersuchungen bekannt, dagegen bedürfen die ξ einer kurzen Besprechung. In (13^a) ist $\xi = a$; der bewegliche Punkt behält in diesem Falle während der ganzen Dauer seiner Bewegung den Abstand a von der vertikalen Axe; er bewegt sich also parallel zu dieser Axe ab- und aufwärts.

In (13^b) ist $\xi = a \cos \varkappa t$. Die ξ des Punktes M sind periodisch wiederkehrend; das Maximum, $\xi = a$, tritt ein, wenn $\varkappa t = 0, 2\pi, 4\pi$ etc. ist, das Minimum, $\xi = -a$, wenn $\varkappa t = \pi, 3\pi, 5\pi$. ξ wird $= 0$, wenn $\varkappa t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ etc. In diesem Moment schneidet der bewegte Punkt die Vertikale. Genaueres über die relative Bewegung des Punktes in der Ebene und die Gestalt seiner Kurve lässt sich schwer angeben, so lange die Werte von $\varkappa$ und λ in den Gleichungen 13^b unbestimmt bleiben. Sind dagegen für $\varkappa$ und λ bestimmte Werte gegeben, so lässt sich oft t eliminieren und man erhält dann eine algebraische Kurve. Ist z. B. $\lambda = 2\varkappa$, so ergiebt sich als Gleichung für die Kurve (13^b)

$$\eta = \frac{2 b_1}{a^2} \xi^2 - b_1 - \frac{g}{\lambda^2}.$$

Dies stellt aber eine Parabel dar, deren Axe in die Vertikale fällt, deren Parameter $= \frac{a^2}{2b_1}$ ist, und deren Scheitel im Punkte $\eta = -\left(b_1 + \frac{g}{\lambda^2}\right)$ liegt. In diesem Falle fällt also Punkt M von M_0 (a, b) in einem Parabelbogen bis zur Vertikale, welche er in einem Punkte M_1 schneidet, der um $2 b_1$ tiefer liegt als der Anfangspunkt M_0, steigt dann in einem zweiten kongruenten Parabelbogen aufwärts bis zu einem Punkte M_2 (— a, b). Von M_2 bewegt sich der Punkt zurück durch M_1 nach M_0 und wiederholt nun diese Bewegung.

In (13^c) ist $\xi = a \left(\frac{e^{\varkappa t} + e^{-\varkappa t}}{2}\right)$. Die Werte der ξ sind bei dieser Bewegung nicht periodisch wiederkehrende, sondern nehmen mit wachsendem t zu, so dass für $t = \infty$ auch $\xi = \infty$ wird; die Zunahme der ξ wird mit wachsendem t eine immer schnellere. Man kann die Exponentialfunktion auch durch Cos. hyp. ersetzen, denn bekanntlich ist: $\frac{e^{\varkappa t} + e^{-\varkappa t}}{2} = \cos.$ hyp. $\varkappa t$. Die durch (13^c) dargestellte Kurve lässt sich etwa als eine wellenförmige Kurve bezeichnen, deren Wellen durch Vergrösserung der Wellenlänge immer flacher werden.

Absolute Bewegung.

Wir gehen nun über zur Bestimmung der absoluten Bewegung des Punktes M im Raume, wenn derselbe keine Anfangsgeschwindigkeit hat. Als absolute Koordinaten nehmen wir x, y, z. Den Anfangspunkt derselben lassen wir unverändert in O, die η-Axe wird z-Axe, zur x-Axe nehmen wir die Axe der ξ zur Zeit $t = 0$, die y-Axe senkrecht auf der xz-Ebene. Aus dieser Festsetzung folgt, dass unmittelbar $z = \eta$ ist. Die x und y sind durch ξ zu bestimmen. Nennen wir den Winkel, welchen die durch den Punkt M und die Vertikalaxe gelegte Ebene zur Zeit t mit der rotierenden Ebene im Anfange der Bewegung, d. h. mit der xz-Ebene bildet, φ, so ist

$$x = \xi \cos \varphi, y = \xi \sin \varphi.$$

$\angle \varphi$ lässt sich aber durch die Zeit ausdrücken. Da die Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Ebene gleichförmig ist, folgt daraus $\varphi = \omega t$. Setzen wir diesen Wert für φ und für ξ und η die Werte der Gleichungen (13) ein, so erhalten wir als Gleichungen für die absolute Bewegung des Punktes M im Raume folgende drei Systeme:

$$\left\{\begin{array}{l} x = a \cos \omega t \\ y = a \sin \omega t \\ z = b_1 \cos \lambda t - \frac{g}{\lambda^2}; \end{array}\right. \qquad (14^{a.})$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = a \cos \varkappa t \cos \omega t \\ y = a \cos \varkappa t \sin \omega t \\ z = b_1 \cos \lambda t - \frac{g}{\lambda^2}; \end{array}\right. \qquad (14^{b.})$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = a . \frac{e^{\varkappa t} + e^{-\varkappa t}}{2} \cos \omega t \\ y = a . \frac{e^{\varkappa t} + e^{-\varkappa t}}{2} \sin \omega t \\ z = b_1 \cos \lambda t - \frac{g}{\lambda^2}. \end{array}\right. \qquad (14^{c.})$$

a) Untersuchung der Kurve 14^a.

Das Gleichungssystem dieser Kurve

$$\left\{\begin{array}{l} x = a \cos \omega t \\ y = a \sin \omega t \\ z = b_1 \cos \lambda t - \frac{g}{\lambda^2} \end{array}\right.$$

hat grosse Ähnlichkeit mit den Gleichungen einer Schraubenlinie; die x und y stimmen genau überein, nur die z sind verschieden. Eliminiert man aus den beiden ersten Gleichungen die Zeit, so erhält man

$$x^2 + y^2 = a^2. \qquad (15.)$$

Diese Gleichung stellt im Raume aber einen Kreiscylinder dar, dessen Axe in die z-Axe fällt. Punkt M bewegt sich in diesem Falle also auf einem Kreiscylinder, dessen Axe die Vertikale ist. Um nun auch die z in die Untersuchung zu ziehen, erinnern wir uns, dass für diesen Fall der Bewegung $\omega^2 - \lambda^2 = 0$, d. h. $\omega^2 = \lambda^2$ war; mithin können wir in der dritten

Gleichung setzen $z = b_1 \cos \omega t - \frac{g}{\lambda^2}$.*) Für $\omega t = \frac{\pi}{2}$ wird $x = 0$, $y = a$, $z = -\frac{g}{\lambda^2}$. M befindet sich dann (Taf. Fig. 4) an der Stelle M_2 des Cylinders, welche senkrecht über dem bekannten Punkte O_1 auf der xz-Ebene liegt. Ist $\omega t = \pi$ geworden, so ist $x = -a$, $y = 0$, $z = -\left(b_1 + \frac{g}{\lambda^2}\right)$. Punkt M liegt dann wieder, wie im Anfange der Bewegung, in der xz-Ebene, aber auf der entgegengesetzten Seite der Cylinderaxe und so, dass Punkt O_1 der Mittelpunkt zwischen der Anfangslage M_0 und dieser Lage M_1 ist. Von diesem Punkte an erhebt sich der Punkt M auf der entgegengesetzten Seite des Cylinders in genau entsprechendem Kurvenbogen, bis er für $\omega t = 2\pi$ wieder am Anfangspunkte angelangt ist. Von dieser Zeit an durchläuft der Punkt immer wieder dieselbe Kurve. Betrachten wir nun die Geschwindigkeit des Punktes an einigen Stellen seiner Bahn. Die Komponenten der Geschwindigkeit sind

$$v_x = -a\omega \sin \omega t,\ v_y = a\omega \cos \omega t,\ v_z = -b_1\omega \sin \omega t,$$

woraus $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \omega \sqrt{a^2 + b_1^2 \sin \omega^2 t}$.

Das Minimum der Geschwindigkeit hat man zur Zeit $\omega t = 0, \pi, 2\pi$ etc., d. h. also in den Punkten M_0 und M_1; dieselbe ist dann $= a\omega$, was auch aus der Natur dieser Bewegung notwendig folgt, da die Geschwindigkeiten der Schwerkraft und der Centralkraft zu diesen Zeiten sich aufheben. Das Maximum der Geschwindigkeit tritt ein, wenn $\omega t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ etc. ist, d. h. wenn Punkt M auf seiner Bahn die yz-Ebene schneidet, also in den beiden Punkten seiner Bahn, die senkrecht über dem Punkte O_1 auf der xz-Ebene liegen. Die Geschwindigkeit ist dann $= \omega \sqrt{a^2 + b_1^2}$.

Um die Natur dieser Kurve weiter zu untersuchen, betrachten wir die Grösse ihrer Krümmungen, indem wir die Krümmungsradien bestimmen, deren Grösse bekanntlich ist

$$\varrho = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}},$$

$$\varrho_1 = \frac{P^2 + Q^2 + R^2}{P\frac{d^3x}{dt^3} + Q\frac{d^3y}{dt^3} + R\frac{d^3z}{dt^3}},$$

worin $P = \frac{dy}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}$; $Q = \frac{dz}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}$; $R = \frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}$.

Wir haben also die Ableitungen nach t bis zur dritten auszurechnen. Dieselben sind:

$$\frac{dx}{dt} = -a\,\omega \sin \omega t;\ \frac{d^2x}{dt^2} = -a\,\omega^2 \cos \omega t;\ \frac{d^3x}{dt^3} = a\,\omega^3 \sin \omega t$$

$$\frac{dy}{dt} = a\,\omega \cos \omega t;\ \frac{d^2y}{dt^2} = -a\,\omega^2 \sin \omega t;\ \frac{d^3y}{dt^3} = -a\,\omega^3 \cos \omega t$$

$$\frac{dz}{dt} = -b_1\,\omega \sin \omega t;\ \frac{d^2z}{dt^2} = -b_1\,\omega^2 \cos \omega t;\ \frac{d^3z}{dt^3} = b_1\,\omega^3 \sin \omega t.$$

*) Der Verfasser bittet um Entschuldigung, wenn er nicht schon an dieser Stelle das Resultat der Untersuchung giebt; es erschien demselben aber diese Kurve als ein einfaches und lehrreiches Beispiel zur Anwendung der Differentialrechnung auf Geometrie. Daher die Einschaltung dieser Untersuchung.

Hieraus ergiebt sich:

$$P = -ab_1\omega^3;\ Q = 0;\ R = a^2\omega^3;\ \frac{ds}{dt} = \omega\sqrt{a^2 + b_1^2\sin^2\omega t};\ \text{mithin}$$

$$\varrho = \sqrt{\frac{\omega^6(a^2+b_1^2\sin^2\omega t)^3}{a^2b_1^2\omega^6 + a^4\omega^6}} = \sqrt{\frac{(a^2+b_1^2\sin^2\omega t)^3}{a^2(a^2+b_1^2)}} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{(a^2+b_1^2\sin^2\omega t)^3}{a^2+b_1^2}}.$$

ϱ ist ein Minimum, wenn $\omega t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$ etc., also in den Punkten M_0 und M_1, wo M die geringste Geschwindigkeit hat; ϱ_{min} ist $= \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b_1^2}}$.

ϱ ist ein Maximum, wenn $\omega t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ etc., also wenn der Punkt M seine grösste Geschwindigkeit hat; ϱ_{max} ist $= \frac{a^2+b_1^2}{a}$.

Für den zweiten Krümmungsradius ergiebt sich:

$$\varrho_1 = \frac{a^2\omega^6(a^2+b_1^2)}{-a^2b_1\omega^6\sin\omega t + a^2b_1\omega^6\sin\omega t} = \infty.$$

Da hiernach die zweite Krümmung = 0 ist, muss die Kurve in einer Ebene liegen; der Punkt M bewegt sich also in einer Kurve, welche der Durchschnitt eines geraden Kreiscylinders und einer Ebene ist. Dies ist aber eine Ellipse.

Dies Resultat ergiebt sich auch aus den Gleichungen (14^a), wenn wir die Zeit aus denselben eliminieren. Aus der ersten und zweiten hatten wir bereits erhalten

$$x^2 + y^2 = a^2. \qquad (15^a)$$

Eliminieren wir nun noch aus der ersten und dritten ωt, indem wir $\cos\omega t = \frac{x}{a}$ in der dritten substituieren, so ergiebt sich

$$z = \frac{b_1}{a}x - \frac{g}{\lambda^2}. \qquad (15^b)$$

Diese Gleichung stellt aber eine Ebene dar, welche parallel der y-Axe ist, und die z-Axe im Punkte $z = -\frac{g}{\lambda^2}$, dem bekannten O_1, schneidet. Der Winkel, den sie mit der xy-Ebene bildet, ist bestimmt durch die Gleichung $\operatorname{tg}\gamma = \frac{b_1}{a}$.

Wir stellen nun noch die Gleichung der durch (15^a) und (15^b) dargestellten Ellipse für die Ebene auf, in welcher sie liegt. Zu diesem Zwecke verlegen wir den Anfangspunkt der Koordinaten in den Punkt O_1, indem wir $z_1 = z + \frac{g}{\lambda^2}$ setzen, und drehen dann die xy-Ebene um die y-Axe um den $\angle\,\gamma$, so dass die neue x_1y_1-Ebene mit der Ebene (15^b) zusammenfällt, und die neue z_2-Axe senkrecht auf der x_1y_1 Ebene steht. Es wird dann

$$x = x_1\cos\gamma = \frac{ax_1}{\sqrt{a^2+b_1^2}};\ y = y_1,\ \text{und}\ z_2 = 0.$$

Setzen wir für x und y die gefundenen Werte in (15^a) ein, so erhalten wir als Gleichung der ebenen Ellipse

$$\frac{x_1^2}{a^2+b_1^2} + \frac{y_1^2}{a^2} = 1.$$

Die grosse Axe dieser Ellipse ist $= 2\sqrt{a^2 + b_1^2}$, die kleine Axe $= 2a$, was auch aus der Figur sofort einleuchtet. Der Mittelpunkt dieser Ellipse ist wiederum der Punkt O_1; und da für die Bewegung des Punktes M in diesem Falle das Princip der Flächen in Bezug auf O_1 Geltung hat, so ist die Bewegung wieder eine solche, als wenn der Punkt M einer einzigen in O_1 befindlichen Centralkraft unterworfen wäre.

b) Untersuchung der Kurve 14^b.

Von dem Gleichungssystem dieser Kurve

$$\begin{cases} x = a \cos \varkappa t \cos \omega t \\ y = a \cos \varkappa t \sin \omega t \\ z = b_1 \cos \lambda t - \dfrac{g}{\lambda^2} \end{cases}$$

ist uns die dritte Gleichung schon bekannt; und da wir die z in ihrem Verlauf schon mehrfach betrachtet haben, wenden wir uns sogleich der Untersuchung der x und y zu. Wir eliminieren aus den beiden ersten Gleichungen ωt und erhalten dann die Gleichung für die Projektion der Kurve 14^b auf die xy-Ebene; dieselbe lautet zunächst

$$x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 \varkappa t.$$

Um diese Gleichung in Polarkoordinaten darzustellen, setzen wir $x^2 + y^2 = r^2$ und müssen den $\angle \varphi$ in die Gleichung bringen. Es ist $\omega t = \varphi$, somit $\varkappa t = \frac{\varkappa \varphi}{\omega}$, wo $\varkappa = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$. Setzen wir nun $\sqrt{\frac{\lambda^2 - \omega^2}{\omega^2}} = \mu$, so entsteht als Polargleichung der xy-Projektion unserer Kurve

$$r = a \cos \mu\varphi; \tag{16.}$$

μ liegt zwischen 0 und ∞.

Diese Kurve bleibt stets im endlichen, denn ihre Grenzwerte sind $+ a$ und $- a$; für $\mu\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ etc. wird $r = 0$, d. h. die Kurve geht durch die Vertikalaxe; und zwar für $\mu\varphi = \frac{(4n+1).\pi}{2}$ von der positiven Seite des Radiusvektors zur negativen, und für $\mu\varphi = \frac{(4n+3).\pi}{2}$ von der negativen zur positiven.

Im Anfange der Bewegung steht die Kurve senkrecht auf dem Radiusvektor; es ist nämlich, da $\operatorname{tg} u = \frac{r.d\varphi}{dr}$, bei dieser Kurve: $\operatorname{tg} u = -\frac{1}{\mu} \operatorname{cotg} \mu\varphi$; mithin für $\varphi = 0$ wird $u = \frac{\pi}{2}$. Dies tritt ferner ein, wenn $\mu\varphi = \pi, 2\pi, 3\pi$ etc., d. h. wenn $r = + a$ oder $= - a$ ist.

Giebt man dem μ nach und nach alle möglichen Werte von 0 bis ∞, so wird durch die Gleichung (16.) eine ganze Schar von Kurven dargestellt, deren Enveloppe ein Kreis mit dem Halbmesser a um O ist.

Um uns von der Gestalt der Kurve eine etwas genauere Vorstellung machen zu können, betrachten wir erstens unsere Gleichung, wenn $\mu > 1$, zweitens, wenn $\mu < 1$, drittens, wenn $\mu = 1$ ist.

1. $\mu > 1$. Unsere Kurve verläuft in einem Kurvenbogen, dessen r anfangs langsam, dann schneller abnehmen, zum Mittelpunkt des einhüllenden Kreises (erster Zweig); von da in

einem, dem bereits beschriebenen symmetrischen Zweige auf der negativen Seite des Radiusvektors wieder zur Peripherie des einhüllenden Kreises (zweiter Zweig); hier schliesst sich ein dritter symmetrischer Zweig an, welcher im Mittelpunkt endigt und mit dem zweiten Zweige eine blattartige Figur bildet. Von diesem Moment an geht die Kurve wieder auf die positive Seite des Radiusvektors über bis zur Peripherie des Grundkreises und bildet den vierten Kurvenzweig, welcher mit dem nun folgenden fünften wieder ein Blatt bildet, das dem bereits von dem zweiten und dritten Zweige gebildeten kongruent ist. Vom fünften Kurvenzweige an wiederholt sich der soeben betrachtete Verlauf; derselbe heisse ein Zug. Bezeichnen wir denjenigen Winkel φ, für welchen $\mu\varphi = \frac{\pi}{2}$ wird, mit φ_1, so dass $\varphi_1 = \frac{\pi}{2\mu}$, und denken wir uns auf dem Grundkreise von der Anfangslage aus gleiche Sektoren, deren Centriwinkel $= \varphi_1$ sind, abgetragen; so liegt der erste Kurvenzweig in S_1, der zweite und dritte in den Scheitelsektoren zu S_2 und S_3, der vierte und fünfte Zweig in S_4 und S_5 selbst u. s. w. (Taf. Fig. 5.) Wie oft nun die Züge wiederkehren, ohne früher bereits beschriebene zu decken, hängt von μ ab. Ist μ irrational, wird jeder neue Zug an einem neuen Punkte der Peripherie beginnen und daher keinen früheren Zug decken können; die neuen Züge werden früher beschriebene vielfach schneiden. Ist aber $n\pi : 2\varphi_1 = m$, wo n und m ganze Zahlen bedeuten, so kommt nach einer gewissen Zahl von Zügen eine Wiederholung der bereits beschriebenen, wobei allerdings auch, wenn μ keine ganze Zahl ist, die Züge einander schneiden. Es mögen nun einige Beispiele folgen, in denen μ eine ganze Zahl ist.

a) $\mu = 2$; $r = a \cos 2\varphi$. Es ist $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$; mithin enthält der Grundkreis 8 gleiche Sektoren. Die Kurve besteht aus 8 Kurvenzweigen, welche 4 Blätter bilden. Diese Kurve ist das bekannte Vierblatt, dessen Gleichung in der Regel in der Form $r = a \sin 2\varphi$ erscheint, oder auch in einer algebraischen Gleichung sechsten Grades. (Taf. Fig. 6.)

b) $\mu = 3$; $r = a \cos 3\varphi$. Es ist $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$; der Grundkreis enthält 12 gleiche Sektoren. Die Kurve besteht aus 6 Zweigen, welche 3 Blätter bilden. Nur die Hälfte der Sektoren enthält Kurvenzweige. (Taf. Fig. 7.)

Ist μ eine ungerade Zahl, besteht die Kurve aus 2μ Kurvenzweigen und μ Blättern; nur die Sektoren S_1, S_4, S_5, S_8, S_9 etc. enthalten Zweige; ist μ eine gerade Zahl, besteht die Kurve aus 4μ Zweigen und 2μ Blättern; jeder Sektor enthält einen Kurvenzweig. In beiden Fällen schneiden die Züge sich nur in O.

2. Ist $\mu < 1$, schneidet der zweite Zweig schon den ersten, ob mehrfach, hängt von μ ab. Je kleiner μ wird, desto öfter wird schon der erste Zweig von dem zweiten geschnitten; dagegen schneiden die Züge einander für manche Werte des μ nicht in O. In vielen Fällen wiederholt sich die Kurve schon vom dritten Zweige an, so dass die ganze Kurve nur aus zwei Zweigen besteht. Einige Beispiele werden dies am besten erläutern.

a) $\mu = \frac{1}{2}$; $r = a \cos \frac{1}{2}\varphi$. Es ist $\varphi_1 = \pi$, die Sektoren sind also Halbkreise. Es bedarf zweier voller Umläufe des Radiusvektors um O, bis eine Wiederholung der Kurve eintritt. Dieselbe besteht aus 4 Zweigen, von denen der zweite den ersten, der vierte den dritten schneidet. (Taf. Fig. 8.)

b) $\mu = \frac{1}{3}$; $r = a \cos \frac{1}{3} \varphi$; φ_1 ist $= \frac{3\pi}{2}$, mithin besteht jeder Sektor aus 3 Quadranten; eine Wiederholung tritt schon beim dritten Zweige ein. Die Kurve besteht nur aus 2 Zweigen, welche sich in einem Punkte schneiden, für welchen $r = -\frac{1}{2}$ a ist. (Taf. Fig. 9.)

c) $\mu = \frac{1}{4}$; $r = a \cos \frac{1}{4} \varphi$. Zu einem Zweige bedarf es eines ganzen Umlaufs; nach vier Umläufen wiederholen sich die Kurvenzweige, deren es somit 4 giebt. Die Zweige schneiden einander in 6 Punkten.

Es lassen sich auch hier einige allgemeine Gesetze aufstellen, wenn $\mu = \frac{1}{n}$ ist; die weitere Ausführung würde uns aber zu weit führen.

3. $\mu = 1$; $r = a \cos \varphi$. Diese Gleichung stellt einen Kreis dar, dessen Durchmesser a ist. Der Punkt M bewegt sich in diesem Falle also wieder auf einem Kreiscylinder; derselbe ist jedoch nicht identisch mit demjenigen, welchen wir bei Betrachtung der Kurve 14ª kennen gelernt haben. Dort war die Vertikale die Axe des Cylinders, hier liegt sie auf der Cylinderfläche selbst. Die Bedingung, unter welcher $\mu = 1$ werden kann, ergiebt sich aus

$$\sqrt{\frac{\lambda^2 - \omega^2}{\omega^2}} = 1; \text{ hieraus folgt}$$
$$\lambda^2 = 2\omega^2.$$

Dieser Fall tritt also ein, wenn die Centralkraft in unserer Aufgabe doppelt so gross ist als die durch die Rotation der Ebene hervorgerufene Schwungkraft. Mit Hülfe dieser Bestimmung können wir die Gleichungen der Kurve (14^b) so umformen, dass in den Winkelgrössen t nur durch ω bestimmt wird. Es ist nämlich $\varkappa^2 = \lambda^2 - \omega^2$, mithin $\varkappa = \omega$, und $\lambda = \sqrt{2} . \omega$; wir erhalten demnach für die Bewegung des Punktes M folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{cases} x = a \cos^2 \omega t \\ y = a \cos \omega t \sin \omega t \\ z = b_1 \cos \sqrt{2} . \omega t - \frac{g}{\lambda^2}. \end{cases}$$

Eine so einfache Kurve, wie wir sie in (14^a) gefunden haben, ergiebt sich für diesen Fall jedoch nicht und wir unterlassen daher eine weitere Betrachtung derselben.

Über die durch die Kurve (14^b) dargestellte Bewegung des Punktes M lässt sich im allgemeinen folgendes sagen. Die Bewegung beginnt im Punkte M_0 (a, 0, b) parallel zur y-Axe und zur xy-Ebene; dann fällt der Punkt und nähert sich der vertikalen z-Axe. Diese wird mehrfach geschnitten und der Punkt oscilliert zwischen zwei Horizontalebenen, welche einen Abstand $= 2\left(b + \frac{g}{\lambda^2}\right) = 2b_1$ von einander haben. In den höchsten und tiefsten Lagen ist die Tangente der Bahn des Punktes parallel der xy-Ebene. Ob die Vertikale geschnitten wird, bevor der Punkt seine tiefste Lage zum ersten Male erreicht hat, hängt von den Grössen λ und $\varkappa$ ab. Für $\varkappa = \frac{1}{2}\lambda$ schneidet M die Vertikale im tiefsten Punkte; ist $\varkappa > \frac{1}{2}\lambda$ wird die Vertikale vorher geschnitten, ist $\varkappa < \frac{1}{2}\lambda$, nachher.

c) Untersuchung der Kurve 14^c^.

Das Gleichungssystem dieser Kurve war

$$\begin{cases} x = a \cdot \frac{e^{\varkappa t} + e^{-\varkappa t}}{2} \cos \omega t = a \cos hyp. \varkappa t \cdot \cos \omega t \\ y = a \cdot \frac{e^{\varkappa t} + e^{-\varkappa t}}{2} \sin \omega t = a \cos hyp. \varkappa t \cdot \sin \omega t \\ z = b_1 \cos \lambda t - \frac{g}{\lambda^2}. \end{cases}$$

Aus der dritten Gleichung ergiebt sich wieder, dass der Punkt zwischen denselben Horizontalebenen, welche wir soeben betrachtet haben, oscilliert. Die Projektion auf die xy-Ebene stellt eine Kurve dar, deren r mit wachsendem t nicht periodisch wiederkehren, sondern sehr schnell zunehmen; dieselbe ist eine spiralförmige Kurve, deren Anfangspunkt von O die Entfernung a hat, deren Windungen mit wachsender Zeit immer stärker sich von einander entfernen, entsprechend der Zunahme des cos. hyp. Ist z. B. $\varkappa = 1$, $\omega = 2\pi$, so nimmt r folgende Werte an:

für t = 0 wird r = a,
„ t = 0,5 „ r = 1,1276a,
„ t = 1 „ r = 1,5431a,
„ t = 1,5 „ r = 2,3524a,
„ t = 2 „ r = 3,7622a,
„ t = 2,5 „ r = 6,1323a,
„ t = 3 „ r = 10,0677a,
„ t = 3,5 „ r = 16,5728a,
„ t = 4 „ r = 27,3082a.

In Figur 10 sind die beiden ersten Windungen dieser Kurve ausgezogen; auf der Polaraxe ist der Schnittpunkt der dritten bezeichnet.

B. Konstantenbestimmung der Gleichungen (12), wenn der Punkt M Anfangsgeschwindigkeit besitzt.

Es sei für t = 0

$$\begin{cases} \xi = a; \frac{d\xi}{dt} = v_\xi = c_1, \\ \eta = b; \frac{d\eta}{dt} = v_\eta = c_2; \end{cases}$$

es wird dann

$$A = a;\ B = \frac{c_1}{\lambda}$$

$$A_1 = b + \frac{g}{\lambda^2} = b_1;\ B_1 = \frac{c_2}{\lambda}$$

$$C = c_1;\ D = a.$$

$$C_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{c_1}{\varkappa}\right);\ D_1 = \frac{1}{2}\left(a - \frac{c_1}{\varkappa}\right)$$

Wir erhalten somit als Gleichungen der relativen Bewegung des Punktes M:

$$\begin{cases} \xi = a + c_1 t \\ \eta = b_1 \cos \lambda t + \frac{c_2}{\lambda} \sin \lambda t - \frac{g}{\lambda^2}; \end{cases} \tag{17^a}$$

$$\begin{cases} \xi = a\cos\varkappa t + \frac{c_1}{\lambda}\sin\varkappa t \\ \eta = b_1\cos\lambda t + \frac{c_2}{\lambda}\sin\lambda t - \frac{g}{\lambda^2}; \end{cases} \qquad (17^b.)$$

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{2}\left(a + \frac{c_1}{\varkappa}\right)e^{\varkappa t} + \frac{1}{2}\left(a - \frac{c_1}{\varkappa}\right)e^{-\varkappa t} = a\frac{e^{\varkappa t}+e^{-\varkappa t}}{2} + \frac{c_1}{\varkappa}\frac{e^{\varkappa t}+e^{-\varkappa t}}{2} \\ \eta = b_1\cos\lambda t + \frac{c_2}{\lambda}\sin\lambda t - \frac{g}{\lambda^2}. \end{cases} \qquad (17^c.)$$

Die Gleichungen für die absolute Bewegung des Punktes im Raume ergeben sich aus diesen wieder durch die bekannte Substitution:

$$\begin{cases} x = \xi\cos\omega t \\ y = \xi\sin\omega t \\ z = \eta. \end{cases}$$

Ohne bestimmte numerische Werte für die Grössen λ, ω und $\varkappa$ können aber die durch diese Gleichungen dargestellten Kurven nur in sehr unvollkommener Weise untersucht werden; wir unterlassen es daher, die aus den Gleichungen (17) sich ergebenden Gleichungssysteme der absoluten Bewegung im Raume aufzustellen.

Zum Schluss möge es gestattet sein, durch ein Beispiel mit einfachen numerischen Werten die obigen Untersuchungen abschliessen zu dürfen.

„Die Masse des Punktes M sei, wie auch vorher angenommen war, $= 1$; $\lambda^2 = \frac{\pi^2}{4}$; $\omega = \frac{2\pi}{5}$; die Anfangsgeschwindigkeit in der rotierenden Ebene $= 0$; $x = 1$m, $z = \frac{g}{\pi^2}$ m für $t = 0$."

Es ist nun zu untersuchen, welches Gleichungssystem für diese Bewegung in Anwendung kommt. Es ist $\omega^2 - \lambda^2 = \frac{4}{25}\pi^2 - \frac{1}{4}\pi^2 = -\frac{9}{100}\pi^2 = -\varkappa^2$; mithin passt das Gleichungssystem 14^b. Setzen wir nun noch, obigen Bestimmungen entsprechend,

$$a = 1\text{m},\ b + \frac{g}{\lambda^2} = b_1 = \frac{5g}{\pi^2}\text{m},\ \lambda = \frac{\pi}{2},\ \omega = \frac{2\pi}{5},\ \varkappa = \frac{3\pi}{10};$$

so ergiebt sich, wenn wir den Anfangspunkt des Koordinatensystems in den Punkt O_1 legen, für die Bewegung des Punktes M folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{cases} x = \cos\frac{3}{10}\pi t.\cos\frac{2}{5}\pi t \\ y = \cos\frac{3}{10}\pi t.\sin\frac{2}{5}\pi t \\ z_1 = b_1\cos\frac{1}{2}\pi t. \end{cases} \qquad (18.)$$

Hieraus ergeben sich, wenn wir in den Werten für z_1 die Konstante $b_1 = \frac{5g}{\pi^2}\text{m} = 4{,}9690\,\text{m}$ der Übersichtlichkeit wegen als Faktor stehen lassen und in x und y m fortlassen, auf 4 Decimalstellen folgende Werte:

$t=0$	$t=\frac{1}{2}''$	$t=\frac{5}{6}''$	$t=1''$	$t=1\frac{1}{4}''$
$x=+1$ $y=0$ $z_1=+b_1$	$x=0{,}7208$ $y=0{,}5237$ $z_1=0{,}7071\,.\,b_1$	$x=0{,}3536$ $y=0{,}6124$ $z_1=0{,}2588\,.\,b_1$	$x=0{,}1816$ $y=0{,}5590$ $z_1=0$	$x=0$ $y=0{,}3827$ $z_1=-0{,}3827\,.\,b_1$
$t=1\frac{2}{3}''$	$t=2''$	$t=2\frac{1}{2}''$	$t=3''$	$t=3\frac{1}{3}''$
$x=0$ $y=0$ $z_1=-0{,}8660\,.\,b_1$	$x=0{,}25$ $y=-0{,}1816$ $z_1=-b_1$	$x=0{,}7071$ $y=0$ $z_1=-0{,}7071\,.\,b_1$	$x=0{,}7694$ $y=0{,}5590$ $z_1=0$	$x=0{,}5$ $y=0{,}866$ $z_1=0{,}5\,.\,b_1$
$t=4''$	$t=5''$	$t=6''$	$t=6\frac{2}{3}''$	$t=7\frac{1}{2}''$
$x=-0{,}25$ $y=0{,}7694$ $z_1=b_1$	$x=0$ $y=0$ $z_1=0$	$x=0{,}25$ $y=0{,}7694$ $z_1=-b_1$	$x=-0{,}5$ $y=0{,}866$ $z_1=-0{,}5\,.\,b_1$	$x=-0{,}7071$ $y=0$ $z_1=0{,}7071\,.\,b_1$
$t=8''$	$t=8\frac{1}{3}''$	$t=9''$	$t=10''$	
$x=-0{,}25$ $y=-0{,}1816$ $z_1=b_1$	$x=0$ $y=0$ $z_1=0{,}866\,.\,b_1$	$x=-0{,}1816$ $y=+0{,}559$ $z_1=0$	$x=-1$ $y=0$ $z_1=-b_1$.	

Von $t = 10''$ ab werden alle Werte entgegengesetzt den bisherigen Werten; von $t = 20''$ ab wiederholen sich alle Werte in Perioden von $20''$. Der bewegliche Punkt M passiert O_1, wenn $t = 5''$, $15''$, $25''$ etc.

In Fig. 11 ist die Projektion der Bewegung auf die xy-Ebene zur Hälfte dargestellt; die Kurve beginnt in M_0, nach den Zeiten 1, 2 . . . bis 10 befindet sich der Punkt in den mit entsprechenden Ziffern bezeichneten Punkten. Die zugehörigen Werte des z_1 sind der Reihe nach: $+b_1$, 0, $-b_1$, 0, $+b_1$ etc. . . . Die Polar-Gleichung der xy-Projektion, entsprechend der Gleichung (16), würde lauten $r = \cos\frac{3}{4}\varphi$.

Ernst Steffenhagen.

Berichtigungen.

Seite 4, Z. 14 v. o. lies: $\frac{3\pi}{2} < \lambda t < 2\pi$ statt $\pi > \lambda t > \frac{\pi}{2}$.

Taf. Fig. 3 lies: $M_1\left(-a, -\left(b_1 + \frac{g}{\lambda^2}\right)\right)$ statt $M_1\left(-a, -\left(b + \frac{g}{\lambda^2}\right)\right)$.

Fig 7.

Fig. 8.

Fig 10.

Fig. 11.

Fig 9.

Jahresbericht

über

das Schuljahr von Ostern 1882 bis Ostern 1883.

A. Allgemeine Lehrverfassung.

Die Verteilung der Pensen auf die einzelnen Klassen ist von der des vergangenen Schuljahrs nicht unerheblich abgewichen; die infolge der neuen Lehrpläne vom 31. März 1882 nötig gewordenen Änderungen traten für die 3 unteren Klassen mit Beginn des Schuljahres in Kraft. In Quarta fiel der griechische Unterricht in dem Ostercoetus fort und die dadurch verfügbar werdenden Lehrstunden wurden zur Einführung des naturgeschichtlichen und zur Verstärkung des französischen und des mathematischen Unterrichtes verwendet; das Lateinische ward in VI, V und IV auf 9 Stunden beschränkt. Die Forderung der neuen Lehrpläne, dass überall in Jahreskursen unterrichtet werden solle und die Jahresversetzungen zu strenger Durchführung gelangen, liess sich leicht erfüllen, da das Stadtgymnasium für die drei unteren Klassen schon die Einrichtung der Wechselcoeten besass, und für die drei nächst höheren Klassen die schon bestehende Teilung in zwei Unter- und Obertertien und Untersekunden die Einrichtung der Wechselcoeten gestattete, mit welcher sofort vorgegangen wurde. Durch Erlass des Herrn Ministers der geistl. etc. Angelegenheiten wurde diese Einrichtung unter dem 28. Dezember 1882 bestätigt. Somit bestehen die Wechselcoeten jetzt für 6 Klassen und gestatten sowohl zu Ostern als zu Michaelis Aufnahme und Versetzung, so dass die Vorteile der Jahreskurse mit den Vorzügen der früheren Einrichtung verbunden werden konnten. Erst in Obersekunda vereinigen sich die Wechselcoeten wieder, wo ebenso wie in den beiden Primen die alte Einrichtung fortbesteht.

Nachdem von den städtischen Behörden die Teilung der ersten Vorschulklasse beschlossen war, wurden zu Michaelis auch für die Vorschule Wechselcoeten eingerichtet in der Art, dass die erste und zweite Klasse je einen Oster- und Michaeliscoetus erhielten, nur in der dritten Klasse werden zwei Abteilungen nebeneinander unterrichtet werden und die Aufnahme kann wie bisher sowohl zu Ostern als zu Michaelis stattfinden. Der bis dahin 2½ jährige Kursus der Vorschule wurde bei dieser Gelegenheit auf Veranlassung des Königl. Provinzial-Schul-Kollegiums in einen 3jährigen umgewandelt und durch Verfügung vom 9. Januar d. J. diese Einrichtung der Vorschule bestätigt. Zu Michaelis wurde auch der Lehrplan des Michaeliscoetus der Quarta den neuen Vorschriften entsprechend eingerichtet, mit Ostern 1883 finden dieselben auch für die Oster-Untertertia Anwendung, zu Michaelis 1883 für die Michaelis-Untertertia u. s. f. Die in den neuen Lehrplänen verlangte Erhöhung des physikalischen Unterrichtes in Sekunda auf zwei Lehrstunden konnte unter gleichzeitiger Kürzung des lateinischen Unterrichtes um eine Stunde nach dem Eintritt einer neuen Lehrkraft schon zu Michaelis 1882 eintreten.

Die im Einklang mit den neuen Bestimmungen auf Grund der Beschlüsse der pommerschen Direktorenkonferenzen von 1879 und 1882 ausgearbeiteten Pensentabelle, welche mit Ostern 1883 in Kraft tritt, wird im nächsten Programm zur Veröffentlichung gelangen. Von der Mitteilung des im vergangenen Jahre gültigen Planes konnte, da derselbe ausser den oben angedeuteten Änderungen im wesentlichen mit dem früheren übereinstimmt, Abstand genommen werden. Wie der Unterricht in den beiden Semestern unter die Lehrer verteilt gewesen ist, ergeben die am Schluss angefügten Tabellen.

In den Lehrbüchern musste zum Teil im Anschluss an die neuen Lehrpläne eine Veränderung eintreten. Mit dem kommenden Schuljahr werden die griechische Grammatik von Buttmann und die französischen Lehrbücher von Schmitz, von IIIb O und IIb O, bezw. V O anfangend, allmählig in Wegfall kommen und statt derselben eingeführt für den griechischen Unterricht in den beiden Tertien die Formenlehre von Franke, herausgegeben von A. Bamberg, in Sekunda und Prima die Schulgrammatik von Curtius, über die Einführung der an Stelle der Bücher von Schmitz beantragten Hülfsmittel für den französischen Unterricht steht die Entscheidung zur Zeit noch aus. Ausserdem wird in VI für den bisher gebrauchten Leitfaden von Grassmann und Gribel der Leitfaden von Daniel eingeführt, ebendaselbst und in V die Rechenhefte von Böhme statt der Rechenhefte von Wulkow, in der Vorschule der Kinderschatz von Schulze und Steinmann statt der Fibel von Otto Schulz. Neu eingeführt sollen werden in allen betr. Klassen für den physikalischen Unterricht Koppe Anfangsgründe der Physik und die Leitfäden für Zoologie und Botanik von Baenitz und das Tirocinium poeticum von Sibelis in IV.

Gelesen wurde in Ia. Lateinisch im Sommer: Tacitus Annal. III und IV mit Auswahl; Horatius Carm. IV. Epod. Epist. I mit Auswahl; privatim Cicero Tuscul. disp. I. Im Winter: Cicero Orator.; Horatius Carm. I. Epist. II; Cicero in Verr. IV (cursorisch), privatim Livius IX und X. — Griechisch im Sommer: Sophokl. Oedip. rex. Ilias XI—XIII. Im Winter: Plato Protag. Ilias XIV—XVI. — Französisch im Sommer: Molière L'Avare. Im Winter: Voltaire Siècle de Louis XIV.

Ib. Lateinisch im Sommer: Cicero Laelius und pro Sestio, Horatius Carm. IV. Im Winter: Cicero Brutus und pro Milone; Horatius Carm. I. — Griechisch im Sommer: Sophokles Elektra. Ilias XI—XIII. Im Winter: Demosthenes Philipp.; Plato Kriton; Ilias XIV—XVI. Privatlektüre aus Ilias und Herodot. — Französisch im Sommer: Racine Iphigénie. Im Winter: Villemain Histoire de Cromwell.

IIa. Lateinisch im Sommer: Cicero de imperio Cn. Pompeii und in Verr. IV.; Livius XXII; Vergil Aen. X. XI. Im Winter: Cicero pro Archia und de senectute; Livius XXII zu Ende; XXIII, Vergil Aen. III. — Griechisch im Sommer: Herodot I mit Auswahl; Odyss. XIX—XXI. Im Winter: Lysias XIII; Herodot II mit Auswahl; Odyss. XXII—XXIV. — Französisch im Sommer: Montesquieu Considérations. Im Winter: Ségur histoire de la grande armée en 1812.

IIb. Lateinisch im Sommer: Sallust Jugurtha; Cicero pro Ligario, Livius XXI, Vergil Aen. II und III. Im Winter: Cicero in Catilinam; Vergil Aen. IV. — Griechisch im Sommer: Xenophon Memorab. mit Auswahl; Odyss. VII und VIII. Im Winter: Lysias kleine Reden; Odyss. I und II. — Französisch im Sommer: Erckmann-Chatrian histoire d'un conscrit de 1813. Im Winter: Voltaire Charles douze.

Von den Abiturienten wurden folgende Aufgaben bearbeitet: Zu Michaelis 1882. Deutscher Aufsatz: Erklärung und Beurteilung des Wortes des Simonides „Die Malerei ist stumme Poesie und die Poesie ist redende Malerei." — Lateinischer Aufsatz: Quo iure Tacitus Tiberium dicentem faciat saepe populum Romanum clades exercituum, interitum ducum, funditus amissas nobiles familias patienter tulisse (Annal. III. 6). — Mathematische Aufgaben: 1. In ein gegebenes Dreieck ein Rechteck, in welchem die Grundseite doppelt so gross ist als die Höhe, so zu zeichnen, dass die Grundseite des Rechtecks in die des Dreiecks fällt und die beiden andern Ecken desselben auf den Schenkelseiten des Dreiecks liegen. — 2. Welche Winkel unter 180^0 genügen der Gleichung $\frac{13}{3} \sin 2\varphi = {}^2\varphi + 3$? — 3. Wie verhält sich der Rauminhalt eines quadratischen Cylinders zu dem eines gleichseitigen Kegels, wenn beide Körper gleiche Oberflächen haben? — 4. Folgende Gleichung aufzulösen $20\sqrt{(8^x)^{x^2} + 9^x + 36} = \frac{1}{81}$.

Zu Ostern 1882. Deutscher Aufsatz: Die Krankheit des Tasso und ihre Heilung. — Lateinischer Aufsatz: Graeci et Romani quibus potissimum artibus inter se differant. — Mathematische Aufgaben: 1. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn die Halbierungstransversale der Grundseite, der Winkel in der Spitze und ein Quadrat gegeben sind, welchem das Dreieck gleichflächig sein soll. — 2. Wie gross ist die Kraft P, welche einen 1000 Gramm schweren Körper auf einer schiefen Ebene, deren Steigerung $16^0 30^1$ ist, am Hinabgleiten hindert, wenn die Richtung der Kraft einen Winkel von $5^0 15^1$ mit der schiefen Ebene bildet, und wie gross ist in diesem Falle der Normaldruck auf die schiefe Ebene? — 3. Wie verhält sich der Rauminhalt eines quadratischen Cylinders zu dem eines gleichseitigen Kegels, wenn beide Körper gleiche Oberflächen haben? — 4. In wie viel Jahren sind

von einem auf Zinseszins zu 3% ausstehenden Kapital von 2500 Mark noch 733 Mark übrig, wenn das Kapital am Ende jedes Jahres um 170 Mark vermindert wird? (Nebst Formelentwickelung.) — Übersetzung aus dem Griechischen: Plato de republ. I. 9 und 10 bis διεπτοήθημεν.

B. Chronik.

Einen schweren Verlust hat das Gymnasium durch den Tod eines seiner Lehrer erlitten. Am 4. April v. J. starb in seiner Heimat Wiesbaden der ordentliche Lehrer Dr. Leopold Brunn. Geboren am 3. Januar 1847 studierte Brunn in Bonn, Leipzig und München Philologie und Archäologie, wurde 1871 in Leipzig promoviert und in demselben Jahr in Bonn pro facultate docendi geprüft, trat ins Schulamt als Hülfslehrer in Landsberg a./W. Michaelis 1872, wurde Michaelis 1873 als Hülfslehrer an das Stadtgymnasium berufen und nach Jahresfrist als ordentlicher Lehrer angestellt; bei seinem Tode bekleidete er die Stelle des zweiten ordentlichen Lehrers. Ausser der Inauguraldissertation de Gaio Licinio Muciano hat er in der Festschrift, welche das Stadtgymnasium zur Begrüssung der 35. Philologen-Versammlung herausgab, eine eingehende archäologische Untersuchung veröffentlicht unter dem Titel Ἄκατος. Seine Studien bewegten sich zumeist auf dem Gebiete der alten Kunst und ihrer Denkmäler. Er betrachtete es als eine Lebensaufgabe, die von einem früh verstorbenen Freunde, dem Dr. Zoeller begonnenen Untersuchungen über den Schiffsbau und die Schiffskonstruktionen der Alten weiterzuführen und abzuschliessen. In diese Aufgabe versenkte er sich vollständig; mit der grössten Sorgfalt und Gewissenhaftigkeit ging er jeder Spur und Andeutung nach, welche aus den Schriften der Griechen und Römer zur Aufklärung dieses dunklen Kapitels herangezogen werden konnte. In dem Eifer der Arbeit beachtete er es nicht, dass sein Körper den Anforderungen, die er an ihn stellte, nicht mehr gewachsen war, bis ein schweres Nervenleiden seine Arbeitskraft schon seit längerer Zeit so sehr beeinträchtigte, dass er, wie im vorigen Programm mitgeteilt wurde, in der Mitte des Januar v. J. einen längeren Urlaub zur Herstellung seiner Gesundheit nachsuchen musste. Durch eine längere Kur in dem Krankenhause Bethanien anscheinend neugekräftigt, verbrachte er die letzten Wochen seines Urlaubes zur weiteren Erholung im väterlichen Hause zu Wiesbaden und er hatte für das Sommersemester seinen Wiedereintritt in das Amt schon angezeigt, als noch während der Ferien die Trauerbotschaft von seinem frühzeitigen Tode uns alle auf das tiefste erregte. Brunn war ein Mann, der durch seine Pflichttreue, sein aufrichtiges und gerades Wesen, seine Milde in der Beurteilung anderer, sein freundliches Entgegenkommen allen seinen Kollegen lieb und wert geworden war und sich bei seinen Schülern, die er mit Freundlichkeit und Milde zu leiten wusste, der grössten Liebe und Anhänglichkeit erfreute. Der Ernst und die Aufopferung, mit welchen er seine wissenschaftlichen Arbeiten auch in der Zeit seiner Erkrankung noch fortsetzte, hatte etwas ungemein rührendes. Er ist der zweite Lehrer, den unsre Schule in der kurzen Zeit ihres Bestehens verloren hat, und in treuem Angedenken rufen wir ihm ein have pia anima nach.

Die erledigte Stelle wurde zunächst nicht wieder besetzt; die Lehrstunden des Verstorbenen wurden während des Sommerhalbjahres von seinen Kollegen übernommen, erst zu Michaelis 1882 erfolgte die Besetzung der Stelle durch eine Ascension sämtlicher ordentlicher Lehrer, die jünger im Dienstalter waren als der Verstorbene, und durch die Berufung des Dr. Krause in die letzte ordentliche Lehrstelle.

(August Richard Krause, geboren 1856 in Ratzdorf in der Provinz Brandenburg, besuchte das Gymnasium zu Görlitz, studierte in Jena, Leipzig, Berlin und Strassburg Mathematik und Naturwissenschaften, wurde 1878 in Strassburg zum Dr. phil. promoviert und bestand das examen pro facultate docendi 1879 in Breslau. Sein Probejahr legte er ab Ostern 1881—82 an dem Gymnasium zu Hirschberg, wo er zugleich die Stelle eines Hülfslehrers bekleidete und in dieser Stellung bis zur Berufung in sein jetziges Amt verblieb.)

Zur gleichen Zeit verliess unsere Anstalt der Hülfslehrer Dr. Tank in Folge seiner Berufung als ordentlicher Lehrer an das Gymnasium Bugenhagianum zu Treptow a. R. Das Stadtgymnasium, dem er während einer Zeit von drei Jahren angehört hat, ist ihm für die treue und gewissenhafte Führung seines Amtes und den in der Leitung seiner Schüler bewiesenen Eifer zu dauerndem Dank verpflichtet. In seine Stelle trat der Dr. Klinghardt, der uns leider nach halbjähriger erfolgreicher Amtsthätigkeit schon wieder verlassen wird, um eine Stelle als ordentlicher Lehrer an dem Gymnasium zu Altenburg zu übernehmen.

(Gotthelf Adolf Julius Klinghardt, geboren 1854 zu Halbau in Schlesien, besuchte das Gymnasium zu Sorau N.-L., studierte in Leipzig und Halle Philologie, wurde in Halle 1879 zum Dr. phil. promoviert und

bestand daselbst das examen pro facultate docendi 1880. Das Probejahr legte er ab an der Latina zu Halle Ostern 1880—81 und war dann in Italien als Hauslehrer thätig bis zum Eintritt in sein hiesiges Amt.)

Der Kandidat Berlin ging Michaelis 1882 nach vollendetem Probejahr als Hülfslehrer an das Kgl. Gymnasium zu Cöslin; dem Kandidaten Dr. Bornemann, der als Probekandidat zugleich eine Hülfslehrerstelle provisorisch versehen, wurde dieselbe zu demselben Termin nach Vollendung des Probejahres definitiv übertragen.

(Albert August Friedrich Bornemann, geboren 1856 zu Wollin i. P., besuchte das Stadtgymnasium zu Stettin, studierte in Leipzig und Greifswald, bestand auf der letzteren Universität 1881 das examen pro facultate docendi und wurde ebendaselbst 1882 zum Dr. phil. promoviert. Sein Probejahr hat er an dem Stadtgymnasium von Michaelis 1881—82 abgelegt.)

Zur Ableistung des Probejahres traten an dem Gymnasium ein zu Ostern 1882 der Kandidat Büchel, zu Michaelis der Kandidat Dr. Hoefer; der erstere wird nach Schluss des Schuljahres als Hülfslehrer an das Gymnasium zu Demmin übergehen, der zweite wurde nach einer Thätigkeit von wenigen Wochen uns wieder entzogen und der hiesigen Friedrich-Wilhelm-Schule zur Vertretung für den zum Landtag abgeordneten Oberlehrer Schmidt überwiesen.

Nachdem sich die in dem Programm im Jahre 1881 ausgesprochene Erwartung, dass sich die Teilung der zweiten Vorschulklasse wieder rückgängig werde machen lassen, nicht erfüllt hatte, vielmehr zu Michaelis 1882 auch die Teilung der ersten Vorschulklasse nötig geworden war, wurde der bisher nur provisorisch an der Vorschule beschäftigte Lehrer Struck definitiv als Vorschullehrer angestellt und ausserdem der Mittelschullehrer Jaskowski als solcher berufen.

(Adolf Jaskowski, geboren 1849 zu Mirchau in Westpreussen besuchte das Seminar zu Berent und bestand 1881 zu Königsberg in Preussen die Mittelschullehrerprüfung für Latein und Französisch. Nachdem er in verschiedenen Stellungen in den Provinzen Posen und Westpreussen und in den Rheinlanden, zuletzt zu Schöneck in Westpreussen thätig gewesen, wurde er Michaelis 1882 in sein jetziges Amt berufen.)

Die Entlassungsprüfungen wurden am 7. September 1882 und am 2. März 1883 unter dem Vorsitz des Geh. Regierungsrats Dr. Wehrmann abgehalten, als Patronats-Kommissarius fungierte der Stadtschulrat Dr. Krosta. In der ersten Prüfung wurden 6 Examinanden, unter diesen Richard Hirsch (II) und Paul Meister ohne mündliche Prüfung, für reif erklärt, im zweiten Termine bestanden 15 Abiturienten, darunter 6 ohne mündliche Prüfung, nämlich Gerhard Wex, Reinhold Agahd, Willy Löwinsohn, Ludwig Friedeberg, Adolf Niemann und Albert Zobel.

Zum Besten der Witwen- und Waisenkasse der Lehrer unserer Anstalt hielten in diesem Winter Vorlesungen: Herr Schridde, ord. Lehrer an der städtischen höheren Töchterschule und Lehrer des Englischen am Stadtgymnasium: „Über die Tannhäusersage," Herr Oberlehrer Dr. Herbst: „Über Ciceros politische Haltung", Herr Oberlehrer Dr. Jonas: „Der Prophet Jeremias in seiner welthistorischen Bedeutung," Herr Oberlehrer Dr. Rühl: „Über Ferdinand Freiligrath", Herr Oberlehrer Dr. Haag: „Realistische Momente in Schillers Wesen", der Unterzeichnete: „Über die Küche und die Getränke des deutschen Mittelalters".

Der Rechnungsabschluss der Witwen- und Waisenkasse gab für das Jahr 1882 einen Zugang von 1033,15 Mark, so dass sich das Vermögen, welches im Vorjahre 7595,53 Mark betrug, auf 8628,68 Mark gehoben hat. Da die erst 1876 gegründete Kasse jetzt leider schon zwei Witwen mit der statutenmässigen Unterstützung zu versehen hat, so ist diese hauptsächlich dem Ertrag der Vorlesungen zu dankende Vermehrung ihrer Bestände um so erfreulicher.

Aus Veranlassung der oben erwähnten Einführung neuer Lehrbücher haben viele Verleger dem Unterzeichneten Freiexemplare überwiesen zur Begründung einer bibliotheca pauperum, für welche diese Exemplare einen willkommenen Stamm bilden. Ihnen und allen denen, welche sich sonst durch Schenkungen für diese Bibliothek interessiert haben, sei auch an dieser Stelle der gebührende Dank dafür gesagt.

Bei der Sedanfeier hielt die Festrede Herr Gymnasiallehrer Steffenhagen, bei der Feier des Geburtstages Sr. Majestät des Kaisers Herr Gymnasiallehrer Priebe.

Bei der Entlassung der Abiturienten zu Michaelis v. J. sprachen Richard Hirsch deutsch über das Thema: Prometheus in antiker und moderner Poesie, und Paul Meister lateinisch über das Wort des Horatius: fortuna saevo laeta negotio. Zum Ostertermine d. J. sprachen Reinhold Agahd deutsch: Über das Erhabene in der Laokoongruppe und in der Niobidengruppe und Gerhard Wex lateinisch: de utilitate literarum.

Die Scharlachepidemie dieses Winters hat auch bei uns nicht nur eine grosse Anzahl von Schülern durch längere Krankheit dem Unterricht entzogen, sondern leider auch vier in frühem Tode hinweggerafft. Im Monat Januar starben kurz nach einander die Sextaner Vausch, Haber und Seefeldt, im Februar der Sextaner Scheibel. Fast gleichzeitig mit ihm starb auch der Oberprimaner Viebke, der schon längere Zeit an der Schwindsucht gelitten hatte und an demselben Tage zur ewigen Ruhe bestattet wurde, an welchem er mit seinen Mitschülern das Reifezeugnis zu erwerben gehofft hatte. Die Schule nahm um so herzlicheren Anteil an dem Verlust der Eltern, als diese Schüler zu den besten ihrer Klasse gehörten und dereinst etwas recht tüchtiges zu leisten versprachen. Auch jetzt ist die Zahl der durch Krankheit vom Schulbesuch zurückgehaltenen Kinder immer noch eine verhältnismässig grosse.

C. Aus den Verfügungen der Behörden.

Ferien für das Jahr 1883.

1. Osterferien
   Schulschluss: Mittwoch den 21. März Mittag. Schulanfang: Donnerstag den 5. April früh.
2. Pfingstferien
   Schulschluss: Sonnabend den 12. Mai Mittag. Schulanfang: Donnerstag den 17. Mai früh.
3. Sommerferien
   Schulschluss: Mittwoch den 4. Juli Mittag. Schulanfang: Donnerstag den 2. August früh
4. Michaelisferien
   Schulschluss: Mittwoch den 26. September Mittag. Schulanfang: Donnerstag den 11. Oktober früh.
5. Weihnachtsferien
   Schulschluss: Donnerstag den 20. Dezember Abend. Schulanfang: Freitag den 4. Januar früh.

2. Aus dem Ministerialerlass vom 27. Oktober 1882 betr. die Jugendspiele.

Nachdem das Turnen als ein integrierender Teil dem Unterrichte der Jugend in den höheren und niederen Schulen eingefugt worden ist und an die Stelle der Freiwilligkeit der Teilnahme an diesen Übungen für die turnfähigen Schüler die Verpflichtung getreten ist, hat sich die staatliche und kommunale Fürsorge auf die Beschaffung und Herstellung von geschlossenen Turnraumen erstreckt, in welchen unabhängig von der Jahreszeit und unbehindert von den Unbilden der Witterung das Schulturnen eine ununterbrochene und geordnete Pflege gefunden hat.

Es ist dies für den Jugendunterricht ein überaus wertvoller Erwerb. Erst die Fortführung der turnerischen Übungen durch das ganze Jahr sichert eine tüchtige korperliche Ausbildung.

Nicht minder wertvoll aber ist der Turnplatz. Gewisse Übungen, wie das Stabspringen, der Gerwurf, mancherlei Wettkämpfe u. a. lassen sich in der Halle gar nicht oder nicht ohne Beschrankung und ohne Gefahr vornehmen. Ein grosseres Gewicht muss aber noch darauf gelegt werden, dass das Turnen im Freien den günstigen gesundheitlichen Einfluss der Übungen wesentlich erhoht, und dass mit dem Turnplatz eine Stätte gewonnen wird, wo sich die Jugend im Spiel ihrer Freiheit freuen kann, und wo sie dieselbe, nur gehalten durch Gesetz und Regel des Spiels, auch gebrauchen lernt. Es ist von hoher erziehlicher Bedeutung, dass dieses Stück jugendlichen Lebens, die Freude fruherer Geschlechter, in der Gegenwart wieder aufbluhe und der Zukunft erhalten bleibe. Öfter und in freierer Weise, als es beim Schulturnen in geschlossenen Räumen möglich ist, muss der Jugend Gelegenheit gegeben werden, Kraft und Geschicklichkeit zu bethätigen und sich des Kampfes zu erfreuen, der mit jedem rechten Spiel verbunden ist. Es giebt schwerlich ein Mittel, welches wie dieses so sehr im Stande ist, die geistige Erhebung zu beleben, Leib und Seele zu erfrischen und zu neuer Arbeit fähig und freudig zu machen. Es bewahrt vor unnatürlicher Frühreife und blasiertem Wesen und wo diese beklagenswerte Erscheinungen bereits Platz gegriffen, arbeitet es mit Erfolg an der Besserung eines ungesund gewordenen Jugendlebens. Das Spiel wahrt der Jugend über das Kindesalter hinaus Unbefangenheit und Frohsinn, die ihr so wohl anstehen, lehrt und übt Gemeinsinn, weckt und stärkt die Freude am thatkräftigen Leben und die volle Hingabe an gemeinsam gestellte Aufgaben und Ziele. Treffend sagt Jahn im zweiten Abschnitt seiner Deutschen Turnkunst von den Turnspielen: „In ihnen lebt ein geselliger freudiger lebensfrischer Wettkampf. Hier paart sich Arbeit mit Lust, und Ernst mit Jubel. Da lernt die Jugend von klein auf, gleiches Recht und Gesetz mit andern halten. Da hat sie Brauch, Sitte, Ziem und Geschick im lebendigen Anschaun vor Augen. Frühe mit seines Gleichen und unter seines

Gleichen leben, ist die Wiege der Grösse für den Mann. Jeder Einling verirrt sich so leicht zur Selbstsucht, wozu den Gespielen die Gesellschaft nicht kommen lässt. Auch hat der Einling keinen Spiegel, sich in wahrer Gestalt zu erblicken, kein lebendiges Mass, seine Kraftmehrung zu messen, keine Richterwage für seinen Eigenwert, keine Schule für den Willen und keine Gelegenheit zu schnellem Entschluss und Thatkraft."

Die Ansprüche an die Erwerbung von Kenntnissen und Fertigkeiten sind fast für alle Berufsarten gewachsen, und je beschränkter damit die Zeit, welche sonst für die Erholung verfügbar war, geworden ist, und je mehr im Hause Sinn und Sitte und leider oft auch die Möglichkeit schwindet, mit der Jugend zu leben und ihr Zeit und Raum zum Spielen zu geben, um so mehr ist Antrieb und Pflicht vorhanden, dass die Schule thue, was sonst erziehlich nicht gethan wird und oft auch nicht gethan werden kann. Die Schule muss das Spiel als eine für Körper und Geist, für Herz und Gemüth gleich heilsame Lebensäusserung der Jugend mit dem Zuwachs an leiblicher Kraft und Gewandtheit und mit den ethischen Wirkungen, die es in seinem Gefolge hat, in ihre Pflege nehmen und zwar nicht blos gelegentlich, sondern grundsätzlich und in geordneter Weise.

Von dieser Nothwendigkeit ist die Unterrichtsverwaltung schon von lange her überzeugt gewesen, und hat auch dementsprechende Verordnungen ergehen lassen. —

Leider aber haben diese Anordnungen nach den Wahrnehmungen, welche im allgemeinen und insbesondere bei den Revisionen des Turnwesens in den einzelnen Schulanstalten gemacht worden sind, nicht überall die dem Wert und Nutzen der Sache entsprechende Beachtung gefunden. In einer Anzahl älterer Unterrichts- und Erziehungsanstalten sind die Jugendspiele traditionell in Übung geblieben, und in einigen Bezirken hat Herkommen und Sitte an ihnen festgehalten, in andern aber fehlt es an jeder Überlieferung und nur selten sind Anfänge zu neuer Belebung vorhanden. Jedenfalls hat eine allgemeine Einführung und Durchführung nicht stattgefunden. Es bedarf daher einer erneuten Anregung und einer dauernden Bemühung Aller, welche mit der Erziehung der Jugend befasst sind, damit, was da ist, erhalten, was verlernt ist, wieder gelernt werde, und, was als heilsam erkannt ist, in Übung komme.

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass es sich hier lediglich um Bewegungsspiele handelt, und dass alles ausgeschlossen ist, was dahin nicht gehört. An Hülfsmitteln, sich auf diesem Gebiete zu orientieren, fehlt es nicht.

Bei der grossen Mannigfaltigkeit des Dargebotenen wird es allerdings einer Auswahl bedürfen, und es wird hierbei wesentlich auf dasjenige Rücksicht zu nehmen sein, was herkömmlich und volkstümlich ist. Obenan sind die verschiedenen Ballspiele zu stellen (Treibball, Fussball, Schlagball, Kreisball, Stehball, Thorball), dann die Laufspiele, und hier besonders der Barlauf, die Wettkämpfe (Hinkkampf, Tauziehen, Kettenreissen etc.), die Schleuderspiele mit Bällen, Kugeln, Steinen und Stäben, und die Jagd- und Kriegsspiele.

Wenn ich hiernach die Unterrichtsbehörden anweise, für die Einführung und Belebung der Jugendspiele in die ihrer Aufsicht unterstellten Schulanstalten Sorge zu tragen und es sich angelegen sein zu lassen, bei Revisionen derselben, wie auf das Turnen überhaupt, so auch auf die Turnspiele insonderheit ihre Aufmerksamkeit zu richten und sie einer eingehenden Beachtung zu würdigen, so verkenne ich die Schwierigkeiten nicht, welche sich der allgemeinen Durchführung entgegenstellen. Am leichtesten wird es sich bei den Königlichen Schullehrer-Seminaren machen, weil sie in den meisten Fällen bereits im Besitze von Turn- und Spielplätzen sind und es hier nur eben darauf ankommt, die gegebene Gelegenheit gehörig auszunutzen. Das Gleiche wird bei den höheren Lehranstalten der Fall sein, wenn, was allerdings günstig und erwünscht ist, der Turnplatz möglichst in der Nähe der Turnhalle liegen soll. Diese Lage gestattet, die eigentlichen Turnübungen mit den Turnspielen in Verbindung zu setzen, und eine angemessene Abwechselung zwischen Arbeit und Erholung herbeizuführen. Wo daher dieser räumliche Zusammenhang zwischen Turnhalle und Turnplatz vorhanden ist, wird er zu bewahren sein, und wo Neuanlagen von Turnhallen stattfinden, wird auch auf die Gewinnung eines Turnplatzes Bedacht zu nehmen sein.

In der Cirkular-Verfügung vom 4. Juni 1862 (Centralblatt 1862 S. 368) wird unter allen Umständen die Beschaffung und Einrichtung eines geeigneten Turnplatzes von den für Unterhaltung der Volksschule Verpflichteten gefordert. Diese Forderung erscheint bei den höheren Lehranstalten, wenn ihnen auch eine Turnhalle zur Verfügung steht, mit Rücksicht auf die erhöhten geistigen Anforderungen und Anstrengungen nicht minder, ja vielmehr noch in höherem Masse berechtigt. Es wird daher die Sache der Schulaufsichtsbehörden sein, dafür zu sorgen, dass diesem Bedürfnis möglichst bald Genüge geschehe. Und wenn sich der Turnplatz nicht im Zusammenhange mit der Turnhalle beschaffen lässt, wird auf die Anlegung desselben ausserhalb des Orts zu dringen sein. Erhebliche Kosten wird diese Einrichtung nicht verursachen, da die Anlage in diesem Falle nur den Turnspielen dienen soll. Ich vertraue, dass es den Bemühungen der Behörden, dem that-

kräftigen Interesse der Direktoren, der Opferwilligkeit der Gemeinden, der Teilnahme von Vereinen für die Förderung des leiblichen Wohles der lernenden Jugend und dem opferwilligen Wohlwollen von Jugendfreunden gelingen wird, entgegenstehende Anstände zu beseitigen und die für die leibliche und geistige Entwickelung der Jugend in hohem Masse erspriessliche Einrichtung ins Leben zu rufen.

Dabei will ich nicht unterlassen, auf eine weitere Pflege des Spiels in Verbindung mit gemeinschaftlich zu unternehmenden Spaziergängen und Ausflügen in Feld und Wald sowie mit Turnfahrten hinzuweisen.

In der Ministerial-Verfügung vom 10. September 1860 ist ausser den Turnspielen auch auf Schwimmen und Eislauf hingewiesen worden. Indem ich hierauf Bezug nehme, bemerke ich, dass die Königliche Turnlehrer-Bildungsanstalt den Schwimmunterricht schon seit einer Reihe von Jahren in ihren Unterrichtsbetrieb aufgenommen hat und jährlich eine Anzahl Eleven entlässt, welche auch für die Erteilung dieses Unterrichts befähigt sind. Wo es sich hat ermöglichen lassen, sind bei den Schullehrer-Seminaren Schwimmanstalten eingerichtet worden, zunächst im gesundheitlichen Interesse der Zöglinge, dann aber auch mit der Absicht, diesen für Gesundheit und Leben besonders wertvollen Übungen und Fertigkeiten in immer weiteren Kreisen Eingang zu verschaffen.

In geschlossenen Erziehungsanstalten haben auch diese Uebungen, zum Teil von Alters her, eine Stätte gefunden. Bei den offenen Schulanstalten lässt sich deren Einführung allerdings nicht allgemein und ohne Weiteres anordnen, aber ich gebe mich der Hoffnung hin, dass ihre Leiter und Lehrer dazu Anregung geben und Vorurteilen gegen diese wie gegen andere körperliche Uebungen, wie sie sich immer noch hin und wieder finden, begegnen werden.

Leider ist die Einsicht noch nicht allgemein geworden, dass mit der leiblichen Ertüchtigung und Erfrischung auch die Kraft und Freudigkeit zu geistiger Arbeit wächst. Manche Klage wegen Überbürdung und Überanstrengung der Jugend würde nicht laut werden, wenn diese Wahrheit mehr erlebt und erfahren würde. Darum müssen Schule und Haus und wer immer an der Jugendbildung mitzuarbeiten Beruf und Pflicht hat, Raum schaffen und Raum lassen für jene Uebungen, in welchen Körper und Geist Kräftigung und Erholung finden. Der Gewinn davon kommt nicht der Jugend allein zu Gute, sondern auch unserm ganzen Volk und Vaterland.

gez. von Gossler.

D. Verzeichnis der Schüler des Stadtgymnasiums nach der Rangordnung der Weihnachtscensur.

Ober-Prima.

Erste Ordnung.

1. Gerhard Wex
2. Paul Viebke
3. Max Wetzel
4. Reinhold Agahd
5. Willy Loewinsohn
6. Otto Jaenisch
7. Ludwig Friedeberg
8. Adolf Niemann
9. Ernst von der Nahmer
10. Wilhelm Rose
11. Albert Zobel
12. Paul Aren
13. Hans Hofrichter
14. Karl Frank
15. Siegmund Marcuse
16. Hermann Siegmeyer

Zweite Ordnung.

17. Heinrich Meylahn
18. Alexander Giesen
19. Friedrich Karl Witte
20. Fritz von Muhlenfels
21. Richard Schneider
22. Erich Braun
23. Georg Lichtheim
24. Hugo Wolff
25. Fritz Rubinstein
26. Adolf Mecke
27. Franz Mesterknecht
28. Hans Krielke
29. Karl Samuel
30. Paul Fixson
31. Paul Schulz.

Unter-Prima.

Erste Ordnung.

1. Nathan Jacobsohn
2. Karl Fricke
3. Hans Homeyer
4. Karl Knüppel
5. Friedrich Freise
6. Emil Leopold
7. Fritz Junghans
8. Hans Wichards
9. Rudolf Gerlach
10. Clarence Schultz
11. Paul Hasse
12. Fritz Manasse
13. Gerhard Küster
14. Karl Hartmann
15. Edgar Apolant
16. Peter Ivers

Zweite Ordnung.

17. Johannes Fiebelkorn
18. Georg Hansmann
19. Alfred Eckert
20. Richard Tresselt
21. Albert Hildebrandt
22. Karl Borchard
23. Alexander Grotjohann
24. Richard Nicol
25. Karl Kannenberg
26. Albert Göhtz.

Ober-Secunda.

Erste Ordnung.

1. Hermann Schwartz
2. August Bade
3. Gustav Ebner
4. Otto Zitzke
5. Hermann Grünberg
6. Karl Maass I
7. Benno Krosta
8. Karl Flandorffer
9. Martin Lieckfeld
10. Arthur Bransewetter
11. Otto Lüpke
12. Johannes Zaar
13. Otto Reinecke
14. Karl Maass II
15. Martin Bethe
16. Fritz Schiffmann
17. Heinrich Herrmann
18. Fritz Vent
19. Max Dümmel
20. Julius Dreger

Zweite Ordnung.

21. Paul Rabbow
22. Paul Hartmann
23. Walther Stephan

24. Wilhelm Lefèvre
25. Karl Bétac
26. Georg Schau
27. Paul Goehtz
28. Friedrich Metzel
29. Martin Loeck
30. Richard Brunnemann
31. Georg Karpe
32. Otto Plantiko
33. Alexander Held
34. Adolf Cohnheim.

Unter-Secunda.

(Ostercoetus.)

1. Karl Heyn
2. Heinrich Sydow
3. Ernst Menzel
4. Ernst Janisch
5. Hans Cuno
6. Christian Herbst
7. Richard Wolff
8. David Sarasohn
9. Ludwig Wehr
10. Walther Kettner
11. Martin Wellmann
12. Georg Samuel
13. Gustav Klitscher
14. Georg Friederici
15. Ernst Keiler
16. Rudolf Krösing
17. Walther Späthen
18. Ernst Lehmann
19. Siegesmund Noack
20. Richard Gollmer
21. Johannes Ehrlich
22. Adolf Cohnheim.
23. Eberhard v. Rosenberg
24. Walther Fraude
25. Waldemar Rosenow
26. Otto Kannengiesser
27. Richard Rosenstein
28. Emil Schröder
29. Otto Gerischer
30. Richard Brausewetter
31. Alfred Apolant

(Michaeliscoetus.)

1. Julius Cohn
2. Otto Ehrlich
3. Herman Ehrke
4. Otto Bleck
5. Gerhard Hartig
6. Georg Kanzow
7. Ernst Wolff
8. Max Brausewetter
9. Franz Dummer
10. Waldemar Pietschmann
11. Julius Rose
12. Otto Schreckhaase
13. Arthur Klettner
14. Paul Zipperling
15. Paul Saunier
16. Hans Schröder
17. Paul Mützell
18. Max Riemschneider.

Ober-Tertia.

(Ostercoetus.)

1. Richard Bötzow
2. Karl Knuth
3. Max Hirsch
4. Karl Schünemann
5. Paul Gesche
6. Hans Schrader
7. Max Kamrath
8. Ernst Wolf
9. Johannes Berger
10. Fritz Kühl
11. Eugen Wolter
12. Otto Harnack
13. Heinrich Pust
14. Emil Mortier
15. Emil Fritz
16. Albert Müller
17. Ernst Ziemke
18. Max Thym
19. Emil Ebert
20. Ferdinand Block
21. Otto Ludewig
22. Gustav Busse
23. Ernst Klettner
24. Rudolf Krahnstöver
25. Ernst Halbrock
26. Ernst Töpfer.

(Michaeliscoetus.)

1. Reinhold Bartelt
2. Ewald Platz
3. Sally Leipziger
4. Egbert Weiss
5. Bernhard Meister
6. Paul Koenig
7. Arnold Rohde
8. Fritz Haker
9. Hans von Fritze
10. Wilhelm Noack
11. Alfred Cottrelly
12. Emil Huth
13. Hans Rabbow
14. Alfred Sydow
15. Ernst Wiemann
16. Fritz Krantz
17. Robert Flandorffer
18. Victor Graewe
19. Franz Ludewig
20. Georg Schroeder
21. Kurt Krasting
22. Ernst Reiche
23. Karl Cunio
24. Wilhelm Milentz.

Unter-Tertia.

(Ostercoetus.)

1. Fritz Meister
2. Hans Walter
3. Hugo Lubitz
4. Hugo Gillischewski
5. Eugen Sprengel
6. Konrad Strömer
7. Benno Naumann
8. Hermann Vogelstein
9. Georg Weise
10. Hermann Hasenknopf
11. Leopold Sarasohn
12. Sigismund Herzog
13. Waldemar Kniep II
14. Georg Wolff
15. Kurt Losch
16. Bruno Joseph
17. Paul Schmidt
18. Johannes Baermann
19. Gustav Schulze
20. Johannes Brüssow
21. Ernst Lenz
22. Walter Stolle
23. Martin Engelke
24. Georg Kniep I
25. Paul Dümmel
26. Karl Bethe
27. Erich Brust
28. JohannesGäcke
29. Willy Bader
30. Georg Cohn
31. Reinhard Kühnemann
32. Richard Krienke
33. Franz Pauli
34. Paul Krüger
35. Bernhard Knitter
36. Paul Bethge
37. Konrad Schröder
38. Julius Benade
39. Paul Schreiber
40. Ernst Fricke.

(Michaeliscoetus.)

1. Albert Burscher
2. Otto Schöneberg
3. Hermann Walter
4. Bernhard Poll
5. Otto Breitsprecher
6. Gerson Bloede
7. Hermann Braun
8. August Knittel
9. Willy Waldow
10. Paul Kamrath
11. Hermann Redmer
12. Georg Schober
13. Gustav Wegner
14. Max v. Treba
15. Erich Lemcke
16. Sigwald Tresselt
17. Walter Meinke
18. Karl Sperling
19. Erich Friedeberg
20. Oskar Romann
21. Walter Kuhn
22. Max Müller
23. Wilhelm Bruger
24. Eugen Töpfer
25. Hans Lange
26. Erich Moritz
27. Karl Cohn
28. Julius Sperling
29. Siegfried Kühnemann.

Quarta.

(Ostercoetus.)

1. Adalbert Lange
2. Max Schroeder
3. Otto Krosta
4. Gustav Weiland
5. Ludwig Vogelstein
6. Hermann Loevy
7. Hermann Jacoby
8. Wilhelm Doering I
9. Friedrich Doering II
10. Hans Witte
11. Paul Schrader
12. Hermann Lesser
13. Karl Sass
14. Ferdinand Fritz
15. Reinhard Wandel
16. Arthur Brandt
17. Georg Gollop
18. Paul Maass
19. Hermann Borck
20. Max Berg I
21. Max Henschel
22. Max Thom
23. Leopold Rosenthal
24. Konrad Hasse
25. Ernst Samuel
26. Ernst Poeppel
27. Wilhelm Boetzow
28. Friedrich Boden
29. Julius Lewin
30. Bruno Doogs
31. Heinrich Retzlaff
32. Albert Wernicke
33. Hans Wellmann
34. Samuel Flatow
35. August Graewe
36. Franz Beeg
37. Willy Ganske
38. Ernst Wilke
39. Otto Knüppel
40. Gustav Schlegel
41. Friedrich Berg II
42. Max Volker
43. August Ahrens
44. Walter Krösing
45. Reinhard Maeder
46. Richard Jacobson
47. Leo Wolff
48. Gotthilf v. Treba
49. Theodor Muller
50. Julius Beutler
51. Otto v. Schaper
52. Erich Hasselbach.

(Michaeliscoetus.)

1. Fritz Flemming
2. Otto von Ziethen
3. Willy v. Weickhmann
4. Emil Wagner
5. Erich Pikardi

6. Franz Brockhusen
7. Hans Mauss
8. Walter Hünefeld
9. Ulrich Triest
10. Max Dittmann
11. Wilhelm Linde
12. Fritz Arnold
13. Ludwig Joseph
14. Kurt Halbrock
15. Julius Huth
16. Edgar Felsch
17. Adolf Maus
18. Karl Fredrich
19. Karl Schroeder
20. Alfred Schmidt
21. Paul Lübcke
22. Willy Gäcke
23. Max Rosenthal
24. Edmund Grunwald
25. Hermann Henschel
26. Rudolph Stimpel.

Quinta.

Ostercoetus.

1. Richard Fretzdorff
2. Wilhelm Grünberg
3. Gustav Müller III
4. Kurt Freise
5. Franz Kuhlo
6. Oscar Rühl
7. Max Rubenstein
8. Walther Münchow
9. Georg Hartig
10. Max Wehr
11. Fritz Keiler
12. Johannes Weiland
13. Ernst Müller II
14. Emil Friedeberg
15. Julius Schacht
16. Alfred Scharlau
17. Hans v. Ziethen
18. Karl Stäker
19. Willy Krantz
20. Johannes Junker
21. Paul Schmah
22. Franz Budde
23. Paul Glöge
24. Walther Abel
25. Paul Sydow
26. Ernst Strömer
27. Walther Dobberwitz
28. Ernst Brust
29. Karl Kumm
30. Paul Gerntholtz
31. Bruno Müller I
32. Johannes Brunkow
33. Otto Jantzen
34. Walther Tresselt
35. Joseph Brunabend
36. Max Schallehn
37. Max Braun I
38. Alfred Hellwig
39. Max Moritz
40. Erhart Kettner
41. Albrecht Bethe
42. Paul Braun II
43. Max Felsch
44. Ulrich Hillebrand
45. Wilhelm v. Borcke
46. Fritz Eckert
47. Walther Bensemann.

(Michaeliscoetus.)

1. Ernst Daenell
2. Fritz Schneider
3. Wilhelm Anderson
4. Gustav Bressem
5. Max Voss
6. Albrecht v. Heyden-Linden
7. Hermann Wegner
8. Kurt Wolff
9. Hermann Kamrath
10. Siegfried Rosenthal
11. Franz Wendt (I)
12. August Linde
13. Karl Höpffner
14. Ernst Wilde
15. Willy Weipert
16. Bruno Klietmann
17. Georg Wendt (II)
18. Ernst Nieke
19. Hermann Herotizky
20. Willy Blankenburg
21. Max Dobberwitz
22. Gustav Stolle
23. Ernst Schuler
24. Heinrich Rohde
15. Max Meyring
26. Albert Jakobson
27. Heinrich Dorguth
28. Georg Pöppel
29. Hans Hoffert.

Sexta.

(Ostercoetus.)

1. Ulrich Hildebrand
2. Otto Knaack
3. Arthur Lewy
4. Hermann Boetzow
5. Georg Rudolph
6. Reinhold Wellmann
7. Friedrich Skalweit
8. Gustav Küchendahl
9. Willy Pietschmann
10. Arnold Boldt
11. Egon Kuhn
12. Heinrich Hönicke
13. Alfred Müller (I)
14. Paul Schinke
15. Heinrich Ludendorf
16. Bruno Waldow
17. Julius Berg
18. Paul Treu
19. Leopold Schmidt
20. Paul Macdonald
21. Walther Brust
22. Paul Boecker
23. Paul Macdonald
24. Fritz Mahling
25. Willy Müller (II)
26. Arthur Leipziger
27. Gustav Goers
28. Ernst Ladewig
29. Leo Hirschberg
30. Franz v. Januszkiewicz
31. Willy Geiseler
32. Paul Paske
33. Fritz Schrader
34. Martin Ahrens
35. Julius Schilling
36. Eberhard Furbach
37. Richard Schroeder
38. Hans Moldenhauer
39. Albert Ploenzke
40. Karl Pilz
41. Ulrich Bahlke
42. Hans Bergmann
43. Gustav Tiede
44. Willy Burow
45. Fritz Jantzen
46. Karl Bürger
47. Karl Kress
48. Hugo Radüchel
49. Emil Dresdner

(Michaeliscoetus.)

1. Felix Hirsch
2. Arthur Herms
3. Robert Zoch
4. Max Friedeberg
5. Kurt Rabbow
6. Paul Haber
7. Max Seefeldt
8. Arthur Lotzin
9. Karl Hüllner
10. Paul Kocheim
11. Hans Vausch
12. Wilhelm Conrad
13. Karl Schirmer
14. Paul Buchholz
15. Ernst Butzke
16. Max Schmiede
17. Hermann Bagemihl
18. Willy Fischer
19. Richard Geiseler
20. Otto Brandenburg
21. Erich Nieke
22. Willy Nagel
23. Walther Beerbaum
24. Ernst Burgheim
25. Hans Scheibel
26. Hans Jäger
27. Gustav Macdonald
28. Max Schrader
29. Hans Wothe.

Erste Vorschulklasse.

Ostercoetus.

1. Karl Stelter
2. Richard Schmah
3. Johannes Meyer
4. Hermann Pfaff
5. Richard Wanker
6. Arthur Strahl
7. Emil Bressem
8. Adolf Hamann
9. Paul Bruger
10. Otto Johannis
11. Hermann Mäder
12. Johannes Schwebke
13. Fritz Wiegels
14. Emil Wendt
15. Paul Lenz
16. Heinrich Lichtheim
17. Léon Saunier
18. Max Eggebrecht
19. Bruno Grünemann
20. Otto Bruger
21. Fritz Kruse
22. Otto Goedeking
23. Fritz Kniebusch
24. Walter Schintke
25. Karl Spaethen
26. Max Hager
27. Hans Weste
28. Hermann Blankenburg
29. Arthur Rogge
30. Julius Apolant
31. Arthur Stamper
32. Willy Tresselt
33. Arthur Winkel
34. Bruno Putsch
35. Hans Doering
36. Eriedrich Geiseler
37. Willy Lewin
38. Richard Nieke
39. Albert Bonge

(Michaeliscoetus.)

1. Ernst Knaack
2. Friedrich König
3. Max Müller
4. Max Cunio
5. Gustav Bornemann
6. Hans Dieckow
7. Walther Schrader
8. Gustav Lässig
9. Adolf Borchard
10. Wilhelm Walter
11. Max Assmann
12. Otto Guttentag
13. William Moderow
14. Hans Gribel
15. Albert Lampe
16. Otto Schacht
17. Günther Friederici
18. Karl Groth
19. Paul Lehmann
20. Willy Arndt
21. Arthur Behling
22. Georg Nathusius
23. Richard Nassius
24. Karl Meier
25. Reinhold Wend
26. Waldemar Jantzen

27. Erich Klietmann
28. Fritz Wagner.

Zweite Vorschulklasse.

(Osterecoetus.)

1. Hans Beggerow
2. Martin Bloch
3. Hans Thym
4. Julius Dresdner
5. Walter Neumann
6. Hans Lenz
7. Alfred Krantz
8. Fritz Rühl
9. Richard Schüler
10. Henri Braconier
11. Otto Kaldrack
12. Alexander Waldow
13. Ernst Kühnke
14. Fritz Kämmerling
15. Karl Elias
16. Felix Wilde
17. Bruno Zeppernick
18. Georg Gribel
19. Franz Fouquet
20. Paul Pilz
21. Paul Maffia
22. Hans Henckel
23. Heinrich Henckel
24. Hans Gatz
25. Fritz Eggebrecht
26. Erich Geue
27. Barnim Schröder
28. Willy Knaack.

(Michaeliscoetus.)

1. Wolfgang Wegener
2. Hans Ruhnke
3. Otto Gaerte
4. Kurt Rudolf
5. Fritz Fromm
6. Karl Krappe
7. Karl Lehmann
8. Richard Clausen
9. Erich Müller
10. Julius Sarasohn
11. Max Lehmann
12. Bruno Köhler
13. Karl Friederici
14. Richard Putsch
15. Hans Brunner
16. Johannes Ringeltaube
17. Max Bindemann
18. Richard Bressem
19. Max Pehlke
20. Fritz Staeker
21. Adolf Roeseler
22. Willy Westphal
23. Georg Plenske
24. Hans Nerchert
25. Oskar Straubel.

Dritte Vorschulklasse.

1. Emil Schirmer
2. Barnim Lemcke
3. Karl Herbst
4. Martin Landes
5. Hans Boeck
6. Bruno Schintke
7. Oskar Lewin
8. Max v. Geldern
9. Alfred Lewin
10. Fritz Poll
11. Ulrich Conrad
12. Karl Teschke
13. Heinrich Pauly
14. Richard Rosenthal
15. Walter de la Barre
16. Alexander Döring
17. Georg Skalweit
18. Walter Pfaff
19. Franz Schröder
20. Hermann v. Borcke
21. Johannes Meyrowitz
22. Karl Braatz.

E. Lehrapparat.

Für die Bibliothek wurden angeschafft: 1. Zeitschrift Hermes für klassische Philologie, Bd. 17. — 2. Zarncke, literarisches Centralblatt, 1882. — 3. Zeitschrift für Gymnasialwesen, 1882. — 4. Neue Jahrbücher für Philologie und Pädagogik, 1882. — 5. Philologus, Bd. 41. — 6. Journal de mathématiques élémentaires, 1882. — 7. Nouvelles annales de mathématiques, 1882. — 8. Centralblatt für das gesamte Unterrichtswesen, 1882. — 9. Kuno Fischer, Lessing als Reformator. — 10. Lindner, formale Logik. — 11. W. v. Humboldt, ästhetische Versuche. — 12. Henk, Kriegführung zur See. — 13. Kühner, ausführliche lateinische Grammatik. — 14. Hillebrand, Geschichte des Julikönigtums, Fortsetzung und Schluss. — 15. Allgemeine deutsche Biographie, die Fortsetzungen. 16. Grimm, deutsches Wörterbuch, die Fortsetzungen. — 17. Koberstein, vermischte Aufsätze. — 18. Elze, William Shakespeare. — 19. Springer, Bilder aus der neuern Kunstgeschichte. — 20. Winkelmann, Geschichte der Kunst des Altertums. — 21. Reinkens, Aristoteles über Kunst. — 22. Duncker, Geschichte des Altertums, Bd. 6 und 7. — 23. Nicolai, Geschichte der gesamten griechischen Literatur. — 24. Schöll, Goethe in den Hauptzügen seiner Wirksamkeit. 25. Buchner, Freiligrath. — 26. Bruhns, Joh. Franz Enke. — 27. Falb, Sterne und Menschen. — 28. Baenitz, naturwissenschaftlicher Unterricht. — 29. Mettenius, Alexander Braun's Leben. — 30. Heller, Geschichte der Physik, Bd. 1. — 31. Goethe, Briefe an Frau von Stein, Bd. 1. — 32. Taine, Entstehung des modernen Frankreichs. — 33. Dühring, Dr. Robert Mayer. — 34. Bock, der Volksschulunterricht. — 35. Bormann, Schulkunde. — 36. Kahle, Grundzüge der evangelischen Volksschulerziehung. — 37. Collier, history of English dramatic Poetry. — 38. Klempt, Algebra. — 39. Baltzer, Elemente der Mathematik. — 40. Bergold, Arithmetik und Algebra. — 41. Handl, Lehrbuch der Physik. — 42. Elektrotechnische Bibliothek, Bd. 1, 2. — 43. Wallentin, Lehrbuch der Arithmetik. — 44. Gretschel und Wunder, Jahrbuch der Erfindungen, 1882.

An Geschenken sind eingegangen:

1. Vom königlichen Provinzial-Schulkollegium hier: Verhandlungen der achten Direktorenkonferenz in Pommern.
2. Von dem Vorsteheramt der Kaufmannschaft hierselbst: Stettins Handel, Industrie und Schifffahrt im Jahre 1881.
3. Von der Gesellschaft für Pommersche Geschichte und Altertumskunde: Baltische Studien, Jahrgang 32.
4. Von dem Herrn Geheimen Kommerzienrat Brumm hier: Fauna und Flora des Golfs von Neapel, die Bde. I—VI und Band VIII.

5. Von dem Herrn Kommerzienrat und Konsul Karow hier: Schmicker, die ungarischen Gymnasien.

6. Von Herrn E. J. Krahnstöver hier: The Illustrated Londons News, vol. 79. 80, 81.

7. Von Herrn Dr. ph. Bornemann hier: Bornemann, die Überlieferung der deutschen Gedichte Flemmings.

8. Von Herrn Dr. ph. R. Sydow hier: Sydow, de recensendis Catulli carminibus.

F. Statistische Uebersicht.

Anfangs-Frequenz im Sommerhalbjahr 1882 im Gymnasium: 495.

Ia.	Ib.	IIa.	IIb. O.	IIb. M.	IIIa. O.	IIIa. M.	IIIb. O.	IIIb. M.	IV. O.	IV. M.	V. O.	V. M.	VI. O.	VI. M.
24	33	32	31	26	27	19	32	32	42	41	30	40	38	48

in der Vorschule: 142.

I.	IIa	IIb.	III.
60	32	25	25

Anfangs-Frequenz im Winterhalbjahr 1882—83 im Gymnasium: 499.

Ia.	Ib.	IIa.	IIb. O.	IIb. M.	IIIa. O.	IIIa. M.	IIIb. O.	IIIb. M.	IV. O.	IV. M.	V. O.	V. M.	VI. O.	VI. M.
31	26	34	36	18	27	24	40	30	52	26	47	29	50	29

in der Vorschule: 142.

I O.	I M.	II O.	II M.	III.
38	28	29	25	22

Zu Michaelis vorigen Jahres wurden folgende Schüler nach bestandener Prüfung mit dem Zeugnis der Reife entlassen:

1) Richard Hirsch aus Stettin, geb. 6. Juli 1865, 9 Jahre auf dem Gymnasium, 2 Jahre in Prima, studiert in Berlin Philologie.

2) Paul Louis Ferdinand Meister aus Stettin, geb. 13. November 1864 in Ragöse bei Eberswalde, $9^1/_2$ Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahre in Prima, ist auf Beförderung in das Heer eingetreten.

3) Ernst Paul Schön aus Stettin, geb. 10. Januar 1864, 10 Jahre auf dem Gymnasium, 2 Jahre in Prima, studiert in Strassburg Medizin.

4) Richard Felix Franz Wolff aus Stettin, geb. 18. Dezember 1863, 10 Jahre auf dem Gymnasium, 2 Jahre in Prima, studiert in Berlin Mathematik und Naturwissenschaften.

5) Max Emil Wolff aus Stettin, geb. 3. Juli 1863 in Sonnenburg, 7 Jahre auf dem Gymnasium (vorher auf dem Fridericianum zu Königsberg i. P.), 2 Jahre in Prima, studiert in Eberswalde Forstwissenschaft.

6) Alfred Hirsch aus Stettin, geb. 17. August 1862, $10^1/_2$ Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahre in Prima, studiert in Berlin die Rechte.

Zu Ostern 1883 desgleichen:

1) Gerhard Hermann Theodor Wex aus Stettin, geb. 30. April 1865 zu Greifenhagen, $6^3/_4$ Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahre in Prima, will in Genf die Rechte studieren.

2) Max Georg Wetzel aus Warschow bei Schlawe, geb. 31. Mai 1862 in Gr. Quäsedow, 3 Jahre auf dem Gymnasium, 3 Jahre in Prima (vorher auf dem Progymnasium zu Schlawe), will in Strassburg Theologie studieren.

3) Reinhold Hermann August Agahd aus Neumark i. P., geb. 15. Juli 1865, 8 Jahre auf dem Gymnasium, 2 Jahre in Prima, will in Strassburg Philologie studieren.

4) Willy Edmund Johannes Löwinsohn aus Stettin, geb. 12. Oktober 1864, 10 Jahre auf dem Gymnasium, 2 Jahre in Prima, will in München Philologie studieren.

5) Otto Karl Bernhard Jänisch aus Krakow bei Penkun, geb. 12. Dezember 1859, $8^1/_2$ Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahre in Prima, will in Berlin Theologie studieren.

6) Ludwig Friedeberg aus Stettin, geb. 29. Oktober 1865, 9 Jahre auf dem Gymnasium, 2 Jahre in Prima, will in Heidelberg die Rechte studieren.

7) Adolf Karl Ehrenfried Emanuel Otto Niemann aus Stettin, geb. 9. Februar 1864 in Kurow bei Stettin, $9^1/_2$ Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahre in Prima, will in Heidelberg Geschichte studieren.

8) Ernst Alexander von der Nahmer aus Stettin, geb. 10. Juli 1862, 11 Jahre auf dem Gymnasium, 2 Jahre in Prima, will in Marburg Geschichte studieren.

9) Friedrich Wilhelm Rose aus Swinemünde, geb. 18. Oktober 1862, $7^1/_2$ Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahre in Prima, will in Halle Philologie studieren.

10) Albert-Karl David Zobel aus Ziegenort, geb. 18. August 1863, 2 Jahre auf dem Gymnasium, 2 Jahre in Prima (vorher auf dem Kgl. Marienstifts-Gymnasium hierselbst), will in Halle Philologie studieren.

11) Paul Aren aus Stettin, geb. 3. Februar 1866, 9 Jahre auf dem Gymnasium, 2 Jahre in Prima, will in Heidelberg Medizin studieren.

12) Hans Hermann Hofrichter aus Stettin, geb. 3. September 1862, $10^1/_2$ Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahre in Prima, will in Heidelberg Chemie studieren.

13) Karl Georg Frank aus Podejuch bei Stettin, geb. 4. Februar 1863, $9^1/_2$ Jahr auf dem Gymnasium, 2 Jahre in Prima, will in Heidelberg Medizin studieren.

14) Siegmund Marcuse aus Greifenhagen, geb. 23. Januar 1862, 10 Jahre auf dem Gymnasium, 2 Jahre in Prima, will in Berlin Medizin studieren.

15) Hermann Johannes Albert Siegmeyer aus Goldbeck bei Marienfliess i. P., geb. 2. Februar 1861 in Falkenberg bei Bernstein, 1 Jahr auf dem Gymnasium, 1 Jahr in Prima (vorher auf dem Kgl. und Gröningschen Gymnasium zu Stargard), will in Berlin Theologie studieren.

Das neue Schuljahr beginnt Donnerstag den 5. April, die Prüfung und Aufnahme neuer Schüler erfolgt am Mittwoch den 4. April vormittags von 9 Uhr ab im Konferenzzimmer des Gymnasiums.

Prof. H. Lemcke,
Direktor des Stadtgymnasiums.

Verteilung der Lektionen unter die Lehrer im Sommerhalbjahr 1882.

		Ordinar. von	Prima a.	Prima b.	Sekunda a.	Sekunda b. O.	Sekunda b. M.	Obertertia O.	Obertertia M.	Untertertia O.	Untertertia M.	Quarta O.	Quarta M.	Quinta O.	Quinta M.	Sexta O.	Sexta M.	Vorschule				Sa.
1	Dir. Prof. Lemcke	I a.	8 Lat. 3Gesch.								1 Lat.											12
2	Prof. Dr. Junghans		4 Math. 2 Phys.	4 Math. 2 Phys.	4 Math. 1 Phys.		1 Phys.															18
3	Oberl. Dr. Jonas		2 Relig. 3 Dtsch.	2 Relig. 3 Dtsch.	2 Relig.				2 Dtsch. 2 Ovid.													20
			4 Hebräisch.																			
4	Oberl. Dr. Herbst	I b.	6Griech.	8 Lat.		6Griech.																20
5	Oberl. Dr. Eckert	II a.		6Griech.	8 Lat.						4 Math.						3 Relig.					21
6	Oberl. Dr. Haag	II b. M.			3 Gesch. 6Griech.		3 Gesch. 8 Lat.															20
7	Oberl. Dr. Blümcke	II b. O.		3 Gesch.		2 Dtsch. 3 Gesch. 8 Lat.					3 Gesch.	4 Gesch u. Geogr.										23
8	Oberl. Dr. Rühl	III a. M.			2 Dtsch. 2 Verg.		6Griech		8 Lat. 3 Gesch.													21 und Turnen
9	Ord. Lehrer Steffenhagen					4 Math. 1 Phys.	4 Math.	4 Math.	4 Math.	4 Math.		2 Natg.										23
10	Ord. Lehrer (vacat)																					
11	Ord. Lehrer Jahr	III b. O.						3 Gesch. 6Griech.		10 Lat.						3 Gesch. u. Geogr.						22
12	Ord. Lehrer Dr. Schweppe	IV. O.	2 Franz.	2 Franz.	(2 Englisch.)	2 Franz.		2 Franz.		2 Franz.		9 Lat. 5 Franz.										24 und 2 Engl.
13	Ord. Lehrer Modritzki	VI. M.			2 Franz.		2 Franz.		2 Franz.		2 Franz.		2 Franz.		4 Franz.		9 Lat.					23
14	Ord. Lehrer Gaebel	IV. M.							6Griech.	2 Dtsch. 3 Gesch.			10 Lat. 3 Gesch.									24
15	Ord. Lehrer Priebe	III b. M.				2 Relig. 2 Verg.		2 Relig. 2 Dtsch.			10 Lat.	2 Relig. 2 Dtsch.		2 Relig.								24
16	Ord. Lehrer Dr. Sydow	V. O.					2 Verg.			6Griech.				9 Lat. 4 Franz. 2Geogr								23
17	Hülfslehrer Dr. Müller	VI. O.									6Griech.		6Griech.			9 Lat. 3 Dtsch.						24
18	Hülfslehrer Dr. Tank	IIIa. O. V. M.						8 Lat.							9 Lat. 2 Dtsch. 2 Relig.	3 Relig.						24
19	Hülfslehrer Dr. Bornemann						2 Relig. 2 Dtsch.		2 Rel.	2 Relig.	2 Relig. 2 Dtsch.		2 Relig. 2 Dtsch.	2 Dtsch. 1 Gesch.			3 Dtsch. 1 Gesch.					23
20	Lehrer Reimer											4 Math.	3 Math.	4 Rechn. 2 Natg.	2 Natg. 3 Gesch. u. Geogr.	2 Natg.	2 Natg. 2 Geogr.					24 und Turnen
21	Cand. Prob. Berlin							2 Ovid. (2 Frnz.)			3 Gesch. u. Geogr.											7
22	Cand. Prob. Büchel									(4 Mth.)		(2 Ntg.)										6
23	Dr. Heidenhain							1 Natg.	1 Natg.	1 Natg.	1 Natg.											4
24	Musikdirektor Dr. Lorenz													2Singen	2Singen							
25	Maler Kugelmann											2 Zchn.	2 Zchn.	2 Zchn.	2 Zchn.	2 Zchn.	2 Zchn.					12
26	Ord. Lehrer Schridde		(2 Englisch.)					(2 Englisch.)										I	IIª	IIᵇ	III	4
27	Vorschull. Brust	1													2 Schrb. 4Rechn.		2 Schrb.	16				24
28	Vorschull. Ganske	2 a												2 Schrb.		2Singen 2 Schrb. 4Rechn.			16			26
29	Vorschull. Treu	2 b															2Singen	5		20		27
30	Vorschull. Struck	3															4 Rechn.	1	4		18	27
			30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	32	32	30	30	22	20	20	18	

Verteilung der Lektionen unter die Lehrer im Wintersemester 1882/83.

	Namen.	Ordinar. von	Prima		Sekunda			Obertertia		Untertertia		Quarta		Quinta		Sexta		Vorschule.					Sa.
			a.	b.	a.	b. O.	b. M.	O.	M.	O.	M.	O.	M.	O.	M.	O.	M.	I. O.	I. M.	II. O.	II. M.	III.	
1	Direktor Prof. Lemcke	I a.	[illegible] Lat. 3 Gesch.								1 Lat.												12
2	Oberl. Prof. Dr. Junghans		4 Math. 2 Phys.	4 Math. 2 Phys.	4 Math. 2 Phys.																		18
3	Oberl. Dr. Jonas		2 Dtsch. 3 Relig.	2 Dtsch. 3 Relig.	2 Relig.	(Dazu 4 Hebräisch in I. und II.)			2 Dtsch.														18
4	Oberl. Dr. Herbst	I b.	6 Griech.	8 Lat.		6 Griech.																	20
5	Oberl. Dr. Eckert	II a.		6 Griech.	9 Lat.							5 Franz.											20
6	Oberl. Dr. Haag	II b. M.			3 Gesch. 6 Griech.		3 Gesch. 7 Lat.																19
7	Oberlehrer Dr. Blümcke	II b. O.		3 Gesch.		2 Dtsch. 3 Gesch. 7 Lat.							4 Gesch. u. Geogr.										19
8	Oberl. Dr. Rühl	III a. M.			2 Dtsch.		6 Griech.		8 Lat. 3 Gesch.														19 und Turnen.
9	Ordentl. Lehrer Steffenhagen					4 Math. 2 Phys.		4 Math. 1 Natg.		4 Math. 1 Natg.					2 Relig. 3 Geogr.								21
10	Ordentl. Lehrer Jahr	III b. O.						3 Gesch. 6 Griech.		10 Lat. 2 Dtsch.													21
11	Ordentl. Lehrer Dr. Schwoppe	IV. O.	2 Franz.	2 Franz.	(2 Englisch.)	2 Franz.		2 Dtsch. 2 Franz.		2 Franz.		9 Lat.											21 und 2 Engl.
12	Ordentl. Lehrer Modritzki	V. M.			2 Franz.		2 Franz.		2 Franz.		2 Franz.				9 Lat. 4 Franz. 2 Dtsch.								23
13	Ordentl. Lehrer Gaebel	III b. M.							6 Griech.	3 Gesch.	10 Lat. 3 Gesch.												22
14	Ordentl. Lehrer Priebe	III a. O.				2 Relig.		2 Relig. 8 Lat.		2 Relig.		2 Relig. 2 Dtsch.		2 Relig. 2 Dtsch.									22
15	Ordentl. Lehrer Dr. Sydow	V. O.					2 Verg.		2 Ovid.	6 Griech.				9 Lat. 4 Franz.									23
16	Ordentl. Lehrer Dr. Krause						4 Math. 2 Phys.		4 Math. 1 Natg.		4 Math. 1 Natg.		4 Math. 2 Natg.										22
17	Hülfslehrer Dr. Müller	VI. O.				2 Verg.					6 Griech.					9 Lat. 3 Dtsch. 3 Relig.							23
18	Hülfslehrer Dr. Bornemann	VI. M.					2 Dtsch. 2 Relig.		2 Relig.		2 Dtsch. 2 Relig.						4 Gesch. 3 Dtsch. 9 Lat.						23
19	Hülfslehrer Dr. Klinghardt	IV. M.						2 Ovid.				4 Gesch. u. Geogr.	2 Relig. 2 Dtsch. 9 Lat. 5 Franz.										23
20	Lehrer Reimer											4 Math. 2 Natg.		3 Geogr. 4 Rechn. 2 Natg.		2 Natg. 3 Geogr.	3 Relig. 2 Geogr.						25 und Turnen.
21	Cand. prob. Büchel							4 Math. 1 Natg.															5
22	Dr. Heidenhain														2 Natg.		2 Natg.						4
23	Musikdirektor Dr. Lorenz													2 Sing.	2 Sing.								4 und Chor.
24	Maler Kugelmann											2 Zchn.	2 Zchn.	2 Zchn.	2 Zchn.	2 Zchn.	2 Zchn.						12 und fak. Z.
25	Ordentl. Lehrer Schridde		(2 Englisch.)					(2 Englisch.)															4
26	Vorschullehrer Brust	1. O.													2 Schrb. 4 Rechn.	2 Schrb.		16					24
27	Vorschullehrer Ganske	1. M.												2 Schrb.		4 Rechn. 2 Sing.			17				25
28	Vorschullehrer Treu	2. O.															2 Schrb. 2 Sing.	5		16			25
29	Vorschullehrer Struck	2. M.															4 Rechn.	1			20		25
30	Vorschullehrer Jaskowski	3.																	5	4		18	27
			30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	32	32	30	30	22	22	20	20	18	

Elementar-Mechanik fester Körper,

für

die Schule bearbeitet.

Programm

der

königl. kathol. Studien-Anstalt bei St. Stephan in Augsburg

zum

Schlusse des Schuljahres 1874/75

von

P. Steph. Stengel,
Professor der Physik am königl. Lyceum.

Augsburg.
Druck von Ph. J. Pfeiffer.
1875.

[illegible]

Einleitung.

§. 1.

Mechanik ist die Lehre vom Gleichgewichte und der Bewegung der Körper.

§. 2.

Ein Körper befindet sich in **Ruhe** oder **Bewegung**, je nachdem er in allen seinen Theilen beständig denselben Raum einnimmt oder nicht. Wenn die einzelnen Theile des Körpers in Bezug auf andere in der Nähe befindlichen Gegenstände ihre Lage beibehalten, so befindet sich der Körper in relativer Ruhe, und es gibt, da alle auf der Erde ruhenden Körper sich mit der Erde bewegen, keinen Körper, welcher in absoluter Ruhe wäre. Jene Bewegung nennt man absolut, welche ein Körper wirklich im Raume hat, während ein Körper sich in relativer Bewegung befindet, wenn er in Bezug auf einen zweiten in Ruhe, in Bezug auf einen dritten in Bewegung ist.

§. 3.

Jeder Körper kann den einmal gewonnenen Zustand der Ruhe oder Bewegung ohne äußere Veranlassung nicht ändern; es ist also eine äußere Ursache nothwendig, vermöge der er von dem einen in den andern Zustand übergeht. Diese äußeren Ursachen nennt man **Kräfte**.

Da man das Wesen der Kräfte selbst nicht kennt, wohl aber ihre Wirkungen wahrnehmen und beobachten kann, so handelt es sich zu-

nächst darum, gewisse Größen aufzufinden, durch welche man in den Stand gesetzt wird, die Kräfte zu messen. Als solche dienen

1) Die Geschwindigkeit, d. i. der Weg, den ein Körper in einer bestimmten Zeiteinheit zurücklegt.

2) Die Masse, d. i. die Summe der materiellen Theilchen oder Punkte des Körpers, welche in Bewegung gesetzt wird.

3) Die Zeit, welche zur Leistung einer bestimmten Arbeit erforderlich ist.

§. 4.

Da man vom Wege, den ein Körper in einer bestimmten Zeiteinheit zurücklegt, auf die Größe der Kraft schließen kann, so sind die Kräfte graphisch darstellbar. Man trägt nemlich vom Angriffspunkte, d. i. von der Stelle eines Körpers aus, in welchem eine Kraft thätig wird, die Länge des Weges, den der Körper in der Zeiteinheit unter der Einwirkung der Kraft zurücklegt, auf der Geraden auf, welche mit der Richtung der Kraft zusammenfällt, und zwar in dem Sinne oder nach der Seite hin, nach welcher sie wirkt, und erhält in der Größe dieser Strecke ein Maß der Kraft. Es ist demnach eine Kraft durch den Angriffspunkt, ihre Größe, Richtung und Sinn der Richtung vollkommen bestimmt.

§. 5.

Wenn zwei oder mehrere Kräfte auf einen Körper wirken, so bleibt derselbe entweder in Ruhe, oder es erfolgt Bewegung. Im ersteren Falle sagt man, der Körper befindet sich im Gleichgewicht, oder die Kräfte halten sich das Gleichgewicht; im letzteren Falle wird der Körper nach irgend einer Richtung in Bewegung gesetzt, so daß die Wirkung dieselbe ist, als würde der Körper nur unter dem Einflusse einer einzigen Kraft stehen. Diese Kraft nennt man die Resultante oder Mittelkraft, die gegebenen Kräfte Componenten oder Seitenkräfte.

§. 6.

Wie jeder anderen mathematischen Wissenschaft, so liegen auch der Mechanik gewisse Axiomata zu Grunde, und sind die wichtigsten:

1. Jeder Körper hat ein Beharrungsvermögen, d. h. in der Natur tritt keine Aenderung ein ohne äußere Ursache.

2. Jede Kraft kommt zu ihrer Geltung, d. h. wenn mehrere Kräfte auf Körper einwirken, so befinden sich dieselben nach einer bestimmten Zeit gerade da, wohin sie gekommen wären, wenn sie die von den einzelnen Kräften bedingten Bewegungen nach und nach ausgeführt hätten. Jede Kraft wirkt also unabhängig von den übrigen.

3. Wirkung und Gegenwirkung sind einander gleich, d. h. dem Druck oder Zug, welchen eine Kraft auf irgend einen Körper ausübt, entspricht ein ebenso großer Gegendruck oder Gegenzug.

Anmerkung. Wenn die Wirkung gleich ist der Gegenwirkung, so ist es nicht so zu verstehen, als ob die eine Kraft durch die andere aufgehoben würde. Hebt Jemand z. B. eine Last auf, so verliert er so viel an Kraft, als zur Ueberwindung des Widerstandes nöthig ist, welchen die Last entgegensetzt, und entsteht Bewegung durch den Ueberschuß an Kraft.

§. 7.

Aus dem Bisherigen ergibt sich die Eintheilung der Mechanik 1) in die Statik, welche die Bedingungen untersucht, unter welchen sich die Kräfte das Gleichgewicht halten, 2) in die Dynamik, oder die Lehre von der Bewegung bei nicht bestehendem Gleichgewichte.

Statik.

Die Lehre vom Gleichgewichte der Kräfte, welche auf einen einzigen vollkommen freien Punkt wirken.

§. 8.

Wirken auf einen materiellen Punkt, welcher vollkommen frei ist, d. h. nach jeder Richtung hin in Bewegung gesetzt werden kann, mehrere Kräfte, so fallen die Richtungen derselben entweder in dieselbe Gerade oder nicht.

§. 9.

Wird ein Punkt O von zwei Kräften P_1 und P_2 von gleicher Größe aber entgegengesetzter Richtung angegriffen (Fig. 1), so ist an sich klar, daß eine Bewegung weder nach der einen noch nach der andern Seite hin stattfinden kann. Dieses ist aber auch noch der Fall, wenn eine der beiden Kräfte oder beide Kräfte den Punkt O nicht unmittelbar angreifen, sondern einen andern in der ihrer Richtung entsprechenden Geraden liegenden Punkt zum Angriffspunkt haben, vorausgesetzt, daß der neue Angriffspunkt mit dem alten durch eine feste, starre Gerade verbunden ist.

Steht der Punkt O unter dem Einflusse der Kraft P_1 und fällt seine Richtung mit der starren Geraden OX zusammen, so wird, wenn man in O und B zwei Kräfte P_2 und P_3 von gleicher Größe aber entgegengesetzter Richtung wirken läßt, an dem Bewegungszustand der Geraden OB also auch jedes Punktes derselben nichts geändert, und es läßt sich die Wirkung der drei Kräfte auf die Wirkung der Kraft P_1 zurückführen. Ist nun $P_1 = P_2 = P_3$, so halten sich die Kräfte P_1 und P_2 das Gleichgewicht, und bleibt nur noch die Wirkung der Kraft P_3 übrig. Es ist mithin die Wirkung der Kraft P_1 gleich der Wirkung der Kraft P_3, und kann man den Angriffspunkt in der Richtung der Kraft beliebig verlegen.

§. 10.

Wird ein Punkt von zwei Kräften von entgegengesetzter Richtung und ungleicher Größe angegriffen, so erfolgt, wie sich aus dem Vorhergehenden ergibt, Bewegung im Sinne der größeren Kraft.

§. 11.

Wirken auf einen Punkt beliebig viele Kräfte, und fallen die Richtungen sämmtlicher Kräfte in dieselbe Gerade, so kann man die Kräfte, welche im gleichen Sinne der Richtung wirken, in eine einzige Kraft vereinigen, und ist die Aufgabe auf den vorigen Fall zurückgeführt, in welchem ein Punkt unter dem Einflusse zweier Kräfte steht. Versieht man die Kräfte, welche in dem einen Sinne wirken mit dem Zeichen +, und jene, welche in dem andern Sinne wirken, mit dem Zeichen —, so erhält das gewonnene Resultat folgende Form: „Wirken beliebig viele Kräfte (Kräftesystem), deren Richtungen in dieselbe Gerade fallen, im beliebigen Sinne auf einen materiellen Punkt, so gibt die algebraische Summe derselben durch ihren absoluten Werth die Größe der Resultante, durch das Vorzeichen den Sinn ihrer Richtung.“ Ist die algebraische Summe gleich Null, d. h. gibt es keine Resultante, so halten sich die Kräfte das Gleichgewicht. Hat die Resultante einen von Null verschiedenen Werth, so kann man im Angriffspunkte eine der Resultante gleiche aber entgegengesetzt gerichtete Kraft anbringen, welche der Resultante, also sämmtlichen Kräften das Gleichgewicht hält.

Das Aufsuchen der Resultante steht demnach im innigsten Zusammenhang mit dem Aufsuchen der Bedingungen des Gleichgewichtes.

Halten sich die gegebenen Kräfte das Gleichgewicht, so ist jede derselben gleich und entgegengesetzt der Resultante der übrigen.

Parallelogramm der Kräfte.

§. 12.

Wirken auf einen materiellen Punkt O (Fig. 2) gleichzeitig zwei Kräfte P_1 und P_2, deren Richtungen den Winkel $P_1 P_2$ bilden, und ist OA und OB beziehungsweise die Geschwindigkeit, welche ihm die Kraft P_1 und P_2 ertheilt, so kann die Resultante

weder in die Richtung der Kraft P_1 noch der Kraft P_2 fallen. Wäre nemlich die Kraft P_1 allein vorhanden, so würde der Punkt O in der Zeiteinheit den Weg OA zurücklegen; von dieser Richtung wird er aber durch die Kraft P_2 abgelenkt. Ebenso wird der Punkt O durch die Kraft P_1 von der Richtung OB abgelenkt. Soll deßhalb der Punkt O überhaupt sich bewegen, so muß die Resultante R ihrer Richtung nach zwischen OA und OB hineinfallen. Nun wird nach dem Grundsatze: „Jede Kraft kommt zu ihrer Geltung" der Punkt O unter gleichzeitiger Einwirkung der Kräfte P_1 und P_2 gerade da sich befinden, wohin er gelangen würde, wenn die Kräfte successive wirken, vorausgesetzt, daß die Zeit der Einwirkung, die Größe der Kräfte, sowie ihre Richtung nicht geändert wird. Sieht man daher vorläufig von der Kraft P_2 ganz ab, so kommt in der Zeiteinheit der Punkt O unter dem Einflusse der Kraft P_1 nach A, von A aus wird er unter der Einwirkung von P_2 in der nächsten Zeiteinheit den Punkt C erreichen. Nach C gelangt aber auch der Punkt, wenn man zuerst die Kraft P_2 und dann die Kraft P_1 wirken läßt, und hat die Kraft R, welche den Punkt O in der Zeiteinheit nach C bringt, denselben Einfluß, wie die Kräfte P_1 und P_2 zusammengenommen.

Die Resultante zweier unter einem beliebigen Winkel auf einen Punkt wirkenden Kräfte wird demnach nach Größe, Richtung und Sinn der Richtung dargestellt durch die Diagonale eines Parallelogramms, welches jene Kräfte nach Größe und Richtung zu anliegenden Seiten hat.

§. 13.

Der Lehrsatz von dem Kräfteparallelogramm kann auch analytisch dargestellt werden, d. h. es läßt sich die Resultante auch auf algebraischem Wege finden und vollkommen nach Größe und Richtung bestimmen.

Aus dem $\triangle$ BOC erhält man mittelst bekannter trigonometrischen Gesetze

$$P_1 : P_2 : R = \sin (P_2 R) : \sin (R P_1) : \sin (P_1 P_2) \quad \ldots \quad (1$$

$$R^2 = P_1{}^2 + P_2{}^2 + 2 P_1 P_2 \cos (P_1 P_2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2$$

und ist die Resultante durch die Gleichungen (1) der Richtung, durch die Gleichung (2) der Größe nach vollkommen und unzweideutig bestimmt.

Aus Gleichung (2) folgt, daß bei gegebenen Kräften die Größe der Resultante von der Größe des Winkels $P_1 P_2$ abhängt.

Ist der Winkel $P_1 P_2 = 180^0$ so wird

$$R^2 = P_1{}^2 + P_2{}^2 - 2 P_1 P_2$$

$$R = P_1 - P_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3$$

Ist der Winkel $P_1 P_2 = 90^0$ so wird

$$R^2 = P_1{}^2 + P_2{}^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4$$

Ist der Winkel $P_1 P_2 = 0$ so wird

$$R^2 = P_1{}^2 + P_2{}^2 + 2 P_1 P_2$$

$$R = P_1 + P_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5$$

Resultate, welche mit den auf rein mechanischem Wege erhaltenen vollkommen übereinstimmen.

§. 14.

Wird ein Punkt angegriffen von beliebig vielen Kräften (Fig. 3), deren Richtungen beliebige sind, jedoch in dieselbe Ebene fallen, so findet man die Resultante, indem man zuerst die Resultirende zwischen 2 Kräften, dann zwischen dieser und einer dritten Kraft aufsucht u. s. w. und gelangt zu dem Resultat: „Die Resultante von n Kräften, welche einen Punkt angreifen und deren Richtungen sämmtlich in dieselbe Ebene fallen, wird nach Größe, Richtung und Sinn der Richtung durch die Schlußseite eines n Eckes dargestellt, dessen Seiten nach Größe, Richtung und Sinn der Richtung den gegebenen Kräften entsprechen.“ Die Ordnung, in der diese Kräfte an einander gereiht werden, ist dabei vollkommen gleichgiltig.

§. 15.

Will man in diesem Falle die Resultante auf analytischem Wege erhalten, so ziehe man (Fig. 4) durch den angegriffenen Punkt O zwei senkrecht zu einander stehende Gerade oder Axen, nenne die horizontale die X, die verticale die Y Axe und zerlege jede der gegebenen Kräfte in zwei rechtwinklige Componenten, welche der Richtung nach mit diesen Axen zusammenfallen. Sind nun $\alpha_1, \alpha_2\, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ die Winkel, welche die Kräfte $P_1\, P_2\, P_3 \ldots P_n$ mit der X Axe jedoch immer nach derselben Richtung hin bilden, $\Sigma(P \cos \alpha)$ und $\Sigma(P \sin \alpha)$ beziehungsweise die Resultanten der nach der X und Y Axe wirkenden Componenten, so ist

$$\Sigma(\mathrm{P}\cos\alpha) = \mathrm{P}_1\cos\alpha_1 + \mathrm{P}_2\cos\alpha_2 + \ldots. + \mathrm{P}_n\cos\alpha_n$$
$$\Sigma(\mathrm{P}\sin\alpha) = \mathrm{P}_1\sin\alpha_1 + \mathrm{P}_2\sin\alpha_2 + \ldots. + \mathrm{P}_n\sin\alpha_n$$
und $$\mathrm{R}^2 = [\Sigma(\mathrm{P}\cos\alpha)]^2 + [\Sigma(\mathrm{P}\sin\alpha)]^2 \ldots \quad (1$$

Die Richtung der Resultante erhält man aus einer der drei Gleichungen

$$\sin\lambda = \frac{\Sigma(\mathrm{P}\sin\alpha)}{\mathrm{R}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

$$\cos\lambda = \frac{\Sigma(\mathrm{P}\cos\alpha)}{\mathrm{R}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3$$

$$\mathrm{tg}\,\lambda = \frac{\Sigma(\mathrm{P}\sin\alpha)}{\Sigma(\mathrm{P}\cos\alpha)} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4$$

Soll Gleichgewicht bestehen, so muß, weil $\mathrm{R} = 0$

$$[\Sigma(\mathrm{P}\cos\alpha)]^2 + [\Sigma(\mathrm{P}\sin\alpha)]^2 = 0 \ \ldots \quad (5$$

sein, was nur möglich ist, wenn

$$\Sigma(\mathrm{P}\cos\alpha) = 0 \quad \text{und}$$
$$\Sigma(\mathrm{P}\sin\alpha) = 0$$

d. h. „Zum Gleichgewichte beliebig vieler einen Punkt angreifenden Kräfte, deren Richtungen in dieselbe Ebene fallen, ist erforderlich und hinreichend, daß die algebraischen Summen der Componenten nach den Axen einzeln gleich Null sind."

§. 16.

Wird ein Punkt von drei Kräften angegriffen, deren Richtungen auf einander senkrecht stehen (Fig. 5), so ist die Diagonale des aus den 3 Kräften als anstoßenden Kanten construirten Parallelepipedons die Resultante dieser Kräfte. Wirken nemlich die drei Kräfte P_1 P_2 P_3 auf den Punkt O, so bestimmt man zuerst die Resultante S zwischen P_1 und P_2, sodann die Resultante zwischen S und P_3 und ist dann die letztere die gesuchte Resultirende der drei Kräfte.

Aus der Gleichung

$$\mathrm{R}^2 = \mathrm{S}^2 + \mathrm{P}_3{}^2 = \mathrm{P}_1{}^2 + \mathrm{P}_2{}^2 + \mathrm{P}_3{}^2 \ldots\ldots\ldots \quad (1$$

ergibt sich die Größe der Resultante,

Aus einer der drei Gleichungen

$$\mathrm{P}_1 = \mathrm{R}\cos\alpha_1;\ \mathrm{P}_2 = \mathrm{R}\cos\alpha_2;\ \mathrm{P}_3 = \mathrm{R}\cos\alpha_3 \ \ldots. \quad (2$$

die Richtung derselben, wobei α_1 α_2 α_3 die Winkel bezeichnen, welche die Resultante mit den Kräften P_1 P_2 P_3 beziehungsweise bilden.

Quadrirt man die letzten drei Gleichungen und verbindet sie mit den vorigen Gleichungen, so ergibt sich

$$R^2 = R^2(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3)$$

$$1 = \cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 \quad \ldots\ldots \quad (3$$

Aus Gleichung (3) folgt, daß wenn man zwei der Winkel beliebig angenommen hat, der dritte der Gleichung (3) genügen muß.

§. 17.

Sind der Kräfte, die einen Punkt angreifen, beliebig viele, und deren Richtungen beliebige, so zerlegt man analog dem Falle, in dem die Richtungen in derselben Ebene liegen, jede der gegebenen Kräfte in 3 Componenten, deren Richtungen mit drei durch den Angriffspunkt gehenden, gegenseitig zu einander senkrecht stehenden Geraden oder Axen beziehungsweise zusammenfallen, und auch in diesem Falle gelangt man zum Schlusse: „Zum Gleichgewicht beliebig vieler, beliebig gerichteter Kräfte im Raume, die einen Punkt angreifen, ist es erforderlich und hinreichend, daß die algebraischen Summen ihrer Componenten nach den drei Axen einzeln verschwinden."

Vom Gleichgewichte eines nicht mehr vollkommen freien Punktes.

§. 18.

Ist ein materieller Punkt nicht mehr vollkommen frei, so kann es der Bedingungen, denen er unterworfen ist, sehr verschiedene geben. Von diesen möge nur ein Fall hervorgehoben werden, der einen Maßstab für die Behandlung aller übrigen Fälle bieten wird. Es sei ein materieller Punkt genöthigt, auf einer krummen Oberfläche zu bleiben, so daß er sich nur innerhalb dieser bewegen kann.

§. 19.

Wird ein Punkt, welcher auf einer krummen Oberfläche zu verbleiben hat, von beliebig vielen Kräften angegriffen, so ist es zum Gleichgewichte desselben nicht nothwendig, daß die Resultante verschwindet, sondern erforderlich und hinreichend, daß die Resultante eine zur Oberfläche senkrechte Richtung hat.

Ist nemlich ein Punkt O (Fig. 6) unter dem Einfluß einer Kraft P_1, deren Richtung zur Oberfläche im Punkte O also zu dessen Tangentialebene senkrecht ist, und AB eine der vielen Tangenten, die im Punkte O an die Oberfläche gezogen werden können, so ist wegen der symmetrischen Lage der Kraft P in Bezug auf OA und OB kein Grund vorhanden, weßhalb der Punkt O sich lieber in der Richtung von OA als von OB bewegen sollte. Da der Punkt sich nicht nach beiden Richtungen zugleich bewegen kann, ferner dasselbe gilt bezüglich jeder andern Tangente im Punkte O, und endlich diese Tangenten die Richtungen angeben, in welchen der Punkt von der einen Stelle zur nächst gelegenen gelangen kann, so findet eine Bewegung des Punktes O überhaupt nicht statt. Da aber durch den Widerstand der Oberfläche die zu ihr senkrecht gerichtete Kraft P aufgehoben wird, oder mit andern Worten der Widerstand ihr das Gleichgewicht hält, so läßt sich dieser einer Kraft gleichsetzen, welcher der Kraft P gleich und entgegengesetzt ist.

Wird nun ein Punkt O, der sich nur auf einer Oberfläche bewegen kann, von den Kräften P_1, P_2 .... P_n angegriffen, so kann man von der Oberfläche ganz absehen und ihn unter der Voraussetzung als vollkommen frei betrachten, daß man zu den gegebenen Kräften eine neue der Größe nach noch unbestimmte Kraft N einführt, welche im angegriffenen Punkte zur Oberfläche senkrecht steht. Legt man sodann durch den Punkt O drei zu einander senkrechte Axen, OX, OY, OZ, bezeichnet mit ΣX, ΣY, ΣZ die nach diesen Axen wirkenden Componenten der gegebenen Kräfte, mit λ, μ, ν die Winkel der Kraft N beziehungsweise mit der X, Y und Z Axe, so wirken auf den nun als vollkommen frei zu betrachtenden Punkt

a) ΣX, ΣY, ΣZ

b) $N \cos\lambda$, $N \cos\mu$, $N \cos\nu$

und man erhält als Gleichgewichtsbedingungen

$$\Sigma X + N\cos\lambda = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1$$

$$\Sigma Y + N\cos\mu = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2$$

$$\Sigma Z + N\cos\nu = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3$$

oder

$$-N = \frac{\Sigma X}{\cos\lambda} = \frac{\Sigma Y}{\cos\mu} = \frac{\Sigma Z}{\cos\nu} \ldots \quad (4$$

Daraus folgt, daß im Falle des Gleichgewichtes die Summen der Componenten der gegebenen Kräfte nach den einzelnen Axen gleich und entgegengesetzt den Componenten des Widerstandes nach den nem-

lichen Axen, oder proportional sein müssen den Cosinussen der Winkel, welche die Normalkraft im angegriffenen Punkte mit den positiven Axen bilden. Die Resultante muß demnach, weil gleich und entgegengesetzt der Normalkraft, senkrecht stehen zur Oberfläche.

Vom Gleichgewichte der Kräfte, welche auf ein starres Punktesystem wirken.

§. 20.

Wenn zwei Kräfte P_1 und P_2 an den Endpunkten einer starren Geraden AB unter einem beliebigen Winkel wirken (Fig. 7), und die Richtungen derselben mit der Geraden in die nemliche Ebene fallen, so verlegt man die Angriffspunkte A und B der Kräfte P_1 und P_2 in den Punkt O, den Schnittpunkt ihrer Richtungen, setzt die jetzt im Punkte O gemeinschaftlich angreifenden Kräfte zu einer Resultante zusammen und verlegt deren Angriffspunkt in den Punkt C, den Schnittpunkt ihrer Richtung mit der Geraden AB. Eine in diesem Punkte C angreifende Kraft R_1, welche der Kraft R gleich ist aber entgegengesetzt wirkt, hält dann den beiden Kräften das Gleichgewicht, und nennt man den Punkt C in Folge dessen den Stützpunkt.

Als Gleichgewichtsbedingung erhält man

$$P_1 : P_2 = \sin\beta : \sin\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1$$

oder da $\sin\beta = \frac{CE}{OC}$ und $\sin\alpha = \frac{CD}{OC}$

$$P_1 : P_2 = CE : CD$$

mithin

$$P_1 \,.\, CD = P_2 \,.\, CE \quad \ldots\ldots \quad (2$$

d. h. Gleichgewicht findet statt, wenn die Produkte der Kräfte in die Entfernung ihrer Richtungen vom Stützpunkt einander gleich sind. Da man das Produkt einer Kraft in die Entfernung ihrer Richtung von einem Punkt das Moment der Kraft in Bezug auf diesen Punkt nennt, und die Gleichheit der beiden Produkte $P_1 \,.\, CD$ und $P_2 \,.\, CE$ die Bedingung enthält, unter welchen eine Bewegung der Geraden AB nicht eintreten kann, so nennt man diese Produkte statische Momente, und läßt sich nun obige Gleichgewichtsbedingung in der Form geben: „Im Falle des Gleichgewichtes sind die statischen Momente der Kräfte einander gleich.“

Wie man auf geometrischem Wege den Angriffspunkt, die Größe und Richtung der Resultante erhalten hat, so läßt sich auch mit Hülfe der Rechnung die Lage des Stützpunktes und die Resultante nach Größe und Richtung bestimmen.

Bezeichnet man den Winkel der beiden Kräfte mit $P_1 P_2$, den Winkel ihrer Richtungen mit der Geraden AB beziehungsweise mit P_1 und P_2, AB mit a und AC mit x, so geht die Gleichgewichtsbedingung

$$P_1 \, EC = P_2 \, DC \text{ über in}$$

$$P_1 \, x \sin P_1 = P_2 (a - x) \sin P_2 \quad \ldots \ldots \quad (3$$

also

$$x = \frac{a P_2 \sin P_2}{P_1 \sin P_1 + P_2 \sin P_2}$$

und ist durch Gl. (3) der Punkt C vollkommen bestimmt.

Die Größe der Resultante erhält man aus der Gleichung

$$R = \sqrt{P_1{}^2 + P_2{}^2 + 2 P_1 P_2 \cos P_1 P_2} \quad \ldots \quad (4$$

und ihre Richtung aus der Gleichung

$$P_1{}^2 = P_2{}^2 + R^2 - 2 P_2 R \cos P_2 R \quad \ldots \ldots \quad (5$$

oder

$$\cos P_2 R = \frac{P_2{}^2 + R^2 - P_1{}^2}{2 P_2 R}.$$

Letztere Gleichung läßt sich auch auf die Form

$$\cos P_2 R = \frac{P_2 + P_1 \cos P_1 P_2}{R} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6$$

bringen, wenn man in ihr für R^2 den Werth aus Gl. (4) einsetzt.

Liegen die Richtungen der beiden Kräfte P_1 und P_2 mit der Geraden AB nicht in einer und derselben Ebene, so lassen sie sich nicht zu einer Resultante vereinigen.

§. 21.

Wenn die beiden Kräfte P_1 und P_2, welche die starre Gerade AB angreifen, parallel sind und im gleichen Sinne wirken (Fig. 8), so kann man an den Punkten A und B zwei gleiche aber entgegengesetzt wirkende Kräfte Q_1 und Q_2 anbringen, deren Richtungen mit der Geraden AB zusammenfallen, ohne daß die Wirkung der Kräfte P_1 und P_2 eine Aenderung erleidet. Setzt man die Kräfte P_1 und Q_1, P_2 und Q_2 beziehungsweise zu den Resultanten S_1 und S_2 zusammen, verlegt deren Angriffspunkt an den

Punkt O, den Schnittpunkt ihrer Richtungen, zerlegt S_1 und S_2 in je zwei Componenten T_1 und R_1, T_2 und R_2 so, daß $T_1 = T_2 = Q_1$, und T_1 sowohl als $T_2 \# AB$ wird, so ist, da T_1 und T_2 sich das Gleichgewicht halten, die Wirkung der Kräfte P_1 und P_2 auf die der Kräfte R_1 und R_2 zurückgeführt. Da $R_1 = P_1$ und $R_2 = P_2$ ist, und ihre Richtungen in dieselbe Gerade $OC \# P_1$ fallen, so ist eine Kraft $R = R_1 + R_2 = P_1 + P_2$ die Resultante der Kräfte P_1 und P_2, und diese schneidet die Gerade AB im Punkte C so, daß die Segmente sich umgekehrt verhalten, wie die anliegenden Kräfte. Letzteres ergibt sich aus der Aehnlichkeit der $\Delta\,\Delta$ AS_1Q_1 und AOC, BS_2Q_2 und BOC.

Zu den gleichen Resultaten wäre man gekommen, wenn man in der Gleichung (4) des vorigen Paragraphen

$$R = \sqrt{P_1{}^2 + P_2{}^2 + 2\,P_1\,P_2 \cos P_1\,P_2}$$

den Winkel $P_1\,P_2 = 0$ gesetzt, und den für R dadurch erhaltenen Werth $P_1 + P_2$ in die Gleichung

$$\cos P_2\,R = \frac{P_2{}^2 + R^2 - P_1{}^2}{2\,P_2\,R}$$

für R eingeführt hätte.

Wie man die Wirkung zweier Parallelkräfte auf die einer einzigen Kraft zurückgeführt hat, so läßt sich auch eine einzige Kraft in zwei im gleichen Sinne parallele Kräfte zerlegen.

Soll nemlich die Kraft R in die beiden Parallelkräfte P_1 und P_2 zerlegt werden, so folgt aus

$$P_1 : P_2 = CB : CA$$
$$P_1 + P_2 : P_1 : P_2 = CB + CA : CB : CA$$
$$R : P_1 : P_2 = AB : CB : CA$$

und sind durch die Gleichungen

$$P_1 = R \cdot \frac{CB}{AB} \text{ und } P_2 = R \cdot \frac{CA}{AB}$$

die Componenten P_1 und P_2 vollständig bestimmt.

§. 22.

Sind die Kräfte P_1 und P_2, welche in den Punkten A und B der starren Geraden AB wirken, **antiparallel** (Fig. 9),

d. h. wirken die Kräfte in entgegengesetzter Richtung, und ist $P_1 > P_2$, so läßt sich P_1 in zwei im gleichen Sinne parallel wirkende Componenten Q_1 und Q_2 zerlegen, so daß Q_2 gleich und entgegengesetzt der Kraft P_2 im Punkte B wirkt, während $Q_1 = P_1 - P_2$ den aus der Gleichung

$$Q_1 : Q_2 = AB : CA$$

sich ergebenden Punkt C zum Angriffspunkt hat. Es ist somit, da P_2 und Q_2 sich das Gleichgewicht halten, Q_1 die Resultante der Kräfte P_1 und P_2 und wirkt dieselbe parallel den gegebenen Kräften im Sinne der größeren Kraft P_1.

Da $$AC = AB \cdot \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{AB \cdot Q_2}{P_1 - P_2}$$

so folgt, daß AC einen endlichen Werth hat, solange $P_1 \gtrless P_2$ ist, daß es also in diesen Fällen eine Resultante gibt. Wird jedoch $P_1 = P_2$ so ist $AC = \infty$, und ist eine Resultante nicht möglich.

§. 23.

Wirken beliebig viele Parallelkräfte $P_1 P_2 \ldots P_n$ im beliebigen Sinne auf die Punkte $A_1 A_2 \ldots . A_n$ eines starren Punktesystems, so vereinigt man sowohl die in dem einen wie andern Sinne wirkenden Kräfte zu einer Mittelkraft, und ist die Endresultante gleich der Differenz der gesuchten Mittelkräfte. Um den Angriffspunkt dieser Endresultante, welchen man gewöhnlich den Mittelpunkt der Parallelkräfte nennt, zu erhalten, sucht man zuerst die Resultante zweier Kräfte, dann die Mittelkraft dieser Resultante und einer dritten Kraft u. s. w. Sollten die Kräfte nicht vertikal wirken, sondern in einer beliebigen Richtung, so ist es gerade so, als ob die Richtungen sämmtlicher Kräfte um den gleichen Winkel gedreht worden wären, und ist demnach die Lage des Angriffspunktes der Endresultante von der Lage der Kräfte gegen das Punktesystem unabhängig.

§. 24.

Wenn Parallelkräfte eine Resultante haben, so ist das Moment der Resultante in Bezug auf irgend eine Ebene (das Produkt der Kraft in die Entfernung ihres Angriffspunktes von

der Ebene) gleich der algebraischen Summe der Momente ihrer Componenten in Bezug auf die nemliche Ebene (Fig. 10).

Sind P_1 und P_2 zwei Parallelkräfte, welche in den Punkten A und B im gleichen Sinne auf die starre Gerade AB wirken, ist R die Resultante derselben, O ihr Angriffspunkt, MN die gegebene Ebene, so sind die Momente von P_1, P_2 und R in Bezug auf diese Ebene beziehungsweise $P_1 . AC$, $P_2 . BD$ und $R . OQ$, während nach den Bedingungen des Gleichgewichtes

$$R = P_1 + P_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1$$

$$P_1 . AO = P_2 . BO \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

Zieht man von O aus $OH_1 \perp AC$ und von B aus $BH_2 \perp OQ$, so folgt aus der Aehnlichkeit der $\triangle\triangle\, AOH_1$ und BOH_2

$$AO : AH_1 = OB : OH_2$$

$$AO : (AC - OQ) = OB : (OQ - BD) \quad \ldots\ldots \quad (3$$

Verbindet man letztere Gleichung mit der Gleichung (2), so erhält man

$$P_1 (AC - OQ) = P_2 (OQ - BD)$$

$$(P_1 + P_2)\, OQ = P_1 . AC + P_2 . BD$$

$$R . OQ = P_1 . AC + P_2 . BD \quad \ldots \quad (4$$

Wirken die Kräfte P_1 und P_2 im entgegengesetzten Sinne, so ist

$$R . OQ = P_1 . AC - P_2 . BD \quad \ldots \quad (5$$

Von den Bedingungen des Gleichgewichtes eines starren Punktesystems unter dem alleinigen Einflusse der Schwerkraft.

§. 25.

Die Kraft, mit der erfahrungsgemäß jeder Körper sich selbst überlassen in vertikaler Richtung auf die Erdoberfläche zu fallen sucht, nennt man die Schwere oder die Schwerkraft. Betrachtet man jeden Körper als ein Aggregat materieller Punkte, so kann man die Schwerkraft als die Resultante von Kräften ansehen, welche an den einzelnen Punkten vertikal abwärts wirken. Die Richtungen dieser Kräfte laufen wegen der fast kugelförmigen Gestalt der Erde im Erdmittelpunkt zusammen, können jedoch, so lange die Dimensionen der Körper verschwindend klein sind im Verhältniß zu ihrer Entfernung vom Erdmittelpunkte, als parallel gelten. Die Größe der Resultante dieser Kräfte

nennt man das Gewicht des Körpers oder seine Schwere; ihren Angriffspunkt, in welchem man nach dem Vorausgehenden das Gewicht des Körpers sich vereinigt denken kann, den **Schwerpunkt** des **Körpers**. Jede gerade Linie, welche durch den Schwerpunkt geht, heißt **Schwerlinie**, die Resultante zum Unterschiede von diesen die **vertikale Schwerlinie**.

Da die Schwere oder das Gewicht des Körpers sich mit dem Beobachtungsorte ändert, und zwar von den Polen gegen den Aequator hin nach dem Quadrate des Sinus der geographischen Breite abnimmt, so wird wohl die Größe der Resultante geändert, nicht aber die Lage des Schwerpunktes.

Aus dem Bisherigen ist ersichtlich, daß die in den früheren Paragraphen gefundenen **Bedingungen des Gleichgewichtes auch auf schwere, feste Körper ihre Anwendung finden, wenn man zu den gegebenen Kräften eine neue Kraft einführt, welche dem Gewichte des Körpers gleich ist, den Schwerpunkt zum Angriffspunkt hat und vertikal wirkt.**

§. 26.

Der Schwerpunkt eines Körpers kann durch Versuche oder durch Rechnung bestimmt werden. Im ersteren Falle hängt man den Körper mittelst eines möglichst feinen Fadens auf. Ist derselbe in Ruhe, so befindet sich der Schwerpunkt auf der Verlängerung des Fadens, weil Gleichgewicht nicht bestehen könnte, wenn nicht eine der Schwere gleiche und entgegengesetzte Kraft vorhanden wäre, nemlich der Widerstand des gespannten Fadens. Befestigt man den Faden an einem andern Punkte des Körpers, so liegt ebenfalls, sobald der Körper in Ruhe ist, der Schwerpunkt auf der Verlängerung des Fadens, und ist der Schnittpunkt der Verlängerung des Fadens in der einen und andern Lage des Körpers der gesuchte Schwerpunkt. Diesen Weg schlägt man ein bei Bestimmung des Schwerpunktes **heterogener** Körper, d. i. Körper, in denen gleichen Raumtheilen nicht gleich viel materielle Punkte entsprechen, und solcher **homogener** Körper, bei welchen die Bestimmung desselben aus der Figur zu großen Weitläufigkeiten führen würde.

Bei regulären Figuren ist natürlicher Weise der Mittelpunkt auch der Schwerpunkt, da sich zu jedem Punkte auf der einen Seite des-

selben ein Punkt auf der andern Seite in gleichem Abstande vorfindet, derselbe somit symmetrisch liegt in Bezug auf alle übrigen Punkte. Was das Aufsuchen des Schwerpunktes von Linien und Flächen anlangt, so haben diese Aufgaben nur in sofern einen Sinn, als man bei den ersteren zwei, bei den letzteren eine Dimension als verschwindend klein gegen die gegebenen betrachtet, da mathematische Linien und Flächen, weil nichts Körperliches, kein Gewicht haben.

§. 27.

Der Schwerpunkt eines materiellen, homogenen Kreisbogens liegt auf dem Radius, welcher den Bogen halbirt, und ist sein Abstand vom Kreismittelpunkte die vierte geometrische Proportionale zum Bogen, zur zugehörigen Sehne und zum Radius (Fig. 11).

Auflösung: Der Schwerpunkt liegt jedenfalls auf dem Radius, welcher den Bogen halbirt, weil in Bezug auf ihn die einzelnen Theilchen symmetrisch liegen.

Um die Lage des Schwerpunktes näher zu bestimmen, zerlegt man den Bogen BC in n gleiche Theile, und kann, wenn n möglichst groß ist, jeden dieser Theile ohne besonderen Fehler als eine gerade Linie betrachten. Ist ab eines dieser kleinen Bogenelemente, i dessen Mittelpunkt, h_1 die Entfernung desselben von einer durch den Kreismittelpunkt O zur Sehne BC parallel gezogenen Geraden MN, so ist, da man das Gewicht p dieses Bogenelementes in dem Mittelpunkt i vereinigt denken kann das Moment von ab in Bezug auf MN gleich $p \cdot h_1$. Sind $h_2\, h_3 \ldots h_n$ die Entfernung der Mittelpunkte der übrigen Bogenelemente von MN, so erhält man in $p \cdot h_1$, $p \cdot h_2 \ldots p \cdot h_n$ die Momente derselben in Bezug auf MN und in $p(h_1 + h_2 + \ldots h_n)$ das Moment des ganzen Kreisbogens. Anderseits kann man aber das Gesammtgewicht des Kreisbogens als die Resultante der Gewichte sämmtlicher Bogenelemente betrachten, so daß, wenn x die Entfernung des gesuchten Schwerpunktes von MN, man auch in $n \cdot p \cdot x$ das Moment des Kreisbogens in Bezug auf MN erhält. Aus der Gleichung

$$n \cdot p \cdot x = p(h_1 + h_2 + \ldots + h_n) \quad \ldots \quad (1$$

ergibt sich $\quad x = \frac{h_1 + h_2 + \ldots h_n}{n}$.

Zieht man nun $a\alpha_1$ und $b\beta_1 \perp BC$, $bc \perp a\alpha$, und verbindet i mit O, so folgt aus der Aehnlichkeit der $\triangle\triangle$ hOi und abc.

$$ih : iO = bc : ab$$
$$h_1 : r = \alpha_1\beta_1 : ab$$
$$h_1 = \frac{\alpha_1\beta_1}{ab} \cdot r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

Bezeichnet man mit $\alpha_2\beta_2$, $\alpha_3\beta_3$ .... $\alpha_n\beta_n$ die Projektionen der übrigen Bogenelemente auf BC, so wird

$$h_2 = \frac{\alpha_2\beta_2}{ab} \cdot r;\ h_3 = \frac{\alpha_3\beta_3}{ab} \cdot r;\ \text{u. s. w.} \ldots \quad (3$$

und

$$x = \frac{r(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots \alpha_n\beta_n)}{n \cdot ab} \ldots \quad (4$$
$$= \frac{r \cdot BC}{\text{arc } BC}.$$

§. 28.

Der Schwerpunkt eines Dreieckes liegt auf der Geraden, welche eine Ecke mit dem Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seite verbindet, und zwar um zwei Dritttheile derselben von der Ecke entfernt (Fig. 12).

Theilt man das Dreieck ABC durch Parallele zur Basis AB in n Lamellen oder Streifen, so kann man, je größer n ist, um so mehr diese Streifen als materielle, gerade Linien betrachten. Der Schwerpunkt einer jeden dieser Linien ist ihr Mittelpunkt, und liegen sämmtliche Schwerpunkte auf der Mittellinie CD, welche die Halbirungspunkte der Parallelen verbindet. CD ist deßhalb eine Schwerlinie. Ebenso ist die Mittellinie AE eine Schwerlinie, und S, der Schnittpunkt der beiden Schwerlinien CD und AE, der gesuchte Schwerpunkt.

Verbindet man D mit E, so ist $DE \# AC$ und folgt aus der Aehnlichkeit der $\triangle\triangle$ ASC und DSE

$$DS : CS = DE : AC$$
$$= 1 : 2$$
$$DS : (CS + DS) = 1 : 3$$
$$DS : CD = 1 : 3$$

§. 29.

Soll der Schwerpunkt eines beliebigen Vieleckes bestimmt werden, so zerlege man dasselbe in Dreiecke, suche die Schwerpunkte derselben und zu den in diesen Punkten parallel wirkenden Schwerkräften, welche der Größe nach proportional sind den Flächeninhalten der Dreiecke, die Resultante. Der Angriffspunkt der Resultante ist der gesuchte Schwerpunkt.

§. 30.

Der Schwerpunkt eines Kreissektors (Fig. 13), dessen Halbmesser r, dessen Bogen b und dessen Sehne s ist, liegt auf der Halbirungslinie des zugehörigen Centriwinkels und hat vom Mittelpunkt eine Entfernung

$$x = \frac{2}{3} r \cdot \frac{s}{b}.$$

Theilt man den Kreissektor in n unter sich gleiche Sektoren, so kann man diese, wenn n groß genug ist, als Dreiecke betrachten. Die Schwerpunkte dieser Dreiecke liegen auf einem Kreisbogen $b_1 = \frac{2}{3} b$, dessen Radius $r_1 = \frac{2}{3} r$ und dessen Sehne $s_1 = \frac{2}{3} s$ ist. Der Schwerpunkt S dieses Bogens ist zugleich der Schwerpunkt des Sektors, und man erhält seine Entfernung x von dem Mittelpunkt C aus der Gleichung

$$x = \frac{r_1 \cdot s_1}{b_1} = \frac{2}{3} r \cdot \frac{s}{b}.$$

§. 31.

Der Schwerpunkt einer Kugelhaube (Calotte) oder Kugelzone liegt in der Mitte ihrer Axe. Theilt man die krumme Oberfläche durch n zur kreisförmigen Basis parallele Ebenen in möglichst viele schmale Streifen von gleicher Höhe, so haben diese gleiche Oberfläche. Die Schwerpunkte dieser Streifen, welche man als Cylindermäntel betrachten kann, liegen auf der im Mittelpunkte der Basis errichteten Normalen oder Axe der Kugelhaube, und fällt demnach der Schwerpunkt der Kugelhaube oder Kugelzone mit dem Schwerpunkte der Höhe zusammen. Weil sämmtliche Streifen gleichen Inhalt oder gleiches Gewicht haben, so ist die Axe eine homogene materielle Linie, und der Mittelpunkt derselben auch ihr Schwerpunkt.

§. 32.

Der Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide liegt in der Geraden, welche die Spitze der Pyramide mit dem Schwerpunkte der gegenüberliegenden Grundfläche verbindet, und zwar um $^{3}/_{4}$ dieser Geraden von der Spitze entfernt (Fig. 14).

Ist gegeben die dreiseitige Pyramide D . ABC, so geht, wenn O der Schwerpunkt der Grundfläche ABC, DO durch die Schwerpunkte aller mit dem Δ ABC parallelen materiellen Dreiecke, aus denen man sich die Pyramide zusammengesetzt denken kann, und ist demnach DO eine Schwerlinie; ebenso ist AF, wenn F der Schwerpunkt der Seitenfläche BCD, eine Schwerlinie. DO und AF liegen aber in einer und derselben Ebene ADE, und ist S, der Schnittpunkt beider, der gesuchte Schwerpunkt. Da OF $\#$ AD, so ergibt sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ASD und OSF, daß $OS = \frac{1}{3} DS = \frac{1}{4} DO$.

§. 33.

Um den Schwerpunkt einer vielseitigen Pyramide zu finden, denkt man sich dieselbe als ein Aggregat von Flächen, welche parallel sind zur Grundfläche. Die Schwerpunkte aller dieser parallelen Flächen liegen auf der Geraden, welche die Spitze der Pyramide mit dem Schwerpunkte der Grundfläche verbindet, also auch der Schwerpunkt der Pyramide selbst. Anderseits kann man die Pyramide in dreiseitige Pyramiden zerlegen, so daß ihre Grundflächen mit der Basis der vielseitigen Pyramide zusammenfallen. Die Schwerpunkte dieser dreiseitigen Pyramiden haben aber dieselbe Entfernung von der Basis und liegen deßhalb in einer zur Basis oder vielseitigen Pyramide parallelen Ebene, welche um den vierten Theil der Höhe von der Grundfläche entfernt ist. Der Schnittpunkt der ersten Schwerlinie mit dieser Ebene ist der Schwerpunkt der Pyramide. Dasselbe Resultat erhält man auch bei der Bestimmung des Schwerpunktes eines Kegels, da man den Kegel als eine Pyramide betrachten kann, deren Basis ein Polygon von einer unbegrenzten Seitenanzahl ist.

§. 34.

Der Schwerpunkt eines Kugelsektors (Fig. 13), welcher begrenzt ist von einem Kegelmantel mit der Seite r und einer Kugel-

haube mit der Höhe h, hat vom Kugelmittelpunkte eine Entfernung $x = \frac{3}{8}(2r - h)$.

Man zerlegt den Sektor A B C O in n gleiche Kegel, deren gemeinschaftliche Spitze O ist. Die Schwerpunkte dieser Kegel liegen auf einer Kugelhaube $A_1 B_1 C_1$ mit dem Halbmesser $\frac{3}{4} r$, und ist der Schwerpunkt dieser Kugelhaube $A_1 B_1 C_1$ der Schwerpunkt des Sektors. Ist nun S der gesuchte Schwerpunkt, so ist, da $\frac{3}{4} h$ die Höhe der Kugelhaube, $B_1 S = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} h\right)$ und

$$x = B_1 O - B_1 S = \frac{3}{4} r - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} h\right)$$
$$= \frac{3}{4} r - \frac{3}{8} h$$
$$= \frac{3}{8}(2r - h).$$

§. 35.

Ein Körper befindet sich in Ruhe oder im Gleichgewicht, wenn sein Schwerpunkt unterstützt ist, oder wenn in seinem Schwerpunkte eine Kraft wirkt gleich und entgegengesetzt der Resultante der Schwerkräfte.

Je nach der Lage des Schwerpunktes unterscheidet man ein stabiles, labiles oder indifferentes Gleichgewicht.

Das Gleichgewicht ist ein stabiles

a) wenn der Schwerpunkt unter dem Aufhängepunkte liegt, in welchem Falle der Körper aus seiner Gleichgewichtslage gebracht, immer wieder dahin zurückzukehren sucht;

b) wenn der Körper auf einer horizontalen Fläche ruht, so daß die vertikale Schwerlinie noch die Stützfläche trifft, da in diesem Falle der Körper einer Aenderung seiner Lage einen großen Widerstand entgegensetzt.

Das Gleichgewicht ist ein labiles oder unsicheres, wenn der Drehpunkt unter dem Schwerpunkte sich befindet, oder wenn der

Körper nur in einem einzigen Punkte seiner vertikalen Schwerlinie unterstützt ist, da in beiden Fällen die geringste Veränderung der Lage eine Bewegung, beziehungsweise ein Umstürzen des Körpers nach sich zieht.

Das Gleichgewicht ist indifferent, wenn der Körper im Schwerpunkte unterstützt wird, also Drehpunkt und Schwerpunkt zusammenfallen. Der Körper wird in jeder Lage bleiben, in welche er versetzt wird.

§. 36.

Die Fähigkeit eines Körpers, vermöge seines Gewichtes zu stehen, oder den Widerstand, den ein Körper einer Aenderung seiner Lage entgegensetzt, nennt man Stabilität oder Standfähigkeit des Körpers.

Sucht eine Kraft P einen Körper vom Gewichte Q um eine seiner Kanten umzudrehen, so wird der Körper vermöge seines Gewichtes dieser Drehung einen Widerstand W entgegensetzen, und dieser Widerstand W ist durch $Q . x$, das statische Moment des Gewichtes Q oder der Schwerkraft in Bezug auf die Kante, ausgedrückt, worin x die Entfernung der Richtung der Schwerkraft von der Umdrehungskante bezeichnet. Aus $W = Q . x$ ergibt sich, daß die Stabilität eines Körpers um so größer ist, je größer das Gewicht und die Basis des Körpers ist.

Anwendung der Statik auf einfache Maschinen.

§. 37.

Eine Vorrichtung, mittelst deren es möglich wird, eine gewisse Arbeit zu leisten, oder Bewegungen zu bestimmten Zwecken hervorzubringen und zwar mit geringerem Kraftaufwand als ohne dieselbe, nennt man eine Maschine.

Der Widerstand, welcher mit Hilfe einer Maschine überwunden werden soll, heißt Last, die denselben überwindende Kraft vorzugsweise Kraft.

Eine Maschine, deren Bestandtheile selbst nicht wieder als Maschinen betrachtet werden können, heißt einfach, außerdem zusammengesetzt.

Zu den einfachen Maschinen (Elementarmaschinen) rechnet

man 1) den Hebel (Wage), 2) die Rolle, 3) das Wellrad, 4) die schiefe Ebene, 5) die Schraube, 6) den Keil.

Von diesen lassen sich aber die Wirkungen der Rolle und des Wellrades auf die des Hebels, die Wirkungen der Schraube und des Keiles auf die der schiefen Ebene zurückführen, so daß strenge genommen es nur zwei einfache Maschinen gibt, den Hebel und die schiefe Ebene.

Vom Hebel.

§. 38.

Eine jede unbiegsame Stange, welche in einem ihrer Punkte unterstützt ist, nennt man Hebel. Denkt man sich die Stange gewichtslos, so heißt sie mathematischer, außerdem physischer Hebel. Die beiden Theile des Hebels vom Angriffspunkte der Kraft und Last bis zum Stützpunkte heißen Hebelarme. Liegen die Angriffspunkte auf verschiedener Seite des Stützpunktes, so nennt man den Hebel zweiarmig, liegen sie auf der nemlichen Seite, einarmig, und haben die Hebelarme verschiedene Richtung, Winkelhebel.

Bei jedem mathematischen Hebel müssen nach §. 21 im Falle des Gleichgewichtes die statischen Momente gleich sein.

Wirken an einem mathematischen Hebel drei Kräfte P, P_1, P_2 so kann man, wenn P den Hebel nach der einen, P_1 und P_2 nach der entgegengesetzten Richtung zu drehen sucht, P in zwei parallele auf den Angriffspunkt der Kraft P wirkende Kräfte p_1 und p_2 zerlegen, und es muß, da jede Kraft zu ihrer Geltung kommt, im Falle des Gleichgewichtes

$$p_1 x = P_1 x_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1$$

$$p_2 x = P_2 x_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

also $$(p_1 + p_2)\, x = P x = P_1 x_1 + P_2 x_2 \quad \ldots\ldots \quad (3$$

wenn x x_1 x_2 die senkrechten Entfernungen des Stützpunktes sind beziehungsweise von den Richtungen der Kräfte P, P_1, P_2. Wiederholt man diese Schlüsse, so ergibt sich für das Gleichgewicht beliebig vieler an einem Hebel wirkender Kräfte der allgemein giltige Satz: „Die Summe der statischen Momente der Kräfte an dem einen Hebelarme ist gleich der Summe der statischen Momente der Kräfte an dem andern.“

Wirken einige von den Kräften in entgegengesetzter Richtung, so sind die statischen Momente negativ zu nehmen.

Auf Anwendung dieses Satzes beruht das Gesetz des Gleichgewichtes von Kräften, welche an einem physischen Hebel wirken, den man als einen mathematischen betrachten kann, sobald man in seinem Schwerpunkte eine vertikal abwärts wirkende Kraft anbringt, welche gleich ist dem Gewichte des Hebels.

§. 39.

Eine der wichtigsten Anwendungen des Hebels ist die Wage, welche dazu dient, das Gewicht der Körper durch Gegengewicht zu bestimmen. Es gibt verschiedene Arten von Wagen, je nachdem dieselbe ein gleicharmiger oder ungleicharmiger Hebel, ein Winkelhebel oder ein zusammengesetzter Hebel, d. i. eine Verbindung mehrerer Hebel ist. Von diesen mögen hier als die im Gebrauche am öftesten vorkommenden angeführt werden die gemeine oder Krämerwage, die Schnellwage, die Zeigerwage und die Brücken- oder Kunstwage.

Die gemeine oder Krämerwage.

§. 40.

Die gemeine oder Krämerwage, deren man sich zu genauen Abwägungen zumeist bedient, ist ein gleicharmiger Hebel, Wagebalken genannt, an dessen Enden gewöhnlich Schalen hängen zur Aufnahme des zu wägenden Körpers und des Gewichtes, mit dem das Gewicht des Körpers verglichen werden soll. Der Wagebalken wird mittelst einer Scheere getragen, in der er mit Hilfe einer festen, horizontalen Axe aufliegt, und um welch' letztere derselbe drehbar ist. In der Mitte des Wagebalkens befindet sich eine zu demselben senkrechte Nadel, die sogenannte Zunge, und liegt der Wagebalken vollständig horizontal, sobald die Zunge sich genau in der Mitte der Scheere befindet (in die Scheere einspielt).

Die Bedingungen, welche man an eine gute Wage stellt, sind 1) Richtigkeit, 2) Empfindlichkeit.

Soll eine Wage richtig sein, d. h. genaue Resultate geben, so müssen beide Wagschalen, sowie beide Hebelarme gleich

schwer und letztere zudem gleich lang sein. Um dieses zu prüfen, werden beide Schalen gleich belastet, dann die Schalen wie die Gewichte gewechselt, und in beiden Fällen muß der Wagebalken eine horizontale Lage einnehmen, also im Gleichgewichte sein. Soll aber der Wagebalken horizontal liegen, so muß der Schwerpunkt der Wage vertikal unter dem Aufhängepunkte liegen.

Eine gute Wage muß empfindlich sein, d. h. sie muß auch das kleinste Uebergewicht anzeigen. Besteht nemlich ein Unterschied zwischen Gewicht und Last, so bildet die Zunge mit ihrer Richtung im Gleichgewichtszustande einen Winkel, den sogenannten Ausschlagswinkel, und aus der Größe dieses Winkels bei einem bestimmten Uebergewicht läßt sich ein Schluß ziehen auf die Güte oder Empfindlichkeit der Wage.

Gesetzt, der in horizontaler Lage sich befindliche Wagebalken ab (Fig. 15) sei durch die Zulage des Gewichtes p in der rechten Schale in die Lage von $a_1\, b_1$ gekommen, c sei der Drehpunkt, g der Schwerpunkt, R das Gewicht des Wagebalkens, so ist die Bedingung des Gleichgewichtes

$$P \,.\, cm + R \,.\, cd = (P + p)\, cn \;\ldots\ldots \quad (1$$

$$R \,.\, cd = p \,.\, cn$$

oder da $cd = cs \sin\alpha$ und $cn = bc \cos\alpha$, wenn α der Ausschlagswinkel

$$R \,.\, cs \sin\alpha = p \,.\, bc \cos\alpha \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{p \,.\, bc}{R \,.\, cs} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3$$

Die Empfindlichkeit einer gleicharmigen Wage ist also um so größer

1) je länger die Hebelarme sind,
2) je leichter der Wagebalken ist,
3) je näher der Schwerpunkt dem Aufhängepunkte liegt.

Die Schnellwage.

§. 41.

Die Schnellwage (Fig. 16) ist ein ungleicharmiger Hebel, an dessen kürzerem Arme in einer bestimmten Entfernung vom Dreh-

punkte der zu wägende Körper entweder mittelst eines Hackens oder einer Wagschale hängt. An dem in gleiche Theile getheilten, längeren Arme kann ein bekanntes Gewicht, der sogenannte Läufer, mittelst einer Hülse verschoben werden, bis der Wagebalken horizontal liegt, der Last also das Gleichgewicht gehalten wird.

Ist s der Schwerpunkt des Wagebalkens, R sein Gewicht, c der Aufhängpunkt der Last, a der Drehpunkt, und befindet sich bei b der Läufer, so ist die Gleichgewichtsbedingung

$$P \,.\, ab + R \,.\, as = L \,.\, ca \;\ldots\ldots \quad (1$$

Wird das Gleichgewicht der unbelasteten Wage dadurch erzielt, daß man den längeren Arm etwas dünner macht als den kürzeren, oder daß man am kürzeren Arme für die Last in c eine Wagschale anbringt, welche der Kraft R das Gleichgewicht hält, so wird die Gleichgewichtsbedingung durch die einfache Gleichung erfüllt

$$P \,.\, ab = L \,.\, ac \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

Ist $ab = 10\,ac$, so wird $L = 10\,P$, und die Wage ist eine Decimal-Wage.

Die Schnellwage gibt zwar keine so genauen Resultate, wie die gemeine Wage, allein sie ist leichter zu handhaben, weil das Laufgewicht geringer ist, als das Gewicht der Last. Sie findet vorzüglich Anwendung, wenn es sich um Bestimmung des Gewichtes großer Waarenballen, Heu- oder Frachtwagen handelt.

Die Zeigerwage.

§. 42.

Die Zeigerwage (Fig. 17) besteht aus dem ungleicharmigen Winkelhebel ACB, der von einem Statif EF getragen wird und im Scheitel C seinen Drehpunkt hat. Der längere Arm BC ist gewöhnlich so construirt, daß er im unbelasteten Zustande der Wage in die Richtung der vertikalen CF fällt, und der kürzere Arm AC so gebogen, daß in diesem Falle A, C, E in einer geraden Linie liegen. Hängt man nun in A eine Last auf, so wird der längere Arm aufwärts gehoben und beschreibt S, der Schwerpunkt desselben, um den Drehpunkt C einen Kreisbogen FB, aus dessen Länge man auf das Gewicht der Last schließen kann. Zu diesem Zwecke ist an dem Statif

eine kreisbogenförmige Skala EF angebracht, die der einem Uhrenzeiger ähnliche, längere Arm mit seinem Ende durchläuft.

Ist P das Gewicht des längeren Armes, so erhält man als Gleichgewichtsbedingung

$$P \cdot CG = L \cdot CH.$$

Legt man in die Wagschale nach und nach bekannte Gewichte und bezeichnet man den jedesmaligen Stand des längeren Armes auf der Skala, so läßt sich aus der Stellung des letzteren unmittelbar das Gewicht der Last bestimmen.

Diese Wagen sind besonders in Spinnereien im Gebrauch und werden in neuerer Zeit auch als Briefwagen benützt.

Die Kunst- oder Brückenwage.

§. 43.

Unter **Kunstwagen** versteht man solche **Wagen, die aus zwei oder mehreren Hebeln zusammengesetzt sind.** Von diesen ist **die von Quintenz erfundene Brückenwage** wegen der leichten Tragbarkeit die bequemste. Sie besteht im Wesentlichen aus drei Hebeln (Fig. 18), dem ungleicharmigen Hebel DE und den beiden einarmigen Hebeln JK und FG. Der Hebel DE ist um den Punkt C des festen Gestelles ABC drehbar. An D, dem einen Ende desselben, hängt eine Schale zur Aufnahme des Gewichtes, welche in Verbindung mit dem Hebelarme CD dem Hebelarme CE das Gleichgewicht hält. Mittelst der Stangen HJ und EF sind mit ihm verbunden die Hebel JK und FG mit den Drehpunkten K und G, von denen der erstere gewöhnlich eine gabelförmige Gestalt hat und die zu wägende Last L trägt. Die Punkte H, E und M sind dabei so gewählt, daß CH : CE = GM : GF. Die Last L übt zunächst im Punkte S auf den Hebel JK einen Druck aus, welcher sich vertheilt auf die Punkte J und K. Der eine Theil x wirkt im Punkte J mittelst der Stange HJ auf den Hebelarm CE; der andere Theil y pflanzt seinen Druck bis zum Punkte M fort, und vertheilt sich die Wirkung desselben auf die Punkte F und G des Hebels FG; es bleibt jedoch, da G fest unterstützt ist, nur die Wirkung z im Punkte F übrig. Die Größe dieses Druckes erhält man aus der Gleichung

$$z = y \cdot \frac{GM}{GF} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1$$

Dieser Druck z wirkt aber mittelst der Hebelstange EF auf den Hebelarm und übt auf den Punkt H einen Druck v aus, dessen Größe aus der Gleichung sich ergibt

$$v = z \cdot \frac{CE}{CH} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

oder da $z = y \cdot \frac{GM}{GF}$

$$v = \frac{GM}{GF} \cdot \frac{CE}{CH} \cdot y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3$$

Weil aber $CE : CH = GF : GM$, so ist

$$v = y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4$$

Es wirkt demnach auch der Theil der Last, welcher auf den Punkt K einen Druck ausübt, so auf den Hebelarm CE, als ob er unmittelbar mit x im Punkte H angreifen würde.

Da die Wirkung der Last L, welche auf JK ruht, die nemliche ist, wie wenn sie im Punkte H wirksam wäre, so ist es einerlei, auf welchem Theile der Brücke die Last liegt. Wird der Hebel DE so eingerichtet, daß $CH : CD = 1 : 10$ sich verhält, so ist die Wage eine Decimalwage.

Die Rolle.

§. 44.

Die Rolle ist eine kreisrunde Scheibe, an deren Umfange sich eine Vertiefung oder Rinne befindet, um ein Seil oder eine Kette aufzunehmen; in dem Mittelpunkte der Scheibe ist senkrecht auf ihre Ebene eine Axe (Zapfen oder Bolzen) angebracht, welche in einem Gehäuse (Scheere oder Kloben) ruht, und innerhalb welchen die Scheibe um die Axe sich drehen kann.

Man unterscheidet zwei Arten von Rollen: 1) die feste oder unbewegliche, 2) die lose oder bewegliche Rolle.

Eine Rolle heißt fest, wenn ihre Axe sich nicht bewegt, und führt, da sie häufig dazu dient, der Bewegung der Last eine besondere Richtung zu geben, den Namen „Leitscheibe" oder „Richtungsrolle". An dieser Rolle (Fig. 19) wirken Kraft und Last wie an einem gleicharmigen Hebel. C, der Durchgangspunkt der Axe,

ist der Stützpunkt, der Radius der Scheibe der Hebelarm. Gleichgewicht findet statt, wenn

$$P = L.$$

Diese Gleichung gilt, die Angriffspunkte der Kraft und Last mögen mit dem Stützpunkte in gerader Linie liegen oder nicht, da die Entfernung des Stützpunktes von jeder Richtung der Kraft der Radius ist. Wie aus der Gleichgewichtsbedingung ersichtlich, wird bei der festen Rolle keine Kraft gewonnen, jedoch läßt sich die Last mit größerer Bequemlichkeit in bestimmter Richtung bewegen, wie z. B. bei Bauten, bei Ziehbrunnen, bei Aufzügen u. s. w.

Eine Rolle heißt lose oder beweglich, wenn die Axe während der Drehung der Rolle in fortschreitender Bewegung sich befindet. Die Last wird hier mittelst des Klobens an der Rolle befestigt, das Seil mit dem einen Ende an irgend einem festen Punkte angeknüpft, unter der losen Rolle weggeführt und der bessern Leitung wegen noch um eine feste Rolle geschlagen, während an dem anderen Ende des Seiles die Kraft wirkt. Die Wirkung einer losen Rolle (Fig. 20) läßt sich auf die eines einarmigen Hebels zurückführen, dessen Arm BD und dessen Dreh- oder Stützpunkt B ist. Kraft und Last haben zum Angriffspunkte beziehungsweise D und C. Man erhält als Gleichgewichtsbedingung

$$P \,.\, BD = L \,.\, BC \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1$$

$$P = \frac{1}{2} L.$$

Die Last vertheilt sich demnach auf die Seilstücke a und b gleichmäßig und ist die Spannung derselben gleich groß.

Ist bei der losen Rolle die Richtung des Seiles nicht parallel der Richtung der Kraft, so nimmt der Kraftgewinn mit dem Parallelismus ab. Die Wirkung der losen Rolle ist in diesem Falle (Fig. 21) gleich der eines Winkelhebels CBA, dessen Stützpunkt B und dessen Hebelarme BA und BC sind. Gleichgewicht findet demnach statt, wenn

$$P \,.\, BE = L \,.\, BD \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2$$

oder da wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke ABE und CBD $BE : BD = AB : BC$

$$P \,.\, AB = L \,.\, BC \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3$$

$$P = L \,.\, \frac{r}{AB}.$$

Je kleiner AB wird, desto größer muß die Kraft sein, welche der Last das Gleichgewicht halten soll.

Die Potenzrolle.

§. 45.

Die Potenzrolle oder der Rollenzug (Fig. 22) ist eine Verbindung mehrerer, beweglicher Rollen mit einer festen Rolle in der Art, daß die an jeder wirkende Kraft für die zunächst darüber befindliche Rolle zur Last wird, und die um die Rollen geschlungenen Seile gewöhnlich parallele Richtungen haben.

Was die Wirkung einer solchen Potenzrolle anlangt, so wird jede lose Rolle zu einem einarmigen Hebel und ist die Spannung an dem Seile a_1 gleich der Hälfte der Last. Diese Spannung $\frac{1}{2}$ L ist Last an der zweiten losen Rolle und daher die Spannung am Seile $a_2 = \frac{1}{2}\, a_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\, L = \frac{1}{2^2}\, L$. In ähnlicher Weise ergibt sich für das Seil a_3 die Spannung $\frac{1}{2^3}$ L, und allgemein, wenn n lose Rollen verwendet werden, die Spannung für das Seil $a_n = \frac{1}{2^n} \cdot L$.

Der Flaschenzug.

§. 46.

Der Flaschenzug (Fig. 23) ist eine Verbindung mehrerer, in einem Kloben befindlicher losen Rollen (untere Flasche und gewöhnlich ebenso vieler, gleichfalls in einem Kloben befindlicher festen Rollen (obere Flasche) mittelst eines Seiles : der Art, daß das Seil abwechselnd um eine Rolle der beweglich unteren und eine Rolle der unbeweglichen oberen Flasche geführt . Die an dem beweglichen Kloben der unteren Flasche angebrachte Last wirkt auf alle bewegliche Rollen und vertheilt sich auf dieselben in gleicher Weise. Nun hat die Kraft P eigentlich nur der Spannung des Seiles a_1 das Gleichgewicht zu halten, welche bei n beweglichen Rollen gleich $\frac{1}{2n}$ L; weil einerseits auf jede bewegliche Rolle $\frac{1}{n}$ der

Last trifft, andererseits bei jeder losen Rolle die Kraft gleich der Hälfte der Last ist. Gleichgewicht findet demnach statt, wenn

$$P : L = 1 : 2n,$$

d. h. wenn die Kraft gleich ist der Last, getheilt durch die doppelte Anzahl der in der unteren Flasche befindlichen Rollen.

Das Wellrad.

§. 47.

Das Rad an der Welle (Fig. 24) ist eine kreisrunde Scheibe, welche an einer runden, um die gleiche Axe drehbaren Walze (Welle oder Wellbaum) befestigt ist. An den Enden des Wellbaumes sind cylindrische Zapfen angebracht, welche auf einer Unterlage ruhen, den sogenannten Zapfenlagern oder Pfannen. Auf dem Umfange der Welle wickelt sich ein Seil auf, an dem die Last hängt, an dem Umfange des Rades wirkt die Last. Das Wellrad kann in dieser Form als ein ungleicharmiger Hebel betrachtet werden, dessen längerer Arm der Radius des Rades, dessen kürzerer Arm der Radius der Welle ist, und tritt Gleichgewicht ein, wenn

$$P . R = L . r.$$

Ist die Welle horizontal, so führt das Wellrad den Namen „Haspel"; ist sie vertikal, so nennt man es Göppel oder Winde.

§. 48.

Ein Rad, auf dessen Umfange sich Vertiefungen und Erhöhungen in stets gleichem Abstande befinden, heißt ein gezahntes Rad, die Erhöhungen im Allgemeinen Zähne. Ist die Welle eines Zahnrades gleichfalls gezahnt, so nennt man dieselbe das Getriebe. Eine Verbindung von gezahnten Rädern (Fig. 25) in der Art, daß immer ein Rad der einen Welle in das Getriebe der nächsten eingreift, heißt Räderwerk.

Bei einem Räderwerke von drei Rädern A_1 A_2 A_3 hänge an dem Umfange der Welle des Rades A_3 die Last L, und am Umfange des Rades A_1 wirke die Kraft P; die Radien der drei gezahnten Räderpaare seien R_1 und r_1; R_2 und r_2; R_3 und r_3. Den Druck x,

welchen die Kraft P an der Welle des Rades A_1 ausübt, erhält man aus der Gleichung

$$x r_1 = P \cdot R_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1$$

den Druck y an der Welle des Rades A_2 aus der Gleichung

$$y \cdot r_2 = x \cdot R_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

$$y = x \cdot \frac{R_2}{r_2} = P \cdot \frac{R_1 R_2}{r_1 r_2} \quad \ldots\ldots \quad (3$$

Dieser Druck y hält aber der Last L das Gleichgewicht, und ist deßhalb

$$L \cdot r_3 = y \cdot R_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4$$

$$L = y \cdot \frac{R_3}{r_3} = P \frac{R_1 R_2 R_3}{r_1 r_2 r_3}$$

$$P = L \frac{r_1 r_2 r_3}{R_1 R_2 R_3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5$$

d. h. die Kraft verhält sich zur Last, wie das Produkt der Radien der Getriebe zum Produkte der Radien der Räder.

Die schiefe Ebene.

§. 49.

Die schiefe Ebene (Fig. 26) ist eine ebene Fläche, welche mit einer Horizontalebene einen spitzen Winkel bildet. Da ein Körper, den man auf die schiefe Ebene legt, nicht in Ruhe bleiben kann, weil sein Gesammtgewicht wegen der Neigung der schiefen Ebene zum Horizont von dieser nicht getragen wird, so muß irgend eine Kraft das Herabgleiten des Körpers verhindern.

Ist das Dreieck ABC der vertikale Längendurchschnitt einer schiefen Ebene, AB die Länge, BC die Basis, AC die Höhe derselben, α der Winkel der schiefen Ebene mit der Horizontalfläche (Böschungswinkel), s der Schwerpunkt des Körpers, L sein Gewicht, β der Winkel der Kraft P mit der schiefen Ebene, so hat man die Gleichgewichtsbedingung eines nicht vollkommen freien Körpers aufzustellen, auf den einerseits die im Schwerpunkte angreifende Schwerkraft L, anderseits die Kraft P wirkt. Soll Gleichgewicht bestehen, so muß nach §. 18 die Resultante eine zur schiefen Ebene senkrechte Richtung haben. In diesem Falle ist

$$P : L = \sin\alpha : \sin(R + \beta) \quad .\ .\ .\ . \quad (1$$
$$= \sin\alpha : \cos\beta$$
$$P = L\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}.$$

Je größer demnach $\cos\beta$ wird, desto geringere Kraft ist erforderlich.

Ist $\beta = 0$, d. h. wirkt die Kraft parallel der Länge der schiefen Ebene, so ist

$$P = L\sin\alpha$$

oder

$$P : L = AC : AB \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \quad (2$$

Ist $\beta = \alpha$, somit die Richtung der Kraft parallel zur Basis, so ist

$$P = L\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

oder

$$P : L = AC : BC \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \quad (3$$

Es verhält sich also die Kraft zur Last im ersteren Falle wie die Höhe der schiefen Ebene zur Länge, im letzteren Falle wie die Höhe zur Basis.

Die Schraube.

§. 50.

Denkt man sich mehrere schiefe Ebenen von gleicher Höhe (Fig. 27), deren Basis gleich dem Umfange eines geraden Cylinders ist, der Reihe nach so um letzteren gewickelt, daß die Basis der ersten mit dem Umfange der Basis des Cylinders zusammenfällt, die Basis der übrigen der Basis des Cylinders parallel sind, so entsteht eine Schraubenlinie. Jede einzelne Windung heißt Schraubengang, und der Abstand je zweier Gänge (Höhe der schiefen Ebenen) die Ganghöhe, oder Höhe des Schraubenganges. Ein biegsamer prismatischer Körper, welcher in der Richtung der Schraubenlinie um den Cylinder gelegt wird, heißt Schraubengewinde, und ein Schraubengewinde, welches auf einem Cylinder erhaben ausgearbeitet ist, führt den Namen „Schraubenspindel“. Um in der Mechanik dieselbe verwenden zu können, muß sie in einen hohlen Cylinder passen, die sogenannte Schraubenmutter, in welchem dieselben Schraubengänge vertieft angebracht sind. Beide, Schraubenspindel und Schraubenmutter bilden die Schraube, obwohl auch häufig die Spindel allein Schraube genannt wird.

Die Schraube kann als eine schiefe Ebene betrachtet werden, bei der die Kraft am Umfange der Schraube horizontal, also parallel der Basis der schiefen Ebene wirkt. Ist r der Radius der Spindel, also $2 r \pi$ die Basis der schiefen Ebene, so besteht Gleichgewicht, wenn

$$P : L = h : 2 r \pi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1$$

$$P = L \cdot \frac{h}{2 r \pi}.$$

Der Kraftgewinn ist demnach um so größer, je geringer die Ganghöhe und je größer der Radius der Spindel ist.

In den meisten Fällen wirkt die Kraft nicht unmittelbar an der Spindel selbst (Fig. 28), sondern an dem Ende eines Hebels, der parallel zur Basis an dem oberen Ende der Spindel, dem sogenannten Schraubenkopf befestigt ist. Ist l die Länge des Hebels, vom Mittelpunkt der Spindel bis zum Angriffspunkt der Kraft gerechnet, so ist die dadurch am Umfange hervorgebrachte Wirkung

$$P = \frac{l}{r} \cdot P_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2$$

wenn P_1 die am Ende des Hebels thätige Kraft ist. Setzt man diesen Werth als die Größe der am Umfange der Spindel thätigen Kraft in Gleichung (1) für P ein, so ergibt sich aus

$$\frac{l}{r} \cdot P_1 = L \cdot \frac{h}{2 r \pi}$$

oder $$P_1 : L = h : 2 l \pi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3$$

daß die Wirkung gerade so ist, als ob der Radius der Spindel = l wäre.

Eine Schraubenspindel, welche nur 3 bis 4 Gänge hat, sich blos um ihre Axe dreht, und deren Gewinde in die Zähne eines Rades oder einer Zahnstange eingreifen, heißt Schraube ohne Ende, weil dieselben Schraubengänge immer wieder von Neuem wirken.

Der Keil.

§. 51.

Der Keil (Fig. 28) ist ein dreiseitiges (meistens gleichschenkliges) Prisma, das mit einer Kante zwischen die Spalte eines Körpers

oder zwischen zwei Körper durch eine auf die dieser Kante gegenüberliegende Seite wirkende Kraft getrieben wird und dazu dient, einen Körper zu spalten, oder zwei Körper zu trennen. Jene Seitenfläche, auf welche die Kraft wirkt, nennt man den Rücken, die beiden anderen Flächen die Seiten, die von letzteren gebildete Kante die Schärfe oder Schneide des Keiles.

Je nach der Form heißt ein Keil einfach, wenn der Rücken mit der einen Seite einen rechten Winkel bildet, sonst doppelt; gleichschenklig, wenn die Grundflächen des Prisma gleichschenklige Dreiecke sind.

Den einfachen Keil kann man als bewegliche schiefe Ebene betrachten, und entspricht die Länge seiner Seite der Länge, der Rücken des Keiles der Höhe der schiefen Ebene; die Wirkung des doppelten Keiles läßt sich auf die Wirkung zweier schiefen Ebenen zurückführen, welche mit ihrer Basis zusammenstoßen.

Ist Δ ABC ein normaler Querschnitt eines doppelten gleichschenkligen Keiles, AC = BC die Seite, AB der Rücken, DC die Höhe des Keiles, so kann, während die Kraft unter allen Umständen senkrecht zum Rücken wirkt, der Widerstand entweder senkrecht zu den Seiten oder zur Höhe des Keiles wirken, je nachdem es sich darum handelt, einen Körper zu spalten oder zwei Körper zu trennen.

Wirkt der Widerstand L senkrecht zu den Seiten, muß also derselbe parallel mit der schiefen Ebene überwunden werden, so ist im Falle des Gleichgewichtes

$$P_1 : L = \frac{1}{2} AB : AC \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1$$

$$P_1 = L \cdot \frac{AB}{2\,AC},$$

und da der Widerstand zweimal vorhanden ist,

$$P = L \cdot \frac{AB}{AC} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2$$

d. h. die Kraft verhält sich zur Last wie der Rücken des Keiles zur Seite oder Länge desselben.

Wirkt der Widerstand senkrecht zur Höhe des Keiles, muß also derselbe parallel zur Basis der schiefen Ebene überwunden werden, so erhält man als Gleichgewichtsbedingung

$$P : L = AB : DC,$$

d. h. die Kraft verhält sich zur Last, wie der Rücken des Keiles zur Höhe.

Aus den beiden Gleichgewichtsbedingungen folgt, daß der Kraftgewinn um so größer ist, je spitzer der Keil ist, und je schmäler sein Rücken.

Die Gesetze des Keiles finden ihre Anwendung bei dem Gebrauche verschiedener Werkzeuge, z. B. der Hacken, Stemmeisen, Messer, Pflugschaaren, Nägel, Nadel 2c.

Dynamik.

§. 52.

Wenn ein starres Punktesystem unter dem Einflusse von Kräften steht, welche sich nicht das Gleichgewicht halten, so findet Bewegung statt. Die Gesetze aufzufinden, nach welchen Bewegung erfolgt, ist Aufgabe der Dynamik, und man bezeichnet deßhalb dieselbe kurzweg als die Lehre von der Bewegung.

Wenn die Wirkung einer Kraft, die einen Körper in Bewegung setzt, nur so kurze Zeit dauert, daß während derselben in der Lage des Körpers eine merkliche Veränderung nicht wahrnehmbar ist, so nennt man die Kraft momentan, außerdem continuirlich. Bleibt die Stärke einer continuirlichen Kraft durch die ganze Zeit der Bewegung gleich groß, so heißt die Kraft constant.

Die Bewegung eines Körpers ist entweder

1) **gleichförmig** oder
2) **ungleichförmig**.

Die ungleichförmige Bewegung kann sein

a) gleichförmig =
b) ungleichförmig beschleunigt oder verzögert.

Die Bewegung heißt gleichförmig oder ungleichförmig, je nachdem die Geschwindigkeit während der ganzen Dauer der Bewegung constant ist oder nicht, d. h. je nachdem in gleichen Zeiteinheiten gleiche oder ungleiche Wege zurückgelegt werden.

Die ungleichförmige Bewegung nennt man beschleunigt oder verzögert, je nachdem die Geschwindigkeit in den einzelnen Zeittheilchen zu= oder abnimmt. Läßt sich für die Zu= oder Abnahme der Geschwindigkeit ein bestimmtes Gesetz aufstellen, so nennt man die ungleichförmige Bewegung gleichförmig beschleunigt oder verzögert, außerdem ungleichförmig beschleunigt oder verzögert.

Bei jeder Bewegung hat man die zwischen Raum, Zeit, Geschwindigkeit und Kraft bestehenden Beziehungen zu bestimmen.

Gleichförmige Bewegung.

§. 53.

Die ganze Lehre der gleichförmigen Bewegung ist in der Gleichung enthalten

$$s = v \cdot t$$

worin s den in der Zeit t zurückgelegten Weg, v die constante Geschwindigkeit, d. i. den Weg bezeichnet, welchen der Körper in jeder Zeiteinheit zurücklegt.

Werden einem Körper mehrere Bewegungen nach verschiedenen Richtungen ertheilt, so hat, was in der Statik über Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte bewiesen wurde, auch seine Geltung in Bezug auf die Geschwindigkeiten, da sich die Geschwindigkeiten verhalten, wie die wirkenden Kräfte.

Gleichförmig beschleunigte und verzögerte Bewegung.

§. 54.

Eine Kraft, welche stetig wirkt mit gleicher Intensität, erzeugt in jeder folgenden Zeiteinheit eine gleich große Zunahme an Geschwindigkeit und mithin eine gleichförmig beschleunigte Bewegung. Die Zunahme der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit nennt man Beschleunigung.

Ist g die Beschleunigung, v die nach der Zeit t erlangte Geschwindigkeit, so ist, wenn der Körper vom Zustande der Ruhe ausgeht, die Geschwindigkeit nach der ersten Zeiteinheit (Sekunde) g, nach der zweiten Sekunde 2 g, nach 3 Sekunden 3 g, also nach t Sekunden gt; folglich ist

$$v = gt \quad \ldots\ldots \quad (1$$

$$t = \frac{v}{g} \quad \ldots\ldots \quad (2$$

$$g = \frac{v}{t} \quad \ldots\ldots \quad (3$$

Besitzt der Körper, bevor die beschleunigende Kraft auf ihn einwirkt, in einer mit der Richtung der beschleunigenden Kraft übereinstimmenden Richtung die constante Geschwindigkeit a, so ist nach t Sekunden

$$v = a + gt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4$$

Um den in t Sekunden zurückgelegten Weg s zu finden, geht man von der Bestimmung des Weges in der ersten Sekunde aus. Denkt man sich die Sekunde in n gleiche Theile zerlegt und n möglichst groß, so kann man die Bewegung während dieser kleinsten Zeittheilchen um so mehr als gleichförmig betrachten, je größer man n nimmt. Bewegt sich nun der Körper in der ersten Sekunde mit einer constanten Geschwindigkeit, welche gleich ist dem arithmetischen Mittel aus Anfangs- und Endgeschwindigkeit, so würde er in der ersten Hälfte der Sekunde gerade so viel Weg mehr zurücklegen, als er in der zweiten Hälfte weniger zurücklegt im Vergleich zu dem Weg, den er mit gleichförmiger Beschleunigung wirklich durchläuft. Der in der ersten Sekunde beschriebene Weg ist demnach bei einer Anfangsgeschwindigkeit Null $\frac{0+g}{2}$. Bestimmt man den Weg in den folgenden Sekunden in gleicher Weise und stellt die gewonnenen Resultate zusammen, so ist

$$\begin{aligned}
s &= \frac{0+g}{2} + \frac{g+2g}{2} + \frac{2g+3g}{2} + \ldots\ldots + \frac{(t-1)g+tg}{2} \\
&= \frac{g}{2} + \frac{3g}{2} + \frac{5g}{2} + \ldots\ldots + \frac{(2t-1)g}{2} \\
&= \frac{g}{2}\Big(1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + (2t-1)\Big)
\end{aligned}$$

$$s = \frac{gt^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5$$

Hatte der Körper beim Beginne der Wirkung der continuirlichen Kraft bereits die Geschwindigkeit a, so durchläuft er vermöge der ersteren in t Sekunden den Weg $\frac{gt^2}{2}$, unter dem Einflusse der momentanen Kraft den Weg at, und ist, wenn die Richtungen beider Kräfte die gleichen sind,

$$s = at + \frac{gt^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6$$

Bei der gleichförmig verzögerten Bewegung nimmt die Geschwindigkeit stetig ab. Betrachtet man diese Geschwindigkeitsabnahme als eine negative Zunahme, so erhält man, wenn in den Gleichungen (4) und (6) $-g$ statt $+g$ gesetzt wird, für diese Art der Bewegung

$$v = a - gt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7$$

$$s = at - \frac{gt^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8$$

Freier Fall der Körper.

§. 55.

Zu den gleichförmig beschleunigten Bewegungen wird der freie Fall der Körper gerechnet. Nimmt auch die Schwerkraft, die Ursache des Fallens, erfahrungsgemäß mit dem Quadrate der Entfernung vom Erdmittelpunkte ab, so sind doch die Wege, welche hier in Betracht kommen, verschwindend klein gegen die Größe des Erdhalbmessers, und kann man die Schwere als eine Kraft betrachten, welche continuirlich mit gleicher Stärke wirkt. Aus diesem Grunde sind auch die Gesetze des freien Falles in den beiden Gleichungen enthalten

$$v = gt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1$$

$$s = \frac{gt^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

und wird als Werth für g angenommen 9·81 m.

Verbindet man die Gleichungen (1) und (2), so erhält man

$$v = \sqrt{2gs} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3$$

$$s = \frac{v^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4$$

Da für die Zeit t_1

$$s_1 = \frac{g{t_1}^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5$$

so verhalten sich die Fallhöhen wie die Quadrate der Zeiten.

Fall auf der schiefen Ebene.

§. 56.

Befindet sich ein Körper auf einer schiefen Ebene, so kann sich derselbe nicht in der Richtung der Schwerkraft bewegen; ein Theil seiner Schwere wird durch den Widerstand der Ebene aufgehoben, und erfolgt die Bewegung abwärts nur in Folge der Einwirkung des andern Theiles der Schwere, der, weil constant, stetig wirkt wie eine zur schiefen Ebene parallele Kraft. Wie aus der Statik bekannt, ist diese Kraft $P = L \sin \alpha$. Da die Kräfte proportional sind ihren Wirkungen, also auch den Beschleunigungen, welche sie den Körpern ertheilen, so ist

$$P : L = g_1 : g$$

$$\sin \alpha : 1 = g_1 : g$$

$$g_1 = g \sin \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1$$

Setzt man nun in die für die gleichförmig beschleunigte Bewegung geltenden Gesetze $g \sin \alpha$ statt g, so wird

$$v = g \sin \alpha \,.\, t = gt \,.\, \sin \alpha \quad \ldots\ldots \quad (2$$

$$s = \frac{g \sin \alpha \, t^2}{2} = \frac{gt^2}{2} \sin \alpha \quad \ldots\ldots \quad (3$$

§. 57.

I. Wenn ein Körper auf einer schiefen Ebene von der Länge l herabfällt, so ist seine Endgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2g \,.\, \sin \alpha \,.\, l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1$$

oder, wenn man für $\sin \alpha$ den trigonometrischen Werth $\frac{h}{l}$ einführt

$$v = \sqrt{2g \,.\, h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

Aus Gleichung (2) folgt, daß ein Körper beim Falle auf einer schiefen Ebene eine Endgeschwindigkeit erlangt, welche gleich ist der Geschwindigkeit, welche er beim freien Falle erlangen würde, wenn die Fallhöhe gleich ist der Höhe der schiefen Ebene. Da ferner die Gleichung (2) unabhängig ist von dem Neigungswinkel, also auch von der Länge der schiefen Ebene, so erlangen die Körper auf schiefen Ebenen von beliebigen Längen und gleicher Höhe dieselbe Endgeschwindigkeit.

II. Ist ABC (Fig. 29) der normale Durchschnitt einer schiefen Ebene, AC die Länge, AB die Höhe derselben, und zieht man $BD \perp AC$, so ist, wenn t und t_1 die Zeit ist, innerhalb welcher ein Körper beziehungsweise von A bis B und D fällt

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot AD}{g \sin \alpha}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4$$

und weil $AD = h \sin \alpha$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5$$

also $$t = t_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6$$

d. h. ein Körper durchläuft auf der schiefen Ebene in der nemlichen Zeit einen Weg gleich der Projektion der Höhe auf die schiefe Ebene, in der er beim freien Falle die Höhe zurücklegt.

III. Zieht man in einem Kreise (Fig. 30) von den Endpunkten A und B des vertikalen Durchmessers AB die Sehnen AC und BD, so kommt ein Körper ebenso schnell von A nach C und D nach B als von A nach B, weil AC und BD die Projektionen der Höhe AB sind beziehungsweise auf die schiefen Ebenen AE und FB. Da das Gleiche gilt für jede andere durch A oder B gezogene Sehne, so durchläuft ein Körper alle Sehnen, die durch die Endpunkte eines vertikalen Durchmessers gehen, in gleicher Zeit (isochron).

Senkrechter Wurf.

§. 58.

Wird ein Körper durch irgend eine momentan wirkende Kraft vertikal aufwärts geworfen, so wirkt auf ihn die Schwerkraft stetig ein in gleicher aber entgegengesetzter Richtung, und es entsteht deßhalb eine gleichförmig verzögerte Bewegung.

Bezeichnet man mit a die Anfangsgeschwindigkeit, so wird diese nach der ersten Sekunde nur noch $a - g$, nach der zweiten Sekunde $a - 2g$, also nach t Sekunden

$$v = a - gt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1$$

In t Sekunden hätte der Körper den Weg at zurückgelegt, wenn er allein der Wurfkraft hätte folgen können, allein vermöge der ihr entgegengesetzt wirkenden Anziehungskraft der Erde ist dieser Weg um $\frac{gt^2}{2}$ vermindert worden, so daß nach t Sekunden der wirklich zurückgelegte Weg

$$s = at - \frac{gt^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

Der Körper bewegt sich so lange aufwärts, bis $v = 0$ wird, also

$$t = \frac{a}{g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3$$

Für diesen Werth von t wird

$$s_1 = \frac{a^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4$$

Von dem Augenblicke an, in welchem die Geschwindigkeit gleich Null geworden, wird der Körper anfangen zu fallen und hat nun den Weg $\frac{a^2}{2g}$ zurückzulegen. Dazu braucht er die Zeit

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s_1}{g}} = \sqrt{\frac{2a^2}{2g^2}} = \frac{a}{g} \quad \ldots\ldots \quad (5$$

und erlangt die Endgeschwindigkeit

$$v_1 = \sqrt{2g \cdot s_1} = \sqrt{2g \cdot \frac{a^2}{2g}} = a \quad \ldots \quad (6$$

d. h. ein Körper braucht ebenso lange zum Steigen als zum Fallen und erlangt beim freien Falle von einer bestimmten Höhe s genau wieder dieselbe Geschwindigkeit, welche ihm eine momentane Kraft ertheilen müßte, um die gleiche Höhe zu erreichen.

Krummlinige Bewegung im Allgemeinen.

§. 59.

Wirken auf einen Körper zwei momentane oder zwei continuirliche Kräfte, so wird sich derselbe in gerader Richtung bewegen, da man in beiden Fällen die Wirkung auf die einer einzigen Kraft zurückführen

kann, welche immer nur eine geradlinige Bewegung verursacht. Soll Bewegung in einer krummen Linie erfolgen, so muß auf einen durch eine momentane Kraft in Bewegung gesetzten Körper eine stetige Kraft wirken und zwar in einer Richtung, welche von der Richtung der momentanen Kraft verschieden ist.

Hat nemlich ein Körper im Punkte A die Geschwindigkeit AB (Fig. 31) und zugleich in der Richtung AX die Geschwindigkeit AC, so kommt er in einer Sekunde nach D. In der nächsten Sekunde würde er wegen des Beharrungsvermögens in der Richtung von AD den Weg DE = AD zurücklegen. Wird ihm nun neuerdings im Punkte D in der Richtung von DY die Geschwindigkeit DF ertheilt, so ist er am Ende der zweiten Sekunde in G angelangt u. s. w. In Folge dessen wird der Körper die gebrochene Linie ADGK beschreiben. Nimmt man nun an, daß die zweite Kraft nicht stoßweise am Anfange einer jeden Sekunde, sondern continuirlich wirkt, so wird der Körper in jedem Augenblicke die Richtung ändern, welche er im unmittelbar vorausgehenden Augenblicke eingeschlagen hat, und der Weg eine krumme Linie werden.

Von dem Verhältnisse der momentanen und continuirlichen Kraft sowie von den Richtungen, in welchen sie wirken, wird die Beschaffenheit der krummen Linie abhängen.

Horizontaler Wurf.

§. 60.

Wird ein Körper in der Entfernung e von der Oberfläche der Erde in horizontaler Richtung abgeworfen (Fig. 32), so wirkt auf ihn ein 1) die Wurfkraft in der Richtung von AX, 2) die Schwerkraft in der Richtung von AY. Ist AB = BC = CD = u. s. w. die horizontale Geschwindigkeit, so wird sich der Körper nach Ablauf der einzelnen Sekunden nach und nach in b, c, d, welche beziehungsweise in vertikaler Richtung um $\frac{g}{2}$ unter B, um $\frac{g}{2} \cdot 2^2$ unter C, um $\frac{g}{2} \cdot 3^2$ unter D liegen, sich befinden, und seine Bahn die krumme Linie Abcd sein. Der Körper wird demnach nach der Seite hin, wohin ihn die Wurfkraft treibt, soweit gelangen, als er gekommen

wäre nur unter dem Einflusse der Wurfkraft, dabei aber so tief unter seine ursprüngliche Höhe herabsinken, als ob er allein der Einwirkung der Schwere folgen würde.

Bezeichnet man mit x den Weg, den der Körper in horizontaler Richtung, mit y den Weg, den er im freien Falle in der Zeit t zurücklegt, so kann man mit Hilfe der beiden Gleichungen

$$x = vt \ldots\ldots\ldots \quad (1$$

$$y = \frac{gt^2}{2} \ldots\ldots\ldots \quad (2$$

genau die Stelle der Bahn finden, in welcher der Körper sich in einer beliebigen Zeit t befindet.

Führt man aus Gleichung (2) den Werth von t in Gleichung (1) ein, so erhält man

$$x^2 = \frac{2v}{g} \cdot y \ldots\ldots \quad (3$$

eine Gleichung, welche, unabhängig von t, die Gestalt der Bahn oder die Natur der krummen Linie erkennen läßt. Man nennt eine solche krummlinige Bahn eine Parabel.

Schiefer Wurf.

§. 61.

Wenn ein Körper in der Richtung AP, welche mit dem Horizont AX den Winkel α bildet, mit einer Anfangsgeschwindigkeit AB von A aus abgeworfen wird (Fig. 33), so würde er wegen der Trägheit den Weg ABCD.... beschreiben, allein in Folge der gleichzeitigen Einwirkung der Schwerkraft wird er sich am Ende der einzelnen Sekunden in b, c, d ... befinden, die vertikal um $\frac{g}{2}$ unter B, $\frac{g}{2} \cdot 2^2$ unter C u. s. w. liegen. Zerlegt man die Anfangsgeschwindigkeit AB = a in eine horizontale und vertikale Componente, welche beziehungsweise mit AX und AY zusammenfallen, so erhält man in

$$x = at\cos\alpha \ldots\ldots\ldots \quad (1$$

$$y = at\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \ldots\ldots \quad (2$$

die Wege, welche der Körper in der Zeit t allein mit der horizontalen oder vertikalen Geschwindigkeit zurücklegen würde, und in

$$v = a \sin\alpha - gt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3$$

die Geschwindigkeit v, welche der Körper in der Zeit t in vertikaler Richtung besitzt.

Es wird nun ein Zeitpunkt eintreten, in welchem diese Geschwindigkeit gleich Null wird, also

$$a \sin\alpha = gt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4$$

und von diesem Augenblicke an wird der Körper vermöge der Schwere sich dem Horizonte wieder nähern. Der Punkt M, in welchem dieses geschieht, ist offenbar der höchste Punkt der Bahn, und seine senkrechte Entfernung von dem Horizonte nennt man die Wurfhöhe.

Erreicht der Körper in N den Horizont, so wird in diesem Augenblicke $y = 0$, also

$$at_1 \sin\alpha = \frac{gt_1^2}{2} \text{ oder}$$

$$2a \sin\alpha = gt_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5$$

und nennt man die gerade Linie AN die Wurfweite.

Vergleicht man Gleichung (5) mit Gleichung (4), so erkennt man, daß die Zeit, welche der Körper braucht, um die ganze Bahn zu durchlaufen, doppelt so groß ist, als die Zeit, in der er die größte Entfernung vom Horizont erreicht.

Durch Verbindung der Gleichungen (1) und (5) erhält man die Wurfweite

$$x = a \cdot \cos\alpha \cdot \frac{2a \sin\alpha}{g} = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{g} \quad \ldots\ldots \quad (6$$

Durch Verbindung der Gleichungen (2) und (4) die Wurfhöhe

$$y = a \cdot \sin\alpha \cdot \frac{a \cdot \sin\alpha}{g} - \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{a \sin\alpha}{g}\right)^2$$

$$y = \frac{a^2 \sin^2\alpha}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7$$

Weil $\sin\alpha$ den größten Werth erhält, wenn $\alpha = 90^0$, so erreicht die Wurfweite ihren größten Werth, wenn $\alpha = 45^0$, die Wurfhöhe beim vertikalen Wurf. Berücksichtigt man ferner, daß $\sin(R + \beta)$ gleich $\sin(R - \beta)$, so ergibt sich, daß die Wurfweite die nemliche ist, ob $\alpha = 45^0 + \beta$ oder $45^0 - \beta$, daß man also bei Elevations-

winkeln, welche sich zu einem R ergänzen, die gleiche Wurfweite erzielt. Durch Elimination von t aus den Gleichungen (1) und (2) erhält man in

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2a^2 \cos^2 \alpha} x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (8$$

die Gleichung der Bahn des geworfenen Körpers, und ist diese Bahn gleichfalls eine Parabel.

Anmerkung: Der Luftwiderstand, welcher bei Aufstellung der Gleichungen nicht berücksichtigt wurde, verändert die gewonnenen Resultate, da durch Einwirkung derselben die horizontale Geschwindigkeit beständig vermindert und ebenso die Bewegung in vertikaler Richtung verändert wird. Die Bahn des Körpers wird in der Wirklichkeit keine Parabel, sondern die sogenannte ballistische Kurve beschreiben, bei welcher der Theil der Bahn von der höchsten Höhe bis zum Horizont kürzer und steiler ist, als der Theil, in welchem der Körper aufsteigt.

Centralbewegung und die Kepler'schen Gesetze.

§. 62.

Wenn auf einen Körper, welcher sich in geradliniger Bewegung befindet, von einem festen Punkte aus, der nicht in der Richtung der momentanen Kraft liegt, welche jene Bewegung veranlaßte, eine Kraft continuirlich wirkt, so entsteht eine Centralbewegung. Beide Kräfte führen den Namen „Centralkräfte." Die momentane Kraft heißt auch Tangentialkraft, weil sie den Körper nach einer geraden Linie fortzubewegen sucht, welche eine Tangente der Bahn ist, die continuirlich wirkende Kraft Centripetalkraft. Ist O der anziehende Mittelpunkt der Centripetalkraft (Fig. 34) und in A ein beliebiger, angezogener Körper, so würde derselbe sehr bald mit dem Centralkörper sich vereinigen, wenn nicht die Tangentialkraft vorhanden wäre, welche ihn in der Richtung von AX zu bewegen suchte. In ähnlicher Weise, wie in vorausgehenden Paragraphen läßt sich darthun, daß der Körper die Bahn ADGK .... durchläuft, und daß diese Bahn eine krumme Linie sein muß.

Eine derartige Bewegung ist die Bewegung der Planeten um die Sonne, als deren Ursache zuerst Newton (1642—1727) die allgemeine Schwere nachgewiesen hat. Die Beobachtung, daß die Bahnen der Planeten Ellipsen sind, in deren einem Brennpunkte die Sonne

steht, verdanken wir Kepler (1571—1631); dieses ist das erste Kepler'sche Gesetz.

Das zweite Kepler'sche Gesetz: „Der Radius Vector (die Verbindungslinie des Centralpunktes mit einem Punkte der Bahn) legt in gleichen Zeiten gleiche Räume zurück", ergibt sich aus der Gleichheit der △ △ AOD = DOE = DOG (gleiche Grundlinie und gleiche Höhe).

Um das dritte Kepler'sche Gesetz: „Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die dritten Potenzen der mittleren Entfernungen von der Sonne", zu beweisen, nehmen wir an, daß die Bahnen der Planeten kreisförmig sind. In diesem Falle muß die Bewegung eine gleichförmige sein, weil die in den einzelnen Zeiteinheiten beschriebenen Kreisbögen sich verhalten wie die zu ihnen gehörigen Sektoren, also auch wie die Zeiten, so daß in gleichen Zeiten gleiche Bögen zurückgelegt werden.

Sind r und r_1 die Entfernungen, v und v_1 die Geschwindigkeiten, t und t_1 die Umlaufszeiten zweier Planeten, so ist

$$vt = 2r\pi \text{ und } v_1 t_1 = 2r_1\pi,$$

also

$$t^2 = \frac{4r^2\pi^2}{v^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1$$

$$t_1^2 = \frac{4r_1^2\pi^2}{v_1^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2$$

$$t^2 : t_1^2 = \frac{r^2}{v^2} : \frac{r_1^2}{v_1^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3$$

Da nun durch Erfahrung und Rechnung nachgewiesen ist, daß die Quadrate der Geschwindigkeiten sich umgekehrt verhalten wie die Entfernungen, also

$$v^2 : v_1^2 = r_1 : r \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4$$

so erhält man durch Einführen des Werthes $\frac{v^2}{v_1^2}$ in Gleichung (3)

$$t^2 : t_1^2 = \frac{r^2}{r_1} : \frac{r_1^2}{r},$$

oder

$$t^2 : t_1^2 = r^3 : r_1^3 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5$$

Centrifugal- oder Schwungkraft bei der kreisförmigen Centralbewegung.

§. 63.

Ein jeder Körper erlangt bei der Bewegung um einen Centralkörper ein Bestreben, sich von demselben zu entfernen, und dieses Bestreben nennt man Centrifugal- oder Schwungkraft. Der Centrifugalkraft wirkt die Centripetalkraft entgegen und beide müssen bei der kreisförmigen Bewegung einander gleich sein.

Ist nemlich ACG die kreisförmige Bahn eines Körpers (Fig. 35), AB und AD die Geschwindigkeit beziehungsweise unter dem Einflusse der Tangential- und Centripetalkraft, so ist AC der Weg, den der Körper in der Zeiteinheit wirklich zurücklegt. Betrachtet man die Tangentialgeschwindigkeit AB als die Resultante der beiden Geschwindigkeiten AF und AC, von denen AF gleich und entgegengesetzt AD, so müssen AF und AD sich das Gleichgewicht halten. Die Geschwindigkeit AF läßt sich aber als die Wirkung einer besonderen Kraft auffassen, welche der Centripetalkraft gleich und entgegengesetzt ist, und nennt man diese Kraft Centrifugal- oder Schwungkraft.

Soll P_1, die Größe der Centrifugalkraft, bestimmt werden, so ergibt sich dieselbe aus

$$P_1 : P = g_1 : g$$

$$P_1 = g_1 \cdot \frac{P}{g} = g_1 \cdot M \quad \ldots \quad (1$$

weil der Druck P_1 den ein Körper vermöge der Centrifugalkraft ausübt, sich zum Gewichte des Körpers, welches in Bewegung gesetzt wird, verhält wie die Beschleunigungen, welche sie ertheilen, und weil $\frac{P}{g}$ gleich M, der Masse des Körpers, ist.

Da die Centrifugalkraft gleich ist der Centripetalkraft, und letztere continuirlich wirkt, so ist

$$g_1 = 2 \cdot AF \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2$$

also

$$P_1 = 2AF \cdot M \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3$$

Nimmt man nun die Zeiteinheit möglichst klein an, so daß man die Sehne AC mit dem Bogen AC zusammenfallend und AF sowohl als

AD als gerade Linien betrachten kann, so ist, wenn man die Geschwindigkeit AC mit v bezeichnet,

$$AF = \frac{v^2}{2R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4$$

und mithin

$$P_1 = \frac{M \, . \, v^2}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5$$

Die Centrifugal- und Centripetalkraft ist demnach der Masse des Körpers und dem Quadrate der Geschwindigkeit direkt, dem Radius der Bahn indirekt proportional.

Ist t die Umlaufszeit des Körpers, also $v \, . \, t = 2\pi \, . \, R$, so wird, wenn man $v = \frac{2\pi \, . \, R}{t}$ in die Gleichung (5) einführt

$$P_1 = \frac{4\pi^2 R}{t^2} \, . \, M \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6$$

Schwingen zwei Körper von gleicher Masse und in derselben Zeit, aber mit verschiedenem Bahnradius, um denselben Mittelpunkt oder dieselbe Axe, so verhält sich

$$P : P_1 = R : R_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7$$

Dieser Fall tritt ein bei der Bewegung der Erde um ihre Axe und folgt aus Gleichung (7), daß die Centrifugalkraft vom Aequator gegen die Pole hin abnimmt.

Das Pendel.

§. 64.

Hängt man einen Körper mittelst einer Stange oder eines Fadens so auf, daß er sich in einer vertikalen Ebene bewegen kann, so nennt man eine derartige Vorrichtung ein Pendel. Kann man das Gewicht des Fadens als verschwindend klein betrachten, so nennt man das Pendel ein mathematisches, außerdem physisches Pendel. Die Entfernung des Aufhänge- oder Drehpunktes von dem schweren Punkte des mathematischen Pendels nennt man Länge des Pendels. So läßt sich z. B. eine kleine Kugel an einem sehr feinen Faden, dessen Länge den Durchmesser der Kugel bedeutend übertrifft, ohne merklichen

Fehler als ein mathematisches Pendel ansehen. Die nachfolgenden Entwicklungen gelten zunächst nur für das mathematische Pendel.

Ist O der Aufhängepunkt, A der einzige schwere Punkt des mathematischen Pendels OA (Fig. 36), so wird im Zustande der Ruhe der Punkt A sich vertikal unter O befinden. Bringt man das Pendel aus der Gleichgewichtslage OA in die Lage OB, so wird es auf dem Kreisbogen BA herabgleiten und mit der in A erlangten Geschwindigkeit wegen des Beharrungsvermögens von A aus bis nach C sich weiter bewegen. Der Bogen AC muß aber gleich dem Bogen BA sein, weil auf dem Wege von A nach C die Geschwindigkeit durch die Schwere genau in umgekehrter Ordnung vermindert wird, wie sie durch dieselbe auf dem Wege von B nach A vermehrt wurde. Die Bewegung von B nach C heißt eine Schwingung oder Oscillation, der Winkel BOA der Ausschlagswinkel oder Amplitude; die Zeit, welche der Pendel zu einer ganzen Schwingung braucht, Schwingungsdauer oder Schwingungszeit.

§. 65.

Hat ein Pendel den Ausschlagswinkel $BOA = 2\alpha$, und zerlegt man die Beschleunigung g der in B wirkenden Schwerkraft in die zwei Seitenkräfte BD und BE, von denen die erstere ihrer Richtung nach mit OB zusammenfällt, während letztere in der Richtung der Tangente in B wirkt, so wird die Wirkung von BD durch den Widerstand des Aufhängepunktes aufgehoben und bleibt nur $BE = g_1$ als wirkende Kraft übrig. Da Winkel BFE gleich 2α, so ist

$$BE = g_1 = g \sin 2\alpha.$$

Weil bei sehr kleinen Winkeln statt der Sinus die Bogen gesetzt werden können, also

$$g_1 = g \cdot 2\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1$$

so läßt sich der Weg s, den das Pendel in dem sehr kleinen Zeittheilchen t zurücklegt, durch die Gleichung ausdrücken

$$s_1 = \frac{g \cdot 2\alpha}{2} \cdot t^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2$$

Hat das Pendel den Ausschlagswinkel α, so findet man für die Zeit t in analoger Weise

$$s_2 = \frac{g \cdot \alpha}{2} \cdot t^2 \ldots\ldots\ldots \quad (3$$

also $$s_1 = 2\, s_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4$$

Daraus folgt, daß für kleine Ausschlagswinkel (bis 4°) die Schwingungsdauer unabhängig ist von der Größe des Ausschlagswinkel.

Schwingungsdauer des Pendels.

§. 66.

Entwickelt man den Bogen BAC, den der schwere Punkt des Pendels in einer gewissen Zeit durchläuft, in die gerade Linie $B_1 A_1 C_1$ (Fig. 37ᵃ und 37ᵇ) und stellt sich vor, es bewege sich auf dieser geraden Linie ein Körper so, daß seine Geschwindigkeit in jedem Punkte der Bahn gleich ist der Geschwindigkeit des schweren Punktes an der entsprechenden Stelle des Bogens BAC, so wird die Zeit, welche der Körper zu seiner Bewegung braucht, genau gleich sein der Oscillationsdauer des Pendels.

Um für diese Zeit einen bestimmten Werth zu erhalten, möge sich ein zweiter Körper auf dem Halbkreis über $B_1 A_1 C_1$ von B_1 nach C_1 mit einer constanten Geschwindigkeit bewegen. Wählt man diese constante Geschwindigkeit so, daß ihre horizontale Componente in einem beliebigen Punkte des Halbkreises übereinstimmt mit der Geschwindigkeit des ersten Körpers an der Stelle der geraden Linie $B_1 C_1 A_1$, welche mit der Projektion dieses Punktes zusammenfällt, so werden beide Körper, wenn sie gleichzeitig den Punkt B_1 verlassen, auch ihre Bahn gleichzeitig durchlaufen. Bestimmt man deßhalb die Zeit, in welcher der zweite Körper auf dem Halbkreis von B_1 nach C_1 kommt, so erhält man mit dieser Zeitdauer die Schwingungsdauer des Pendels.

Wenn das Pendel von B bis E herabfällt, so erlangt es eine Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2g \cdot DF}$$

oder da $DF = AD - AF$

$$AD = \frac{AB^2}{2l} \text{ und } AF = \frac{AE^2}{2l}$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{l} \cdot (AB^2 - AE^2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1$$

wenn die Pendellänge OA gleich l gesetzt wird.

Nimmt man nun an, daß der Körper sich auf dem Halbkreise bewegt mit der Geschwindigkeit, welche der schwere Punkt auf dem Bogen BAC in A erreicht, nemlich $\sqrt{2g \,.\, AD}$ oder $AB\sqrt{\frac{g}{l}}$, so ist im Punkte J seine Geschwindigkeit JG, und da diese der Annahme nach gleich $AB\sqrt{\frac{g}{l}}$, die horizontale Componente

$$JH = AB \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \sin JGH$$

$$= AB\sqrt{\frac{g}{l}} \sin JA_1E_1$$

$$= AB\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \frac{JE_1}{A_1J}$$

$$= AB\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \frac{\sqrt{A_1B_1{}^2 - A_1E_1{}^2}}{A_1B_1}$$

und, da $A_1B_1 = AB$ und $A_1E_1 = AE$

$$JH = AB \cdot \sqrt{\frac{g}{l}(AB^2 - AE^2)} \quad \ldots\ldots \quad (2$$

Weil E_1 die Projektion von J auf $B_1A_1C_1$ und $B_1E_1 = BE$, so folgt

$$JH = v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3$$

Ist t die Zeit, in welcher der Körper auf dem Halbkreis von B_1 nach C_1 kommt, so ist

$$t \cdot AB \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} = AB \cdot \pi$$

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4$$

Die Schwingungsdauer des Pendels ist demnach $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Mit Hilfe der höheren Mathematik findet man genauer

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \alpha^2\right) \ldots\ldots\ldots \quad (5$$

in welcher Gleichung α den Ausschlagswinkel bezeichnet.

Da für ein Pendel von der Länge l_1 die Schwingungsdauer

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{l_1}{g}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6$$

so folgt

$$t^2 : t_1^2 = l : l_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7$$

d. h. die Quadrate der Schwingungszeiten verhalten sich wie die Pendellängen.

Macht das erste Pendel n Schwingungen in der Zeit T, das zweite Pendel n_1 Schwingungen in derselben Zeit T, ist also $t = \frac{T}{n}$ und $t_1 = \frac{T}{n_1}$, so ergibt sich

$$n_1^2 : n^2 = l : l_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8$$

d. h. die Quadrate der Schwingungszahlen verhalten sich umgekehrt wie die Pendellängen.

Mit Hilfe des Pendels erhält man mit großer Genauigkeit die Beschleunigung durch die Schwere.

Setzt man in Gleichung (4) $t = 1$, so erhält man die Länge des Sekundenpendels.

Hat ein Sekundenpendel an einem Orte der Erdoberfläche die Länge l, an einem andern Orte die Länge l_1, so folgt aus

$$\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{l_1}{g_1}}$$

$$l : l_1 = g : g_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9$$

Die Länge des Sekundenpendels nimmt demnach mit der Beschleunigung in demselben Verhältnisse zu oder ab.

Neunzehnter

Jahres-Bericht

der

Wiener Communal-Oberrealschule

im

ersten Gemeinde-Bezirke

Schottenbasteigasse 7 (ehemals Rossau, Grünethorgasse 7)

für

das Schuljahr 1879—80.

WIEN.

Druck von Carl Gerold's Sohn. — Im Selbstverlage der Oberrealschule.

1880.

Neunzehnter

Jahres-Bericht

der

Wiener Communal-Oberrealschule

im

ersten Gemeinde-Bezirke

Schottenbasteigasse 7 (ehemals Rossau, Grünethorgasse 7)

für

das Schuljahr 1879—80.

INHALT:

WIEN.

Druck von Carl Gerold's Sohn. — Im Selbstverlage der Oberrealschule.

1880.

Die Grundbegriffe der Mechanik

und

ihre Entwicklung.

Alles Beweisen führt auf Axiome zurück, die der Ableitung nicht bedürftig und auch nicht zugänglich sind. Die Grundsätze der Geometrie sind die bekanntesten Beispiele dieser Art. — Wissenschaften aber, die nicht bloß räumliche oder abstracte Vorstellungen erwecken, sondern die volle Wirklichkeit, d. h. Materie und Kraft zum Gegenstande haben, beruhen als solche nicht auf selbstverständlichen Einsichten, sondern auf einfachen, nicht mehr weiter zerlegbaren Thatsachen der Natur. Die ersten Principien werden hier also aus dem Gebiete der Thatsachen, nicht aber aus bloßem Gedankenstoff genommen. Nicht Grundformen des Denkens, sondern Elemente des Naturverhaltens sind in der Naturwissenschaft die eigentlichen Axiome.

Letztere werden aus den Mannigfaltigkeiten der Naturthätigkeit durch Beobachtung, experimentelle Zerlegung und Schlussfolgerungen ausgeschieden und so in ihrer Einfachheit sichtbar gemacht.

A. Bewegung.

Zu den ersten und einfachsten Veränderungen in der Körperwelt gehören die Ortsveränderungen. Indem wir Ortsveränderungen unter einander vergleichen, so bietet uns zunächst die Bewegungsrichtung ein Unterscheidungsmerkmal. Richtung ist wieder einer der Fundamental-Begriffe, die wir aus der unmittelbaren Anschauung haben und nicht mehr weiter durch andere erklären können. Wir versinnlichen uns dieselbe durch die gerade Linie. Sehen wir eine Bewegung auf einer gewissen Strecke oder innerhalb einer gewissen Zeit in Einer Richtung, also in gerader Linie erfolgen, so nennen wir sie geradlinig, bei continuierlicher Richtungsänderung krummlinig. Indem wir nach der Limitenmethode die Kurve aus unendlich vielen, unendlich kleinen geradlinigen Theilen uns entstanden denken, deren einzelne Richtungen durch die zugehörigen Tangenten gegeben werden, übertragen wir die Gesetze der geradlinigen Bewegung

unverändert auf die Elemente der krummlinigen und stellen so die Gesetze der continuierlichen krummlinigen Bewegung auf. Das, was sich in der Wirklichkeit bewegt, ist ein Körper oder eine Verbindung von Körpern. Die Bewegung des Ganzen kann nur dadurch mit vollkommener Genauigkeit und Schärfe bestimmt werden, wenn die Bewegung jedes einzelnen Punktes des Ganzen angegeben wird.

Nach dem früher Gesagten kann die Bahn eines isolierten Punktes geradlinig oder krummlinig sein; sie ist ihrer Gestalt nach dann immer eine Folge der Kräfte, welche während der Bewegung thätig sind, oder sie kann von einem Punkte beschrieben werden, der mit gewissen Körpern in ganz bestimmtem geometrischen Zusammenhang steht, und dann ist die Gestalt der Bahn ganz unabhängig von den die Bewegung begleitenden Kräften und richtet sich nur allein nach dem bestehenden geometrischen Zusammenhange. In ersterem Falle nennt man die Bewegung eine freie Bewegung, in letzterem eine erzwungene.

Es liegt im Wesen der Maschinen, dass bei denselben in der Regel nur erzwungene Bewegungen vorkommen, und dass die Bahnen geschlossen sind. Eine Maschine darf nur eine gewisse Art von Bewegung machen können, weil sie nur für eine ganz bestimmte und eingeschränkte Thätigkeit geschaffen ist. Wegen der Bestimmtheit muss die Bewegung erzwungen, wegen der Beschränktheit müssen die Bahnen geschlossen sein.

Ein zweites Unterscheidungsmerkmal der Bewegungen erhalten wir, indem wir Zeit und zurückgelegten Weg verschiedener Ortsveränderungen vergleichen.

Jede Bewegung erfolgt mit Stetigkeit im Raume und in der Zeit, d. h. die aufeinander folgenden Orte, durch welche der Punkt in seiner Bewegung gelangt, bilden eine stetige Linie, und der Übergang von einem Punkte der Bahn nach einem andern geschieht nicht in einem untheilbaren Zeitmomente, sondern in einem gewissen größern oder kleinern Zeitunterschiede. Wir erhalten eine Vorstellung von der Lebhaftigkeit oder Raschheit der Bewegung, wenn wir den Weg, den der Punkt zurücklegt, mit der Zeit vergleichen, in welcher diese Bewegung vor sich geht. Ein Maß für die Dauer derselben gibt uns eine solche Bewegung selbst, die tägliche der Gestirne. Indem wir in dieser Beziehung die Bewegungen mit einander vergleichen, finden wir sie von einander mehrfach verschieden. Wir sprechen deshalb

von Arten und Zuständen der Bewegung. Eine Bewegung, ähnlich der täglichen der Gestirne, oder anders ausgedrückt: eine Bewegung, bei welcher in gleichen und beliebig groß gewählten Zeiten gleiche Wege zurückgelegt werden, nennen wir gleichförmig. Den Weg in der Zeiteinheit oder das Verhältnis zwischen Weg und dazu verwendeter Zeit nennen wir Geschwindigkeit, und so erhalten wir den Zusammenhang zwischen Weg (s), Zeit (t) und Geschwindigkeit (c) durch die Gleichung $s = ct$.

Bei einer nicht gleichförmigen Bewegung kann man nicht unmittelbar in diesem Sinne von einer Geschwindigkeit sprechen. Man wird den Begriff so übertragen, dass man von der Geschwindigkeit in einem bestimmten Zeitmomente spricht, die wieder den Weg in der Zeiteinheit darstellen würde, wenn von dem gedachten Augenblicke an die Bewegung mit der eben stattfindenden Geschwindigkeit gleichförmig fortdauerte, oder, die wieder als Verhältnis zwischen Weg und Zeit definiert werden kann, für ein unendlich kleines Zeit- und Wegtheilchen nach der Limitenmethode. Da diese Geschwindigkeit bei einer ungleichförmigen Bewegung verschiedene Werte erhält, so muss hier zwischen Zu- und Abnahme unterschieden werden. Wenn nun diese Zu- oder Abnahme wieder für gleiche, beliebig groß gewählte Zeiten gleich bleibt, so nennen wir die Bewegung gleichförmig beschleunigt oder verzögert. Wir erhalten im ersten Falle für die Geschwindigkeit (v) nach (t) Sekunden, wenn (c) die Anfangsgeschwindigkeit bezeichnet und (g) die Änderung der Geschwindigkeit in der Zeiteinheit, $v = c \pm gt$ und für den in dieser Zeit zurückgelegten Weg mittelst Einführung des Begriffes der mittleren Geschwindigkeit

$$s = \frac{v \pm c}{2} \,.\, t = \frac{c \pm gt + c}{2} \,.\, t = ct \pm \frac{gt^2}{2}.$$

Jede Bewegung aber, bei welcher die in gleichen Zeiten eintretenden Geschwindigkeitsänderungen nicht gleich groß sind, wird eine ungleichförmig beschleunigte oder verzögerte genannt.

Es gibt unzählige Arten von ungleichförmigen Bewegungen. Von besonderem, sowohl von wissenschaftlichem als auch praktischem Interesse sind die periodischen und schwingenden Bewegungen. Die Wellenbewegung des Wassers, die Bewegungen der Luft, welche in uns die Empfindungen des Tones und Schalles hervorrufen, die Bewegungen des Äthers, auf welchen die Lichterscheinungen und wahrscheinlich auch die

Wärme- und Elektricitäts-Erscheinungen beruhen, die Bewegung der Planeten um die Sonne gehören in die Classe der periodischen und schwingenden Bewegungen. Aber nicht allein die Bewegungen, welche der Physiker und Astronom zu betrachten hat, sondern auch jene, welche an den Maschinen vorkommen, sind der Mehrzahl nach entweder gleichförmige oder periodisch schwingende; denn es liegt im Wesen einer jeden Maschine, dass sie nur eine ganz bestimmte Function oder Arbeit zu verrichten bestimmt sein kann; ihr Bewegungszustand wird also, während sie arbeitet, entweder immerfort der gleiche bleiben oder wiederkehrend veränderlich sein. Sie sind alle ähnlich der Pendelschwingung, wenn sie um die Gleichgewichtsstellung eines Punktes erfolgen. Bei derartigen Schwingungen ist der schwingende Punkt stets bemüht, in seine Gleichgewichtsstellung zurückzukehren, ohne dass ihm sein Vorhaben für die Dauer gelingt.

Endlich ist noch zu erwähnen die drehende Bewegung eines festen Körpers. Wenn ein fester Körper sich um eine mit demselben unveränderlich verbundene, ihrer Lage nach unbewegliche Achse dreht, bleibt die Lage jedes Punktes des Körpers gegen die Drehungsachse unverändert, und jeder Punkt des Körpers bewegt sich dabei in einem Kreise, dessen Halbmesser gleich ist seiner Entfernung von der Achse, dessen Mittelpunkt in der Drehungsachse liegt, und dessen Ebene auf der Achse senkrecht steht.

Bei jeder Umdrehung der Achse beschreibt jeder Punkt einen Kreis. Alle in gleicher Entfernung von der Achse befindlichen Punkte beschreiben gleich große Kreise, ihre Geschwindigkeiten sind demnach gleich groß. Zwei Punkte, welche sich in ungleicher Entfernung von der Achse befinden, beschreiben Kreise von ungleicher Größe, ihre Geschwindigkeiten sind daher nicht gleich groß, sondern verhalten sich wie die Peripherien oder Halbmesser dieser Kreise.

Um nun sowohl die Geschwindigkeit der drehenden Bewegung des ganzen Körpers, als auch die jedes einzelnen Punktes anzugeben, braucht man nur zu wissen, wie groß die Geschwindigkeit eines um die Längeneinheit von der Achse entfernten Punktes ist, also den Weg, den dieser Punkt in jeder Sekunde zurücklegt, welcher Weg die Winkelgeschwindigkeit des Körpers heißt. Die Geschwindigkeit (c) eines anderen in der Entfernung (r) von der Achse befindlichen Punktes wird dann erhalten, wenn man die Winkelgeschwindigkeit (w) multipliciert mit dem Abstande (r). Man nennt nun $rw = c$ lineare Geschwindigkeit des Punktes.

Durch die Winkelgeschwindigkeit wird zwar die drehende Bewegung vollkommen bestimmt, aber dennoch ist diese Messungsart für praktische Zwecke nicht passend, indem dieselbe keine lebhafte Anschauung hervorruft. Wenn man z. B. sagt: die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher ein Körper sich dreht, sei 1 Meter, so wird gewiss Jedermann ziemlich lange zu thun haben, um eine sinnlich lebhafte Vorstellung von der Raschheit dieser drehenden Bewegung zu erhalten, und dies kommt daher, dass man fast nie in den Fall kommt, diese Winkelgeschwindigkeit verwirklicht vor Augen zu haben.

Tritt man vor eine in Bewegung befindliche, mit Achsen und Rädern versehene Maschine, so erhält man zunächst von der Raschheit der drehenden Bewegungen eine sinnliche Vorstellung, und wenn man diese Geschwindigkeit so messen will, dass das Maß die Vorstellung, und dass die Vorstellung das Maß hervorzurufen im Stande sein soll, so denkt gewiss Niemand daran, dies durch die Winkelgeschwindigkeit erreichen zu wollen, sondern es ist klar, dass man angeben wird, wie oftmal eine jede Achse in einer bestimmten Zeit, z. B. in jeder Minute, sich umdreht. Das natürliche Gefühl leitet also dahin, die Schnelligkeit der drehenden Bewegung durch die Anzahl der in einer bestimmten Zeit erfolgenden Umdrehungen zu messen, und man darf sich daher nicht wundern, dass diese Messungsart überall in die technische Praxis eingeführt worden ist; ja man hat sogar ohne alle Verabredung überall die gleiche Zeiteinheit gewählt, und zwar die Minute, weil dieses Zeitmaß den Vortheil gewährt, dass man es dann in den meisten und gewöhnlichen Fällen mit ganzen Zahlen zu thun hat. Überdies lässt sich mit Leichtigkeit aus der Umdrehungszahl in der Minute sowohl die Winkel- als die lineare Geschwindigkeit ableiten.

Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen.

Die wirkliche Bewegung eines Punktes oder Körpers entsteht oftmals durch das gleichzeitige Zusammenwirken zweier oder mehrerer Bewegungen, welchen der Körper zu folgen gezwungen ist. Die Auffindung der wahren Bewegung aus den Einzelbewegungen nennt man die Zusammensetzung der Bewegungen, und diese zusammengesetzte Bewegung selbst wird die resultierende Bewegung genannt.

Umgekehrt kann man jede wirkliche, durch was immer für

Ursachen hervorgebrachte Bewegung durch das gleichzeitige Auftreten von zweien oder mehreren Einzelbewegungen hervorbringen. Die Auffindung eines solchen Systems von gleichzeitig wirkenden Einzelbewegungen, die mit einer wirklich vorhandenen Bewegung vollkommen übereinstimmende Bewegung hervorzubringen vermögen, durch welche also die wirkliche Bewegung entstanden sein könnte, oder durch welche sie entstanden gedacht werden darf, nennt man die Zerlegung einer Bewegung.

Drehende Bewegungen können auf ähnliche Weise wie fortschreitende zusammengesetzt und zerlegt werden.

Relative Bewegung.

Wenn von der Bewegung eines Körpers die Rede ist, so denken wir uns zunächst immer eine wahre, absolute Ortsveränderung, d. h. eine solche, die mit dem einfachsten Grundbegriff, den wir von der Bewegung haben, vollkommen übereinstimmt. Wir denken also nur an das, was sich bewegt, und abstrahieren von allen Dingen, die im Raume das Bewegliche umgeben.

Oftmals werden wir aber veranlasst, nicht nur das, was sich bewegt, sondern insbesondere auch die Umgebung des Bewegten ins Auge zu fassen, um zu erfahren, wie der Ort und die Lage desselben gegen die Umgebung sich ändert. Dabei abstrahieren wir also von dem, was mit dieser Umgebung an und für sich vorgeht, ob sich diese etwa bewegt, oder ob sie in Ruhe ist, und wir betrachten einzig und allein die Ortsveränderungen des Körpers gegen seine Umgebung, und dies nennt man die relative Bewegung des Körpers.

Wenn zwei Körper A und B ihre relative Lage gegen einander ändern, so kann man fragen: 1. wie ändert A seine Lage

Fig. I. Fig. II.

gegen B? und 2. wie ändert B seine Lage gegen A? oder mit anderen Worten: Welches ist die relative Bewegung von A gegen B, und welches ist die relative Bewegung von B gegen A? Diese beiden relativen Bewegungen kann man bestimmen, wenn die

absoluten Bewegungen der beiden Körper bekannt sind, indem man berücksichtigt, dass diese relativen Bewegungen nicht verändert werden, wenn den beiden Körpern noch eine gemeinschaftliche Bewegung ertheilt wird, wodurch einer derselben in Ruhe kommt. Es seien z. B. in Fig. I ab und cd die Geschwindigkeiten der Körper A und B in irgend einem Zeitaugenblick. Ertheilt man nun den beiden Körpern eine gemeinschaftliche geradlinige Bewegung, deren Geschwindigkeit mit jener von B übereinstimmt, der Richtung nach aber gerade entgegengesetzt ist, so kommt B in Ruhe, und A besitzt dann zwei Geschwindigkeiten ab und $ao = cd$, welchen nach der Lehre von der Zusammensetzung der Bewegung die resultierende Geschwindigkeit ad entspricht. Der Körper A bewegt sich also gegen B gerade so, wie wenn B ruhte, und A nach der Richtung ad mit der Geschwindigkeit ad sich bewegte, d. h. es ist ad der Richtung und Größe nach die relative Bewegung von A gegen B.

Fig. III.

Ertheilt man hingegen den beiden Körpern eine gemeinschaftliche Bewegung, die der Richtung nach jener von A entgegengesetzt ist, deren Geschwindigkeit aber mit der von A übereinstimmt, so kommt A zur Ruhe, und B besitzt dann die zwei Geschwindigkeiten cd und $cf = ab$, woraus die zusammengesetzte Geschwindigkeit cg entspringt, welche gleich aber entgegengesetzt der Geschwindigkeit ad ist. Die Linie cg bestimmt also die Richtung und Geschwindigkeit der relativen Bewegung von B gegen A.

Auf ähnliche Weise erhält man auch die relativen Bewegungen, wenn sich die beiden Körper in einer und derselben geraden Linie bewegen, oder wenn sie sich um eine gemeinschaftliche Achse drehen. Wenn für den letzteren Fall (Fig. III) zwei Körper A und B mit ungleicher Geschwindigkeit, aber nach einerlei Richtung um dieselbe Achse xy sich drehen und die Geschwindigkeit (c) von A größer als jene (c') von B

ist, so folgt die Bewegung von B gegen A gerade so, wie wenn A ruhte und B mit einer Geschwindigkeit $(c-c')$ nach links sich drehte, oder wenn B ruhte und A mit einer Geschwindigkeit $(c-c')$ nach rechts sich drehte u. s. w.

Die scheinbare Bewegung eines Körpers.

Eine scheinbare Bewegung ist eine relative Bewegung, welche auf einen Beobachter den Eindruck einer absoluten Bewegung macht. In der That machen alle Bewegungen, die wir mit unseren Sinnen wahrnehmen, auf uns den Eindruck, als wären es wahre oder absolute Bewegungen; und doch wissen wir, dass es nicht so ist, und dass Alles, was die Sinne wahrnehmen, nicht Wahrheit, sondern nur Schein ist. Wir befinden uns gar nicht in der Lage, irgend eine absolute Bewegung mit unseren Sinnen wahrnehmen zu können; denn wir begleiten die Erde, wir drehen uns mit ihr um die Achse, wir folgen ihr in ihrem Lauf um die Sonne und werden wahrscheinlich noch von dieser um andere, uns ganz unbekannte große Centralsonnen herumgeführt. Auf einem so beweglichen Observatorium, wie die Erde ist, müssen uns nothwendig alle Bewegungen anders erscheinen, als sie wirklich sind; denn zur Wahrnehmung einer wahren Bewegung gehört vor allem Anderen, dass sich der Beobachter in absoluter Ruhe befinde. Wenn Wasser schnell unter einer Brücke hinströmt, und wir von dieser längere Zeit starr auf einen bestimmten Punkt der Wasserfläche hinabschauen, so ist der Eindruck zunächst der, dass die Brücke ruht, und dass das Wasser schnell durchströmt. Nach einiger Zeit ändert sich dieser Eindruck; das Wasser scheint unbeweglich, und wir scheinen mit der Brücke stromaufwärts zu eilen, während wir uns ganz klar bewusst sind, dass dies nur Täuschung ist. Aber auch dieser Eindruck bleibt nicht immerfort dauernd und gleich; es treten meistens wieder Zeitabschnitte ein, wo die Brücke ruhend und das Wasser bewegt erscheint.

Diese Thatsachen zeigen offenbar, dass die scheinbaren Bewegungen relative Bewegungen sind, die den Eindruck von wahren Bewegungen machen. Die relative Bewegung ist eine Gedanken-Abstraction; wir abstrahieren im Gedanken von der Bewegung desjenigen Körpers A, gegen welchen wir die Bewegung eines zweiten Körpers B betrachten wollen. Die scheinbare Bewegung setzt einen sinnlichen Beobachter voraus, der die relative Änderung der Lage der Körper gegen einander oder gegen sich

selbst mit seinen Sinnen beobachtet. Die scheinbare Bewegung kann aus der wahren Bewegung gerade so bestimmt werden wie die relative Bewegung. Ist z. B. *A* Fig. IV ein Beobachter, der sich wissentlich oder unbewusst nach der Richtung *ab* und mit der Geschwindigkeit *ab* bewegt, *B* ein Körper, der sich nach *cd* mit der Geschwindigkeit *cd* bewegt, so ist *cf* die scheinbare Bewegung des Körpers *B* gegen den Beobachter. Dagegen ist *ag* die scheinbare Bewegung des Beobachters gegen den Körper *B*. Das will sagen, der Beobachter *A* wird manchmal glauben, er ruhe, und der Körper *B* nähere sich ihm nach der Richtung *cf* und mit der Geschwindigkeit *cf*; dann aber wird es ihm scheinen, als wenn der Körper *B* ruhe, und als bewege er selbst sich nach der Richtung *ag* gegen *B* hin.

Fig. IIII.

Die Ursache, dass man bald die eine, bald die andere dieser relativen Bewegungen zu sehen meint, muss in physiologischen, nicht aber in mechanischen Principien gesucht werden.

Endlich ist noch zu erwähnen die sogenannte gemeinschaftliche Bewegung. Sie ist eine solche Bewegung zweier oder mehrerer Körper, bei welcher dieselben die relative Lage gegen einander nicht verändern. Wenn z. B. ein fester Körper von irgend einer Gestalt beliebig im Raume bewegt wird, so haben alle Theile des Körpers eine gemeinsame Bewegung. Getrennte Körper haben eine gemeinsame Bewegung, wenn sie sich so bewegen, als wenn sie Theile eines einzigen festen Körpers wären.

Ertheilt man einem in Bewegung befindlichen System von Körpern eine gemeinsame Bewegung, so wird dadurch die relative Bewegung der Körper nicht gestört. So z. B. ist die relative Bewegung der Planeten um die Sonne ganz unabhängig von der dem ganzen Planetensysteme gemeinschaftlichen Fortbewegung im Raume. Ebenso ist auch die Bewegung der Körper auf der Erde

ganz unabhängig von der drehenden, sowie fortschreitenden Bewegung der Erde im Raume.

Es geht aus den bisherigen Betrachtungen hervor, dass die Bewegungslehre oder, wie man sie auch zu nennen pflegt, die Kinematik oder Phoronomie nichts anderes ist als eine reine Mathematik der mit Rücksicht auf die Zeit betrachteten Ortsveränderungen. Dies entspricht auch einem Ausspruche von Lagrange, dass die Mechanik eine Geometrie von vier Dimensionen sei. Allerdings kann dies nur von der Bewegungslehre gelten. Alles, was sich in den drei Dimensionen des Raumes und in der vierten, welche nichts anderes als die Zeit ist, somit was sich als Bewegungserscheinung vollzieht oder als Ruhe darstellt, muss Gegenstand der Bewegungslehre sein.

Auch der ruhende Körper kann Gegenstand der phoronomischen Auffassung werden; denn die Ruhe ist die dauernde Gegenwart an demselben Orte und setzt somit voraus, dass sich die gleichzeitig auf die betrachteten beweglichen Punkte übertragenen Bewegungserscheinungen aufheben. Die phoronomischen Begriffe unterscheiden sich von den specifisch mechanischen Vorstellungen dadurch, dass sie denkbar sind ohne die Materie in Frage zu bringen. Ihre Anwendung auf die Welt der vollen Wirklichkeit vermittelt sich erst dadurch, dass sie zur eigentlichen Mechanik wird, indem sie die Massen und deren Verschiedenheit berücksichtigt. Mit diesem Schritt gelangen wir zur Frage nach den eigentlichen mechanischen Principien, welche sich auf das Verhalten der Materie und der sich an der letzteren äußernden Kräfte beziehen.

B. Kraft.

Wir denken uns keine Erscheinung oder Veränderung in der Körperwelt ohne Grund oder Ursache, da wir nämlich eine jede Erscheinung oder Veränderung als eine Folge oder Wirkung auffassen, und eine solche ihrem Begriffe nach einen Grund oder eine Ursache verlangt.

Bewegungen sehen wir schon bei oberflächlicher Betrachtung für Änderungen im Zustande des Materiellen, Bewegten an und fragen deshalb nach den Ursachen, in letzter Instanz nach den bewegenden Kräften.

Fassen wir den Übergang von Ruhe in Bewegung ins Auge, so sehen wir, dass er nichts anderes ist, als eine successive, mehr

oder weniger rasche Bewegungsänderung. — Dasselbe gilt beim Übergange von Bewegung in Ruhe. Die Untersuchung dieser Fälle ist also in der allgemeinen Untersuchung über die Änderungen der Bewegung schon eingeschlossen. Ruhe ist eben keine Bewegung; aus ihr können wir die Wirkungen der bewegenden Kräfte unmittelbar nicht erkennen. Wir werden deshalb zuerst den einfachsten Fall der Bewegung betrachten und von da zu den zusammengesetzten übergehen.

Bei der geradlinigen gleichförmigen Bewegung nehmen wir am Bewegungszustande keine Veränderung wahr. Richtung und Geschwindigkeit bleiben für beliebig gewählte Einheiten stets constant. Wir können also auch folgerichtig keine die Bewegung verändernde Kraft voraussetzen, da wir keine Wirkung einer solchen wahrnehmen. Eine andere Frage ist aber die, ob nicht schon die Fortdauer der Bewegung an und für sich die Wirkung einer fortwährend thätigen Kraft sei. Dieser Ansicht waren die Alten bis zu Galiläi's Zeiten. Es ist dabei die Ruhe der natürliche Zustand des Materiellen, welches von selbst in Ruhe kommen muss, wenn das in der Bewegung ihm mitgetheilte Leben allmählich verschwindet. Dieses Verschwinden kann durch das, was wir Bewegungshindernisse nennen, herbeigeführt werden.

Geradlinige gleichförmige Bewegung wäre also nach dieser Ansicht die Wirkung einer constanten Kraft, des mitgetheilten Lebens, wie man sagte — Verzögerung der Bewegung die Folge der Abnahme oder des allmählichen Verschwindens dieser Kraft: Beschleunigung die Folge der Zunahme — Verzögerung die Folge der Abnahme. Man könnte aus diesem Princip eine Theorie der Mechanik aufbauen und daraus die Bewegungen auf der Erde und am Himmel zu erklären suchen. Dabei erkennt man aber Folgendes: Erstens ist für jede Veränderung in der Bewegung eine Veränderung der Kraft vorauszusetzen, wohin wir auch ihren Sitz verlegen mögen, so dass die Natur der wirkenden Kräfte auch in einfachen Fällen der Bewegung verwickelt wird, und dann ist es uns nicht möglich eine klare Vorstellung über dieses wunderbar mitgetheilte Leben und das geheimnisvolle Verschwinden desselben zu gewinnen. Die zweite Antwort auf die obige Frage ist aber die Galiläi's, dass die unveränderte Fortdauer der geradlinigen gleichförmigen Bewegung des Materiellen keine bewegende Kraft erfordere, dass also das unveränderte Beibehalten eines einmal erlangten Bewegungszustandes eben so dem Materiellen eigen sei, wie das Beibehalten des Ruhezustandes, dass

also nur in der Änderung der Bewegung die Wirkung einer Kraft sich äußere. Wir bezeichnen diese Eigenschaft des Materiellen, einen einmal erlangten Zustand, sei er Ruhe oder Bewegung, ohne Einwirkung einer Kraft unverändert beizubehalten, mit dem Namen Trägheit der Materie.

Bis hieher lag die Frage nach dem Sitze einer bewegenden Kraft noch außerhalb des Bereiches der Untersuchung. Nach dem Principe der Trägheit erfolgt also die geradlinige gleichförmige Bewegung bloß auf Grund der Trägheit der Materie ohne Einwirkung einer bewegenden Kraft.

Wenden wir uns nun zur geradlinig gleichförmig beschleunigten Bewegung. Die Änderung im Bewegungszustande drückt sich hier aus durch die Änderung der Geschwindigkeit in der beliebig gewählten Zeiteinheit, durch die Beschleunigung, die constant bleibt. Diese Beschleunigung ist die Wirkung einer Kraft. Wenn nun diese Kraft die Geschwindigkeit des Materiellen in der ersten Zeiteinheit z. B. von o auf g erhöhte, und in der zweiten von g auf $2g$ u. s. w. allgemein: in der Zeit t um $v = gt$, so sagen wir, diese Kraft ist in ihrer Wirkung sich fortwährend gleich oder constant geblieben, sie ist eine constante Kraft, und die geradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegung ist das Resultat einer constant wirkenden Kraft. Damit haben wir aber schon wieder eine Annahme gemacht, nämlich die, dass die Wirkung der Kraft vom jeweiligen Bewegungszustande des Materiellen unabhängig sei, d. h. dass die Beschleunigung g in der dritten Zeiteinheit der Bewegung eine gleich große Wirkung der Kraft darstelle als die Beschleunigung g, ertheilt innerhalb der zweiten oder innerhalb der ersten Zeiteinheit. Es ist diese Annahme aus dem Principe der Trägheit zu folgern, und damit auch zugleich das Parallelogramm der Kräfte aus jenen der Bewegungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Einer Kraft, die fortwährend in jeder Zeiteinheit eine gleiche Beschleunigung desselben Materiellen zu erzeugen vermag, legen wir eine constante Größe bei. Einer Kraft, die demselben Materiellen eine andere Beschleunigung g' ertheilt, müssen wir also folgerichtig eine andere Größe beilegen. Nun äußert sich die Wirkung der Kraft bei der geradlinigen gleichförmig beschleunigten Bewegung eines und desselben Materiellen in nichts, als in der Geschwindigkeitsänderung; wir werden sie deshalb durch diese Geschwindigkeitsänderung messen müssen und vernünftiger

Weise einer größeren Beschleunigung auch eine größere beschleunigende Kraft zuschreiben, ja geradezu die Wirkung, also auch die Kraft selbst der Beschleunigung proportional nehmen, da ja gar kein Grund vorliegt, irgend eine Function der Kraft, z. B. irgend eine Potenz der Kraft, direct durch die Beschleunigung zu messen. Man könnte dies zwar thun, hätte dann aber jene unnatürliche Annahme in allen Folgerungen. Wir nehmen also die bewegende Kraft p der Größe der Beschleunigung g proportional und erhalten die Proportion:

$$p : p' = g : g' \quad \text{oder} \quad p = \frac{p'}{g'} \cdot g,$$

$$p = kg.$$

Soll diese Berechnung von p aus der Proportion einen Sinn haben, so dürfen wir uns die Beschleunigung g und g' nicht als die benannten Größen selbst, z. B. als Wegstrecken vorstellen, sondern bloß als die Maßzahlen derselben, bezogen auf irgend eine bisher noch nicht weiter bestimmte Einheit, da ja sonst die Gleichung $p = kg$ nicht homogen wäre, und ein Product mehrfach benannter Größen keinen Sinn gäbe.

Würde man g aus der Proportion rechnen, so müsste dieselbe Bemerkung rücksichtlich der Kräfte p und p' gemacht werden.

Fassen wir das Bisherige zusammen, so müssen wir sagen, dasselbe wurde a priori aus den angenommenen Principien gefolgert und hat also mit experimenteller Ableitung oder Begründung nichts zu thun; aber was sehr wichtig ist, die Principien selbst abstrahierten wir aus der unmittelbaren Anschauung, also aus Beobachtung und Versuch und wählten sie so, wie sie und ihre Folgerungen den Erscheinungen einfach und ungekünstelt genügen.

Nehmen wir ein naheliegendes Beispiel, nämlich die Schwerkraft und ihre Äusserung beim Falle der Körper und untersuchen, etwa an der Atwood'schen Fallmaschine, die Gesetze der Bewegung 1. ohne Einwirkung einer Kraft, also in Folge der Trägheit, und 2. unter dem Einflusse einer constanten Kraft, so werden dadurch nicht die früher aufgestellten Gesetze experimentell erwiesen, sondern bloß erläutert; aber, was wichtiger ist, es wird dadurch in der That experimentell erwiesen, dass die Schwerkraft an nicht weit von einander entfernten Orten der Erdoberfläche eine im früheren Sinne constant wirkende Kraft

ist, womit auch schon gesagt ist, dass die Größe ihrer Wirkung vom jeweiligen Bewegungszustande des Materiellen unabhängig ist. Setzen wir in der Gleichung $p = kg$, $g = 1$, so ergibt sich $p = k$, d. h. dieser Proportionalitätsfactor k ist nichts anderes als die Kraft, welche demselben Materiellen die Beschleunigung $= 1$ ertheilt. Es ist dies auch ganz natürlich, da sonst die Gleichung nicht homogen wäre.

Gehen wir jetzt einen Schritt weiter, indem wir die Wirkung einer bewegenden Kraft auf verschiedene Objecte betrachten. Schon die oberflächlichste Beobachtung lehrt uns, dass die Beschleunigung, welche dieselbe Kraft oder nahe gleiche Kräfte verschiedenen Körpern zu ertheilen vermögen, außerordentlich verschieden ausfällt und im allgemeinen um so kleiner wird, je größer die zu bewegende Materie ist, woraus dann im Zusammenhange mit dem Früheren folgt, dass die bewegende Kraft bei constanter Beschleunigung um so größer werden muss, je größer die zu bewegende Materie wird. Diese einfachen, noch rohen Versuche veranlassen uns schon, über das Verhalten der Materie bei Bewegungsänderungen, und dadurch wieder bezüglich der bewegenden Kraft selbst einen neuen Grundsatz anzunehmen, nämlich den, dass die Trägheit der Materie nicht nur darin besteht, einen einmal vorhandenen Bewegungszustand unverändert beizubehalten, bis die Einwirkung irgend einer Kraft eine Veränderung hervorruft, sondern noch darin, dass von der Materie dieser Bewegungszustand mit einer gewissen Beharrlichkeit, wir können sagen mit einer gewissen Kraft festgehalten wird, welche zu überwinden eben Aufgabe der einwirkenden bewegenden Kraft ist.

Es ist dann klar, dass die Größe der beschleunigenden Kraft nicht bloß der erzeugten Beschleunigung proportional sein wird, sondern auch bei derselben Beschleunigung von der Größe dieser Beharrlichkeit oder Trägheit der Materie abhängig sein wird. In dieser Beharrlichkeit oder Kraft des Materiellen, den vorhandenen Zustand beizubehalten, liegt das Positive im Begriffe der Trägheit, das eben auf die Wirkung der beschleunigenden Kraft von Einfluss ist.

Wir wollen uns hier noch gleich die Frage stellen, wo wir uns den Sitz der bewegenden Kraft zu denken haben? Im leeren Raum nicht, sondern im Materiellen, ferner in jener Richtung wirkend, in der die Bewegung statt hat. Der Sitz der Kraft

kann dann sein außerhalb des Bewegten, indem von einem äußeren Materiellen eine Einwirkung auf die bewegte Materie statt hat; oder er kann sein im bewegten Materiellen selbst, indem dieses in Folge seiner Einwirkung auf ein äußeres Materielles in Bewegung geräth; oder es können beide Fälle stattfinden, also beide Kräfte zusammenwirken. In jedem Falle aber braucht das Materielle, Bewegliche gewissermaßen einen Haltpunkt außer sich selbst und kann nicht durch bloße Einwirkung auf sich selbst eine Bewegungsänderung hervorrufen, sondern ist, wie früher gesagt, mit der Eigenschaft der Trägheit, d. h. mit einer gewissen Kraft, den einmal vorhandenen Zustand beizubehalten, ausgerüstet. Es sind dies auch bloß aus der unmittelbaren Anschauung geschöpfte, nicht experimentell zu erweisende Principien; sie sind aber für sich selbst und in allen Consequenzen zur Erklärung der Erscheinungen am einfachsten, natürlichsten und unserer Anschauung am entsprechendsten.

Wir können nun offenbar auch sagen: Die bewegende Kraft ist bei gleicher Beschleunigung um so größer, je größer die Trägheit des Materiellen Bewegten ist. Da könnten wir nun wieder irgend eine Function der bewegenden Kraft der Größe der Trägheit proportional setzen; es liegt aber gar kein Grund vor, warum wir nicht die bewegende Kraft selbst der Größe der Trägheit proportional setzen sollen. Eine weitere Frage ist nun aber die, wie denn die Größe der Trägheit mit dem Materiellen Bewegten selbst zusammenhängt? Da machen wir wieder die Annahme, ein gleiches Quantum oder Menge Materie besitze eine gleiche Größe der Trägheit, und allgemein: die Größe der Trägheit ist der Quantität der Materie proportional, woraus nach dem Obigen folgt, dass die Größe der bewegenden Kraft der Quantität der bewegten Materie proportional sei. Wir denken uns nämlich, der Quantität der Materie werde durch eine gewisse Kraft p die Beschleunigung g ertheilt, einer zweiten, gleich großen Quantität A, derselben Materie würde durch dieselbe Kraft p dieselbe Beschleunigung g ertheilt u. s. w.; allgemein: der $n$fachen Quantität der Materie $= nA_1$ werde durch die $n$fache Kraft np dieselbe Beschleunigung g ertheilt. Dadurch erhalten wir auch gleichzeitig ein Maß für die Quantität oder Menge, freilich strenge genommen bloß für die Quantitäten derselben Materie. Nehmen wir aber dazu noch an, dass die Trägheit bloß von der Quantität und gar nicht von der sogenann-

ten Qualität der Materie abhänge, so haben wir ein Maß für die Quantität überhaupt. Bezeichnen $p\,p'$ die beschleunigenden Kräfte, μ und μ' die Quantitäten der beweglichen Materie, $g\,g'$ die erzeugten Beschleunigungen, so ist

$$p : p' = \mu : \mu' \text{ bei gleichen Beschleunigungen,}$$
$$\underline{\qquad\qquad g : g' \text{ bei gleichen Quantitäten}}$$
$$p : p' = \mu g : \mu' g'$$
$$p = \frac{p'}{\mu' g'} \cdot \mu g\,; \quad p = k' \mu g = kg$$
$$k' \mu = k \text{ gesetzt.}$$

μ, μ', g, g' sind hier wieder nicht als die Größen selbst, sondern bloß als ihre Maßzahlen, bezogen auf irgend welche Einheiten, aufzufassen, da sonst hier wieder das Product $\frac{p'}{\mu' g'} \cdot \mu g$ als das Product mehrfach benannter Zahlen keinen Sinn hätte. Für $\mu = 1$, $g = 1$ wird $p = k'$, d. h. k' ist die Kraft, die der Quantität 1 die Beschleunigung 1 zu ertheilen vermag. $k' \mu = k$ ist also die Kraft, die der Quantität der bewegten Materie die Beschleunigung 1 zu ertheilen vermag. Man bezeichnet diese Größe nun gewöhnlich mit dem Buchstaben m und schreibt $p = mg$ oder $m = \frac{p}{g}$ und heißt m die Masse der bewegten Materie. Masse ist also nichts anderes als der Quotient aus bewegender Kraft und erzeugter Beschleunigung, oder die Kraft, welche der bewegten Materie die Beschleunigung 1 zu ertheilen vermag. Diese Kraft m ist also gewissermaßen ein Maß für die Größe der Trägheit der Materie; sie ist aber auch ein Maß für die Menge oder Quantität der Materie, da wir die Größe der Trägheit der Quantität proportional nehmen.

mv, d. h. das Product aus der Größe der Trägheit in die erzeugte Geschwindigkeit oder die in einer gewissen Zeit (t) vollführte Leistung einer Kraft, somit $mv = pt$, heißt man Bewegungsgröße und mv^2 oder $\frac{mv^2}{2} = ps$, wo s den Weg bezeichnet, auf welchem die Geschwindigkeit v durch die Kraft p erzeugt worden ist, die lebendige Kraft; diese erhält man also auch, wenn man die Bewegungsgröße mit der erzeugten Geschwindigkeit multipliciert.

Wenn wir uns nun nach der Wahl der Maßeinheiten umsehen, so ergeben sich diese von selbst.

$$p = mg = k' \mu g$$

p wird gleich 1 für $mg = k'\mu g = 1$, also $p = 1$, wenn man z. B. $g = 1$, $m = k'\mu = 1$ setzt; d. h. Kraft-Einheit nennt man diejenige, welche bei der Masse 1 die Beschleunigung 1 erzeugt. Was ist aber $m = 1$? m ist = der Kraft, welche der bewegten Materie 1 die Beschleunigung 1 ertheilt, so oftmal genommen, als die Maßzahl μ der Quantität der bewegten Materie Einheiten hat.

Nehmen wir nun geradezu die Kraft, welche der Quantität 1 die Beschleunigung 1 zu ertheilen vermag, nämlich $k' = 1$, so wird auch $\mu = 1$, also $p = k' = 1$; für $\mu = 1$, $g = 1$, d. h. diejenige Kraft, welche der Quantität 1 träger Materie die Beschleunigung 1 zu ertheilen vermag, ist die Einheit der Kraft (auch die Größe der Trägheit), und diese fällt auch mit der Einheit der Masse zusammen.

Umgekehrt können wir aber auch die Quantität 1 träger Materie und dadurch wieder die Masse 1 durch die Kraft 1 definieren. Es handelt sich nun darum, eine von diesen zwei Einheiten festzusetzen.

Wählen wir als Quantität 1 die träge Materie, welche in $1^{\text{Cub. cm.}}$ destillierten Wassers bei $+ 4^0$ C. enthalten ist, so ist die Kraft 1 diejenige, welche dieser Quantität 1 die Beschleunigung 1 zu ertheilen vermag, welche Kraft 1 dann mit der Masse 1 identisch wird. Wählen wir aber von vorn herein als Kraft 1 etwa das Gewicht von $1^{\text{Cub. cm.}}$ destillierten Wassers bei $+ 4^0$ C. auf der Sternwarte von Paris, so ist diese Kraft-Einheit um $g$mal größer als die frühere, ebenso die Masse 1 und die Quantität 1, wodurch die Maßzahlen für zu messende Kräfte, Massen und Quantitäten $g$mal kleiner ausfallen als bei den früheren Einheiten.

Wenden wir uns nochmals zur Schwerkraft, zum freien Falle und zur Fallmaschine. Hindern wir einen Körper am freien Falle durch Aufhängen oder Unterstützen, so nehmen wir den Zug der Schwerkraft wahr in der Spannung des Aufhängefadens oder in dem Drucke auf die Unterlage. Wir nennen diesen von der Schwere herrührenden Zug eines Körpers auf den Aufhängefaden oder diesen Druck auf die horizontale Unterlage sein Gewicht. Das Gewicht ist uns also ein Maß für die Größe der Anziehung der Erde auf einen bestimmten Körper. Wir finden nun bei Körpern derselben Qualität ihr Gewicht im allgemeinen ihren Volumen proportional, bei Körpern verschiedener Qualität finden wir aber die Gewichte gleicher Volumina verschieden, z. B. das Gewicht eines Cub.-Centm. Quecksilbers

13·6mal größer als das eines Cub.-Centm. Wassers. Was ziehen wir nun daraus für Schlüsse bezüglich der Schwere der Körper? Man könnte sagen, bei materiell gleichen Körpern ist die Quantität der Materie ihrem Volumen proportional, also auch die Größe der Anziehung oder ihr Gewicht der Quantität der Materie proportional; bei materiell verschiedenen Körpern aber kann möglicher Weise die Größe der Anziehung nicht bloß von der Quantität, sondern auch von der Qualität der Materie abhängen. Lassen wir aber Körper von verschiedener Größe, solche von derselben und von verschiedener Qualität im luftleeren Raume, wo kein Bewegungshindernis ist, frei fallen, so machen wir die Entdeckung, dass hier alle zu gleicher Zeit am Boden anlangen, dass also die Schwerkraft ihnen allen dieselbe Beschleunigung g ertheilt. Wir werden daraus schließen, dass die Größe der Trägheit der einzelnen bewegten, auch qualitativ verschiedenen Materien der Größe der Anziehung, also ihrem Gewichte gerade proportioniert sei.

Damit ist nun freilich noch nicht gesagt, dass die Größe der Trägheit bloß der Quantität der Materie proportional sei, und nicht auch von der Qualität derselben abhänge. Wäre dieses Letztere der Fall, so müssten wir aus dem Gleichbleiben von g schließen, dass die Schwere nicht bloß eine auf die träge Materie als solche einwirkende Kraft sei, deren Größe bloß der Quantität proportional ist, sondern dass sie auch noch von der Qualität des Materiellen und vielleicht noch von andern Umständen, wie Zusammensetzung u. dgl. abhänge.

Machen wir aber die Annahme, dass die Größe der Trägheit der Materie überhaupt bei der Einwirkung einer jeden Kraft bloß von der Quantität der Materie abhänge, messen wir die Quantität der Materie nur durch ihre Trägheit, so gelangen wir zu dem Schlusse, dass die Größe der Schwere auch bloß von der Quantität der Materie, und nicht von andern Umständen abhänge und derselben proportional sei. Man drückt diesen Satz aus mit den Worten: Alle Körper sind gleich schwer, oder: die Wirkung der Schwerkraft auf gleiche Quantitäten aller Körper ist dieselbe.

Wir sagen nun auch, $1^{\text{Cub. cm.}}$ Quecksilber habe 13·6mal mehr Quantität träger Materie als $1^{\text{Cub. cm.}}$ Wasser und haben also an den Gewichten ein Mittel zur Vergleichung der Quantitäten der Materie. Nennen wir die Quantität träger Materie in der Volums-Einheit absolute Dichtigkeit und das Gewicht dieser

Quantität absolutes specifisches Gewicht, so sehen wir, dass diese Größen zwar ihrem Begriffe nach wesentlich verschiedene Dinge sind, dass sie aber durch dieselben Zahlen ausgedrückt werden, falls wir sie auf Dichte und specifisches Gewicht einer und derselben Quantität Materie, z. B. $1^{\text{Cub. cm.}}$ Wassers, beziehen. Wir können diese Zahlen relative Dichtigkeit und relatives specifisches Gewicht nennen; sie sind numerisch gleich, ihrem Begriffe nach aber wesentlich von einander verschieden; die eine ist der Quotient der Quantitäten träger Materie gleicher Volumina, die andere der Quotient der Gewichte derselben.

Was haben wir also durch die Versuche an der Fallmaschine und beim freien Falle gefunden?

1. Dass die Schwerkraft an einem bestimmten Orte oder an nahe gelegenen Orten der Erdoberfläche wirklich eine in dem früheren Sinne definierte constante Kraft ist, und 2. dass die Schwerkraft eine Kraft ist, deren Wirkung bloß von der Quantität und nicht auch von der Qualität der Materie abhängt, wobei wir aber nicht die Annahme übersehen dürfen, dass die Größe der beschleunigenden Kraft der Größe der Trägheit, und diese der Quantität der Materie proportional sei.

Der freie Fall, die Fallmaschine und die Wage dienen also dazu, die Schwerkraft als eine constant wirkende und von der Qualität der Materie unabhängige Kraft kennen zu lernen; einen wirklichen experimentellen Beweis der Principien der Mechanik bieten sie nicht. Wir erhalten durch die Schwerkraft nur ein erläuterndes Beispiel zu den aus der unmittelbaren Anschauung geschöpften und durch logische Schlüsse weiter entwickelten Principien, an welchem Beispiele die Vernünftigkeit unserer Annahmen wieder speciell erprobt wird.

Im Abschnitte Kraft können somit für die Erklärung der Bewegungserscheinungen folgende Principien zusammengefasst werden:

1. Trägheit der Materie als Eigenschaft, einen jeden eben vorhandenen Bewegungszustand unverändert beizubehalten, so dass die Materie zwar Träger der Kraft sein kann, aber durch die Wirkung auf sich selbst ihren eigenen Zustand nicht zu verändern vermag, eine Veränderung des Bewegungs-Zustandes nur durch die Wechselwirkung zweier Materien zu Stande kommt. Die Trägheit in obigem Sinne ist der Grund der geradlinigen gleichförmigen Bewegung.

2. Die Wirkung einer constanten Kraft ist von dem schon vorhandenen Bewegungs-Zustande unabhängig, ihre Wirkung oder sie selbst ist also der erzeugten Beschleunigung proportional; sie ist der Grund der geradlinigen, gleichförmig beschleunigten Bewegung.

3. Die Trägheit der Materie besteht auch noch in einer gewissen Beharrlichkeit oder Kraft, den vorhandenen Zustand beizubehalten; zu ihrer Überwindung ist eben die beschleunigende Kraft nöthig, und die Masse, d. h. die Kraft, welche der bewegten trägen Materie die Beschleunigung 1 zu ertheilen vermag, gibt ein Maß für die Größe der Trägheit der Materie.

4. Die Trägheit der Materie ist bloß von ihrer Quantität und nicht auch von der Qualität oder anderen Umständen abhängig, und zwar der ersteren proportional, woraus folgt, dass auch die Masse und die beschleunigende Kraft der Quantität der Materie proportional ist. Auf solche Weise ist die Wage ein Mittel Quantitäten und Dichten zu bestimmen.

Nehmen wir nun die Proportionalität zwischen Größe der Trägheit und Quantität der Materie bloß bei unveränderter Qualität, also nicht für qualitativ verschiedene Körper an, so erhalten wir die Proportion

$$p : p' = \mu g : \mu' g' \text{ und daraus}$$
$$p = k' \mu g.$$

k' ist die Kraft, die der Quantität 1 der trägen Materie die Beschleunigung 1 zu ertheilen vermag. Sie bildet ein Maß der Trägheit für die Einheit der bewegten Materie und wird im allgemeinen von deren Qualität abhängen.

Setzt man $k' = \chi \nu$ und $p = \chi \nu \mu g$. Für $g = 1$, $\mu = 1$, $\nu = 1$ wird $\chi = p$. χ ist also das Maß der Trägheit für die Einheit einer Materie, für welche wir $\nu = 1$ setzen, z. B. für Wasser, und kann daher die specifische Trägheit genannt werden.

Für eine andere Qualität setzen wir

$$k_1' = \chi \nu', \text{ folglich}$$
$$k' : k_1' = \nu : \nu'.$$

Wählen wir für $\nu = 1$ auch $\chi = p = 1$, so ist die Kraft 1 diejenige, welche der Quantität 1 des Wassers die Beschleunigung 1 zu ertheilen vermag. Sie fällt mit Masse 1 zusammen.

Fall 1. Wählen wir Quantität 1 = 1 $^{\text{Kub. cm.}}$ destilliertes Wasser bei 4° C., so ist dadurch Kraft 1 gegeben als das Gewicht eines Cubik. cm. Wassers bei 4°C., bei einer Schwere, deren Beschleunigung 1 ist.

Fall 2. Wählen wir aber im Vorhinein als Einheit der Kraft z. B. 1 Grm. oder das Gewicht von 1 Kub.-cm. Wasser bei 4° C. auf der Sternwarte von Paris, also bei einer Beschleunigung $g = 9 \cdot 808$ Meter, so ist die Einheit der Quantität diesesmal die von g Cub.-Cm. Wasser, also g mal größer als früher.

Wenden wir diese Begriffe auf die Schwerkraft an, und seien p und p' die Gewichte, so nehmen wir als ersten Fall an, k' sei das Maß der Trägheit für die Quantität 1 und constant. So ist also

$$p = k' \mu g \text{ und}$$
$$p' = k' \mu' g'.$$

Da nun am selben Orte $g = g'$ ist, so bestehen auch folgende zwei Gleichungen:

$$p = k' \mu g$$
$$p' = k' \mu' g,$$

und daraus ergibt sich die Proportion

$$p : p' = \mu : \mu', \text{ also für } \mu = \mu' \text{ auch } p = p':$$

die Gewichte gleicher Quantitäten sind somit gleich und umgekehrt. Demgemäß ist die Wage ein Mittel zur Vergleichung der Quantitäten aller Materien.

Fall 3. k' nicht constant, so ist

$$p = \chi \mu \nu g$$
$$p' = \chi \mu' \nu' g$$
$$\overline{p : p' = \mu \nu : \mu' \nu'}$$

χ ist das Maß der Trägheit der Quantität 1 einer bestimmten Materie, z. B. des Wassers.

Für $\mu = \mu'$ wird $p : p' = \nu : \nu'$

$p = p' \frac{\nu}{\nu'}$, d. h. die Gewichte gleicher Quantitäten träger Materie sind nicht gleich, sondern verhalten sich wie die Größe ihrer (specifischen) Trägheiten.

Umgekehrt für $p = p'$ ist

$$\mu \nu = \mu' \nu',$$

daraus ergibt sich $\mu : \mu' = \nu' : \nu,$

d. h. die Quantitäten gleicher Gewichte träger Materie sind nicht gleich, sondern verhalten sich umgekehrt wie die Größen ihrer specifischen Trägheiten.

Nach dem Gesetze der chemischen Äquivalente und dem der multiplen Verhältnisse finden die chemischen Verbindungen in constanten Gewichtsverhältnissen oder den einfachen ganzzahligen Vielfachen derselben statt. Diese Gewichtsverhältnisse sind aus-

gedrückt in rationalen und in vielen Fällen sogar sehr einfachen ganzen Zahlen, folglich auch das Verhältnis $\mu\nu : \mu'\nu'$.

Je nachdem nun das Verhältnis der vereinigten Quantitäten (also das Verhältnis der Quantitäten träger Materie) der zu Einem Molekül vereinigten Gruppen von Atomen $\mu : \mu'$ rational und einfach ist oder nicht, ist ein Ähnliches auch bei $\nu : \nu'$ der Fall.

Was nun endlich das Wesen der Kräfte anbelangt, so kann dasselbe nicht erklärt werden. Ihre Existenz erkennen wir an den mannigfaltigen Wirkungen, welche sie hervorbringen, und insbesondere durch das Gefühl und das Bewusstsein unserer eigenen physischen Kraft. Dieses Gefühl haben wir durch einen besonderen Sinn, den man Tastsinn nennt. Ohne diesen Sinn würden wir von der Existenz der Kräfte durchaus keine Ahnung haben; die Welt mit ihren Erscheinungen würde sich uns als ein Wechselspiel von Bildern darstellen; die Ursachen dieser Erscheinungen aufzusuchen würde uns schwerlich in den Sinn kommen, und wenn es auch der Fall wäre, so könnten wir sie doch niemals auffinden. Durch diesen Sinn fühlen wir, wenn unsere Kräfte thätig sind, oder wenn von außen auf unsern Körper eingewirkt wird. Wir empfinden die Existenz unserer eigenen Kraft, wenn wir einen Zug oder Druck ausüben; wir wissen aus der Erfahrung, dass durch anhaltende Thätigkeit eines solchen Zuges oder Druckes Bewegungen und Bewegungs-Veränderungen hervorgebracht werden können, und wir schließen nun daraus, dass die unmittelbare Äußerung einer jeden Kraft in einem Drucke oder Zuge bestehe, und dass jede Bewegung oder Bewegungs-Veränderung nur in Folge einer Zug- oder Druckäußerung irgend einer Kraft entstanden sein könne.

Dies gilt auch, wenn oftmals Körper, die nicht in Berührung stehen, auf einander bewegend einwirken. Fällt ein Körper zur Erde nieder, bewegt sich ein Stück Eisen gegen einen Magnet, nähern oder entfernen sich zwei elektrisierte Körper, so geschieht auch dies in Folge eines Zuges oder Druckes, und diese Art von Kraftäußerung lässt sich ganz richtig mit einem Druck, den wir mit der Hand ausüben, vergleichen. Hierüber gibt uns der Tastsinn ganz unzweideutig Aufschluss. Wenn wir versuchen, mit unserer Hand das Fallen eines Steines, die Annäherung eines Eisenstückes an einen Magnet oder die Annäherung oder Entfernung zweier elektrisierter Körper zu verhindern, so fühlen wir deutlich, dass wir einen Druck oder Zug ausüben müssen; wir dürfen es demnach wohl als eine ausgemachte Sache betrachten,

dass die unmittelbare Äußerung einer jeden Kraft in einem Zug oder Druck bestehe.

Wie schon oben gesagt worden, kann als Einheit der Kraft jener Druck genommen werden, den ein Körper, dessen Gewicht 1 Kg. beträgt, auf eine Unterlage ausübt.

Diese Messung der Kräfte nach ihren unmittelbaren Äußerungen wird in der Lehre vom Gleichgewichte der Kräfte allgemein befolgt. In der Bewegungslehre aber werden die Kräfte durch das Resultat der Bewegung gemessen, welches sie an den Körpern hervorbringen. Es wird aber auch auf diese Weise ebenfalls der Druck bestimmt, welcher in einer Masse in einer gewissen Zeit eine gewisse Geschwindigkeit hervorruft.

Zu dem früher festgestellten Begriffe der Masse sollen nun noch einige Bemerkungen hinzugefügt werden.

Nach dem aufgestellten Begriffe ist die Masse eines Körpers die Menge des Trägen an demselben, d. h. die Menge dessen, was sich selbst nicht bewegen, sich selbst nicht treiben kann, was also bewegt oder getrieben werden muss, wenn der Körper aus einem gewissen Bewegungszustande in einen andern übergehen soll.

Die Masse eines Körpers ist absolut unveränderlich; sie ist die unvergänglich unvernichtbare Menge des Trägen. Man kann einen Körper ausdehnen oder zusammendrücken, man kann seine Form auf mannigfaltige Art verändern, man kann ihn nach verschiedenen Orten auf der Erde bringen, wo er bald ein größeres, bald ein kleineres Gewicht zeigen wird. Man kann einen Körper mechanisch oder chemisch zertheilen u. s. w.; was man aber auch immer mit dem Körper vornehmen mag, seine Gesammtmasse und für den Fall der Theilung die Summe der Massen aller Theile bleibt unveränderlich.

Um den Begriff der Masse noch deutlicher zu machen, ist es nothwendig, noch auf zwei sehr verbreitete, aber irrige Ansichten aufmerksam zu machen.

Die Masse eines Körpers wird gewöhnlich als die Menge der Materie eines Körpers erklärt. Diese Definition ist nicht richtig, denn wenn von der Masse die Rede ist, so handelt es sich um die Menge des Trägen und nicht um die Menge des Materiellen.

Zwei gleiche Quantitäten Materie müssen nicht nothwendig gleich große Massen haben; denn wie auch oben angenommen wurde, ist es ja denkbar, dass verschiedenartige Substanzen eine

verschiedene specifische Trägheit besitzen, und wenn dies der Fall wäre, so würde, so wie es auch bei der früher durchgeführten Ableitung geschehen ist, die Masse eines Körpers durch das Product aus der Menge seiner Materie in die specifische Trägheit derselben auszudrücken sein. Gesetzt aber auch, dass alle Stoffe einen gleichen Grad von Trägheit besitzen, dass also die Masse eines Körpers durch die Menge seiner Materie gemessen werden dürfte, so müsste man doch zunächst ein Mittel haben, die Menge der Materie zu bestimmen, und dazu gibt es auch kein anderes als dasjenige, welches wir zuerst zur Bestimmung der Menge des Trägen angegeben haben.

Ein anderer Irrthum besteht darin, dass oft Masse mit Gewicht verwechselt wird. Die Masse eines Körpers, d. h. die Menge des Trägen ist, wie schon gesagt wurde, etwas ganz Unveränderliches; das Gewicht eines Körpers dagegen, d. h. die Kraft, mit welcher die Erde einen Körper anzieht, ändert sich mit dem Orte, nach welchem ein Körper gebracht wird. Am Äquator ist das Gewicht eines Körpers kleiner als am Pol, außerhalb und innerhalb der Erde kleiner als an ihrer Oberfläche; im Mittelpunkte der Erde verschwindet es gänzlich, und wenn wir uns denken wollen, dass ein Körper nach der Sonne gebracht würde, so wäre dort sein Gewicht gegen die Sonne $28^1/_2$mal größer als auf der Erde gegen die Erde. Somit sind Masse und Gewicht zwei ganz verschiedene Begriffe.

Bei der Masse denkt man zunächst nur an gravitierende Materie; aber so wenig der Begriff der allgemeinen Materie durch die Feststellung der Wägbarkeit eingeschränkt ist, eben so wenig begrenzt sich die Mechanik durch eine so enge Vorstellung. Sind es bis jetzt auch nur hypothetische Medien, auf welche sich über den Kreis der, der Schwere unterworfenen Materie hinaus die mechanischen Erörterungen erstrecken, so ist diese Unvollkommenheit doch nur als provisorisch anzusehen. Der Hauptmangel liegt vorläufig in der Unbekanntschaft mit dem, was man beim Äther oder bei anderen hypothetischen Medien als Menge der Materie betrachten und mit den sonstigen mechanischen Massen vergleichen könnte. Wäre der Widerstand, von dem die Bahnveränderungen der Kometen Zeugnis geben, wirklich auf den Äther und nicht etwa auf kleine schwere Massen- oder Massentheilchen zurückzuführen, so wäre die unmittelbare Gegenseitigkeit in der Bewegungsübertragung von der einen Art der Materie auf die andere nach Analogie der Bewegung in gra-

vitierenden Medien sehr nahe gelegt. Übrigens ist ja aber auch die Brücke von den Wärme- zu den mechanischen Erscheinungen geschlagen, und es fehlt nur an der Zerlegung der von der Wärme vorgestellten mechanischen Erscheinungen nach Maßgabe einer Unterscheidung der Masse des Mediums von den afficierenden Bewegungsursachen. Wenn man bei Erörterungen der elektrischen Erscheinungen von der Masse redet, so ist hiemit keineswegs der Begriff der Menge einer allgemeinen Materie gegeben, vermöge dessen man die verschiedenartigsten Kräfteerscheinungen auf einen einzigen gleichartigen Träger zu beziehen vermöchte. Die Anwendung der mechanischen Principien bleibt daher auch hier für jetzt in erhebliche Schranken gebannt, die sich nur in dem Maße erweitern werden, in welchem man das Gleichartige in der allgemeinen Materie erkennen und schließlich messen lernen wird.

Um irgend ein Ganzes zu begreifen, muss man wissen, aus welchen Theilen es besteht, und in welcher Beziehung diese Theile stehen, sowohl untereinander als zum Ganzen. Wir betrachten der Übersicht halber die Körper nach ihren äußeren Merkmalen, vergleichen sie sodann unter einander und ordnen sie zuletzt nach den Grundsätzen der Ähnlichkeit und Gleichartigkeit.

Die Erkenntnisse, welche wir hiedurch erlangen, befriedigen uns aber noch nicht, weil wir durch dieselben über die innere Wesenheit der Stoffe keinen Aufschluss erhalten. Wir ahnen, dass wir mit unseren Sinnen und mit unserem Geiste in das Innere der Körper eindringen müssen, wenn wir die letzten Ursachen aller Erscheinungen, den Keim alles Seins und Wirkens entdecken wollen.

Dazu versehen wir uns mit mannigfaltigen Apparaten und Hilfsmitteln, welche die Physik und Chemie ausgedacht haben; wir zerlegen die Körper durch mechanische Theilung, wir betrachten sie unter dem Mikroskop, zerlegen sie endlich in ihre chemischen Bestandtheile.

Die mechanische Theilung hat bis jetzt über das Wesen der Stoffe wenig Aufschluss gegeben; sie hat sich nur als nützlich gezeigt, um größere ungleichartige Theile eines zusammengesetzten Körpers, und insbesondere um die Organe der Pflanzen und Thiere von einander zu trennen. Eine mechanische Theilung der homogenen Körper war stets ohne Erfolg, denn man erhielt

dabei immer nur kleinere Quantitäten des Stoffes, aus welchem das Ganze bestand.

Ergiebiger ist schon die Ausbeute, welche das Mikroskop geliefert hat. Insbesondere haben wir durch dasselbe sehr viel über die Art und Weise, wie die zusammengesetzten organischen Gebilde aus einfachen, zellenförmigen Gebilden sich aufbauen, kennen gelernt. Allein über den Stoff selbst, aus welchem diese Zellen bestehen, sowie auch über das Innere der homogenen unorganischen Stoffe sind wir auch durch dieses Mittel nicht mehr belehrt worden, als durch die mechanische Zertheilung.

Am weitesten vorgedrungen in das Innere der materiellen Beschaffenheit ist die Chemie. Sie vermag es, Stoffe, die unter den besten und stärkst vergrößernden Mikroskopen betrachtet noch immer als vollkommen homogen erscheinen, also durchaus keine Verschiedenheit in den einzelnen Theilen zeigen, in zwei oder mehrere Stoffe zu zerlegen, die weder unter sich noch mit dem Ganzen irgend eine Ähnlichkeit zeigen. Die Stoffe, welche durch solche Zerlegung erhalten werden, lassen sich zuweilen wiederum in zwei oder mehrere Stoffe trennen, die weder unter sich, noch mit jenen, aus welchen sie entstanden sind, irgend eine Ähnlichkeit haben. So fand man bereits über fünfundsechzig Elemente, deren weitere Zerlegung bis jetzt noch nicht gelang. Schon die bedeutende Zahl dieser Elemente, noch mehr aber die Ähnlichkeit, welche manche derselben und insbesondere die metallischen unter einander zeigen, lässt es wahrscheinlich erscheinen, dass es in der Folge gelingen wird, manche derselben noch weiter zu zerlegen, wodurch die Zahl der einfachen Stoffe immer kleiner und kleiner werden dürfte, bis man zuletzt auf einige wenige kommen wird, die in ihrem Wesen so homogen sind, dass eine weitere Zerlegung derselben gar nicht mehr möglich ist.

Aber auch dadurch wird der Forschungstrieb noch nicht befriedigt sein; denn dann entsteht erst wieder die Frage, was das Wesen dieser Grundstoffe sei? Und diese Frage kann die Chemie nicht mehr beantworten, sondern wir müssen in Folge dessen abermals zur mechanischen Zertheilung oder zum Mikroskope unsere Zuflucht nehmen, vorausgesetzt, dass die Leistungsfähigkeit beider Hilfsmittel den bedeutend gesteigerten Anforderungen entspricht.

Schulnachrichten.

Normallehrplan der Realschulen

nach den Bestimmungen der hohen k. k. Ministerial-Erlässe vom 15. April 1879, Z. 5607 und 27. April 1880, Z. 3814.

a) Übersichtliche Zusammenstellung der Lehrgegenstände nach ihrer wöchentlichen Stundenzahl.

Lehrgegenstände	Wöchentliche Stundenzahl Classe I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	Summe
Religion	2	2	2	2	—	—	—	8
Deutsche Sprache	4	3	4	3	3	3	3	23
Französische Sprache	5	4	4	3	3	3	3	25
Englische Sprache	—	—	—	—	3	3	3	9
Geographie	3	2	2	2	—	—	—	9
Geschichte	—	2	2	2	3	3	3	15
Mathematik	3	3	3	4	5	5	5	28
Naturgeschichte	3	3	—	—	3	2	3	14
Physik	—	—	4	2	—	4	4	13
Chemie	—	—	—	3	3	3	—	9
Geometrisches Zeichnen und darstellende Geometrie	—	3	3	3	3	3	3	18
Freihandzeichnen	6	4	4	4	4	2	4	29
Schönschreiben	1	1	—	—	—	—	—	2
Turnen	2	2	2	2	2	2	2	14
Summe....	29	29	30	30	32	33	33	216

Unobligate Lehrgegenstände: Italienische Sprache 3 St. wöchtl., Stenographie 2 St. wöchtl., Gesang 2 St. wöchtl. und Modellieren 3 St. wöchtl.

b) Übersichtliche Zusammenstellung der Lehr- und Classenziele nebst den an dieser Anstalt verwendeten Lehrbüchern.

Religionslehre

(gesondert für jede Confession).

I. bis IV. Classe wöchentlich je 2 Stunden.

Lehrziel und Classenziele werden von den kirchlichen Oberbehörden (für die Israeliten von den Vorständen der Cultusgemeinden) bestimmt und durch die Landesschulbehörden den Realschulen vorgezeichnet.

Für die katholischen Schüler sind laut h. Statthalterei-Erlasses vom 24. September 1870, Z. 28133, f. e. Ordinariat vom 19. September 1870, Z. 4212, folgende Normen bekannt gegeben worden:

In der ersten Classe soll die biblische Geschichte in zusammenhängender Darstellung, wie sie ein Ganzes bildet, mit besonderer Hervorhebung jenes Details vorgetragen werden, welches als Voraussetzung für die gründliche Kenntnis der Liturgik, dann der katholischen Glaubens- und Sittenlehre sich darstellt. (Drechsl, Bibl. Geschichte.)

In der zweiten Classe soll die katholische Glaubenslehre, in der dritten Classe die Sittenlehre zum Vortrage kommen, bei welchem insbesondere jene Einwürfe zu berücksichtigen sein werden, welche Jünglinge mit der gewöhnlichen Realienbildung häufig zu hören bekommen und am leichtesten fassen.

Mit dem Vortrage der kathol. Glaubens- und Sittenlehre ist an den geeigneten Stellen die Erklärung der am öftesten vorkommenden gottesdienstlichen Handlungen, insbesondere der h. Messe in Verbindung zu bringen. (Fischer, Kath. Religionslehre.)

In der vierten Classe ist den Schülern nach einem kurzen Überblicke der Religionsgeschichte nach Maßgabe der zugemessenen Zeit von zwei wöchentlichen Stunden eine Übersicht der Kirchengeschichte mit gleichzeitiger Berücksichtigung der Weltgeschichte vorzuführen und jeder gegebene Anlass zu benützen, um die häufigen Entstellungen der kirchengeschichtlichen Thatsachen zu berichtigen. Übrigens wird sich der Unterricht weniger mit Namen und Zahlen zu befassen, dagegen um so sorgfältiger die leitenden Ideen zu erörtern haben, so dass die Behandlung dieses Gegenstandes die Bedeutung des Religionsunterrichtes bewahre und nicht zur bloßen Geschichtsdarstellung werde. (Fischer, Lehrb. d. Kirchengeschichte.)

Für die israelitischen Schüler ist mit dem Erlasse des hochl. k. k. Landesschulrathes vom 28. August 1878, Z. 4563, nachstehender Lehrplan festgesetzt worden:

I. Classe, I. Semester: *a*) Biblische Geschichte. Von der Schöpfung bis zur Offenbarung. *b*) Bekanntmachung mit der Liturgie in Verbindung mit Übungen im Ebräischlesen (wie in der V. Volksschulclasse). II. Semester: *a*) Biblische Geschichte. Von der Offenbarung

bis zum Beginne des Königthums. *b*) Bekanntmachung mit der Liturgie in Verbindung mit Übungen im Ebräischlesen (wie in der V. Volksschulclasse).

II. Classe, I. Semester: *a*) Biblische Geschichte. Vom Beginne des Königthums bis zur Theilung des Reiches. *b*) Bekanntmachung mit der Liturgie in Verbindung mit Übungen im Ebräischlesen (wie in der VI. Volksschulclasse). II. Semester: *a*) Biblische Geschichte. Von der Theilung des Reiches bis zur Zerstörung des ersten Tempels. *b*) Bekanntmachung mit der Liturgie in Verbindung mit Übungen im Ebräischlesen (wie in der VI. Volksschulclasse). *c*) Ausgewählte historische Psalmen.

III. Classe, I. Semester: *a*) Biblische Geschichte. Von der Zerstörung des ersten bis zur Zerstörung des zweiten Tempels. *b*) Bibellectüre in deutscher Sprache: Genesis, Exodus, Leviticus. *c*) Ausgewählte historische Psalmen. II. Semester: *a*) Überschau der hervorragendsten Momente aus der jüdischen Geschichte bis auf Mendelssohn. *b*) Bibellectüre: Numeri, Deuteronomium. Ausgewählte Capitel aus den „ersten“ Propheten.

IV. Classe, I. Semester. *a*) Religionslehre: Glaubenslehre. Ausgewählte Sprüche. *b*) Bibellectüre: Ausgewählte Capitel aus den Psalmen und „späteren“ Propheten. II. Semester. *a*) Religionslehre: Pflichtenlehre, ausgewählte Sprüche. *b*) Bibellectüre: Ausgewählte Capitel aus den Psalmen und „späteren“ Propheten.

Deutsche Sprache.

Ziel für die Unterrealschule. Richtiges Lesen und Sprechen; Sicherheit im schriftlichen Gebrauche der Sprache ohne Fehler gegen Grammatik und Orthographie; sichere Kenntnis der Formenlehre und Syntax. Aneignung und correctes Vortragen wertvoller Gedichte.

Ziel für die Oberrealschule. Fertigkeit in zweckmäßig geordneter und stilistisch correcter Darstellung eines im Unterrichts- und Erfahrungskreise der Schüler gelegenen Gedankeninhaltes; durch eigene Lectüre gewonnene Bekanntschaft einer Auswahl des Bildendsten aus der deutschen Literatur; aus Beispielen abgeleitete Charakteristik der Hauptarten der poetischen und prosaischen Kunstformen; Kenntnis des Wichtigsten aus den Biographien der deutschen Classiker.

I. Classe, wöchentlich 4 Stunden. Die Wortarten, Flexion des Nomen und Verbum; der nackte Satz, Erweiterungen desselben, aufgezeigt und erklärt an einfachen Beispielen. Dem Schüler ist eine Schulgrammatik in die Hand zu geben.

Orthographische Übungen. Dictate, von dem Schüler in der Lection nachgeschrieben, vom Lehrer häuslich corrigiert.

Lectüre. Lautrichtiges und sinngemäßes Lesen; Erklärung des Gelesenen, Besprechung desselben in dialogischer Form, mündliches Reproducieren des Gelesenen. Memorieren und Vortragen erklärter Gedichte, mitunter auch prosaischer Abschnitte.

Deutsche Aufsätze. Schriftliches Wiedergeben einfacher Erzählungen oder kurzer Beschreibungen. In jedem Monat zwei Hausaufgaben und eine Schularbeit.

II. Classe, wöchentlich 3 Stunden. Vervollständigung der Formenlehre; Erweiterung der Lehre vom nackten und bekleideten Satze; die Satzverbindung und Satzordnung in ihren leichteren Arten.

Fortsetzung der orthographischen Übungen.

Alles Übrige wie in der I. Classe. Alle 14 Tage eine Hausaufgabe, alle 4 Wochen eine Schularbeit.

III. Classe, wöchentlich 4 Stunden. Der zusammengezogene und zusammengesetzte Satz; Arten der Nebensätze, Verkürzung derselben, indirecte Rede, die Periode. Systematische Belehrung über Orthographie und Zeichensetzung.

Lectüre. Genaues Eingehen auf die Gedankenabfolge und Gliederung der größeren prosaischen Lesestücke. Schärfung des Sinnes für die poetischen und rhetorischen Ausdrucksmittel. Bei der Erklärung classischer Gedichte sind von nun an leichtfassliche und passende biographische Notizen über die Verfasser mitzutheilen. Memorieren und Vortragen.

Aufsätze verschiedener Art, zum Theile sich anschließend an den Unterricht in der Geschichte, Geographie und in den Naturwissenschaften. Termine der schriftlichen Haus- und Schularbeiten wie in der II. Classe.

IV. Classe, wöchentlich 3 Stunden. Zusammenfassender Abschluss des gesammten grammatischen Unterrichtes. Zusammenstellung von Wortfamilien mit Rücksicht auf Vieldeutigkeit und Verwandtschaft der Wörter gelegentlich der Lectüre. Das Wichtigste aus der Prosodie und Metrik.

Lectüre wie in der III. Classe. In der Auswahl des Lesestoffes (von dem jedoch Übersetzungen poetischer Originale aus dem Lateinischen und Griechischen auszuschließen sind) ist auch die antike und germanische Götter- und Heldensage zu berücksichtigen. Memorieren und Vortragen.

Aufsätze, mit Berücksichtigung der im bürgerlichen Leben am häufigsten vorkommenden Geschäftsaufsätze. Termine der schriftlichen Haus- und Schularbeiten wie in der II. Classe.

V. Classe, wöchentlich 3 Stunden. Lectüre epischer und lyrischer Gedichte, so wie größerer prosaischer Schriftstücke; in die Auswahl sind auch charakteristische Abschnitte aus der altclassischen Literatur aufzunehmen. Elementare Belehrung über die wichtigsten Formen und Arten der epischen und lyrischen Poesie, so wie der vorzüglichsten prosaischen Darstellungsformen im Anschlusse und auf Grund der Lectüre. Übungen im Vortragen poetischer und prosaischer Schriftstücke.

Aufsätze concreten Inhaltes im Anschlusse an die Lectüre und an das in anderen Disciplinen Gelernte. Beginn der (in den beiden nächst höheren Classen fortzusetzenden) besonderen Anleitung zum

richtigen Disponieren auf dem Wege der Analyse passender Aufsätze und bei Gelegenheit der Vorbereitung und Durchnahme der schriftlichen Arbeiten.

In jedem Semester 6—7 Aufsätze, in der Regel zur häuslichen Bearbeitung.

VI. Classe, wöchentlich 3 Stunden. I. Semester. Lectüre einer Auswahl aus dem Nibelungenliede und aus Walther von der Vogelweide, wo möglich, nach dem Grundtexte, unter Hervorhebung der unterscheidenden Merkmale der mhd. und nhd. Sprachformen. Anschauliche Darstellung der Abzweigungen des indo-europäischen Sprachstammes und der deutschen Sprache, Eintheilung der deutschen Literaturgeschichte in Hauptperioden; Besprechung der großen nationalen Sagenkreise im Anschlusse an die Lectüre des Nibelungenliedes; Aufklärung über die Grundlegung der neuhochdeutschen Schriftsprache. II. Semester. Lectüre. Prosaische Schriftstücke, vorwiegend aus der classischen Literaturperiode; lyrische Auswahl mit vorzüglicher Berücksichtigung Klopstock's, Schiller's und Goethe's; ein Drama, nach Thunlichkeit zwei, von Schiller, Lessing oder Goethe. Aufklärung über die Entstehung und etwaigen geschichtlichen Grundlagen der in der Schule gelesenen Dramen. Leichtfassliche (der tiefer eingehenden Bearbeitung dieses Gegenstandes in der obersten Classe vorbereitende) Erklärung der Hauptpunkte der Dramatik. Übungen im Vortragen prosaischer und poetischer Schriftstücke.

Aufsätze wie in der V. Classe, mit angemessener Steigerung der Forderungen eigener Production. In jedem Semester 6—7 Aufsätze, in der Regel zur häuslichen Bearbeitung.

VII. Classe, wöchentlich 3 Stunden. Lectüre wie im II. Semester der VI. Classe, außerdem Goethe's „Hermann und Dorothea" und, wo die Verhältnisse der Schule es gestatten, Shakespeare's „Julius Caesar" oder „Coriolan".

Zusammenhängende biographische Mittheilungen über die Hauptvertreter der classischen Literatur in einer dem Schulzweck entsprechenden Auswahl und Ausführlichkeit.

Übungen im prämeditierten freien Vortrage. In jedem Semester 6—7 Aufsätze, in der Mehrzahl zur häuslichen Bearbeitung. (Bauer, Grammatik. Egger, Lesebuch für die I. und II. Classe; Neumann und Gehlen, Lesebuch für die anderen Unterclassen. Egger, Lesebuch für die Oberclassen. Jauker und Noe, Mittelh. Lesebuch.)

Französische Sprache.

Lehrziel für die Unterrealschule. Kenntnis der Formenlehre und der wichtigsten syntaktischen Regeln; einige Fertigkeit im Übersetzen aus dem Französischen und in dasselbe innerhalb des von der Schule dargebotenen Sprachschatzes.

Lehrziel für die gesammte Realschule. Kenntnis der Formenlehre und Syntax; Fertigkeit im Übersetzen aus dem Fran-

zösischen und in dasselbe; einige Übung in der Ausarbeitung leichter französischer Aufsätze; einige Sicherheit im mündlichen Gebrauche der französischen Sprache innerhalb des in der Schule behandelten Ideenkreises; Bekanntschaft mit einer Auswahl hervorragender Werke der französischen Literatur seit dem Beginne des XVII. Jahrhunderts.

I. Classe, wöchentlich 5 Stunden. Leselehre. Formenlehre mit Berücksichtigung der Elemente der Lautlehre und zwar: das Substantif und sein genre, das Adjectif qualitatif, Adj. possessif und démonstratif; I. regelmäßige Conjugation; Bildung der zusammengesetzten Zeiten. Elemente der Orthographie; Construction des einfachen Satzes; Frage- und negative Form. Mündliche und schriftliche Übersetzung einfacher Sätze aus dem Französischen und in dasselbe. Aneignung eines entsprechenden Wortvorrathes. Vorbereitete Dictate. Kleine Hausarbeiten nach Erfordernis; alle 14 Tage eine Schularbeit.

II. Classe, wöchentlich 4 Stunden. Fortsetzung der Formenlehre. Die Adjectifs numéraux, Comparation; die Pronoms; die drei regelmäßigen Conjugationen; der Article partitif; das Adverbe; Préposition; Syntax des Pronom personnel conjoint; die gebräuchlichsten unregelmäßigen Verben mit Ausfall des Stammconsonanten (verbes auf uire, ire, etc.). Mündliche und schriftliche Übersetzungen aus dem Französischen und in dasselbe. Vermehrung des Wortvorrathes. Vorbereitete Dictate. Lectüre leichter Erzählungen. Kleine Hausarbeiten nach Erfordernis; alle 14 Tage eine Schularbeit.

III. Classe, wöchentlich 4 Stunden. Wiederholung und Ergänzung der Formenlehre. Systematische Behandlung der unregelmäßigen (starken) Verben auf Grund der Lautgesetze; Verbes défectifs und impersonnels; Conjonctions; der zusammengesetzte Satz; Syntax des Article; Anwendung der Verbes auxiliaires. Mündliche und schriftliche Übersetzungen aus dem Französischen und in dasselbe. Leichte prosaische und poetische Lectüre in einem französischen Lesebuche. Versuche in mündlicher Reproduction gelesener Stücke. Memorieren kurzer Lesestücke. Vermehrung des Wortvorrathes, namentlich Aneignung der üblichsten Phraseologie auf Grundlage der behandelten Verben. Vorbereitete Dictate. Hausarbeiten wie in der II. Classe; jeden Monat eine Schularbeit.

IV. Classe, wöchentlich 3 Stunden. Formenlehre der Composita (substantifs und adjectifs); Elemente der Wortbildung. Syntax, insbesondere Rections-, Modus- und Tempuslehre. Mündliche und schriftliche Übersetzungen aus dem Französischen und in dasselbe. Prosaische und poetische Lectüre in einem französischen Lesebuche. Mündliche Reproduction wie in der III. Classe. Memorieren kurzer Lesestücke. Vermehrung des Wortvorrathes. Dictate. Alle 14 Tage eine längere Hausarbeit; alle 4 Wochen eine Schularbeit.

V. Classe, wöchentlich 3 Stunden. Wiederholung und Ergänzung der Syntax. Systematische (logische) Behandlung der Adverbialsätze. Interpunctionslehre. Mündliche und schriftliche Übungen. Lectüre von möglichst abgeschlossenen Musterstücken der französischen

Literatur mit besonderer Berücksichtigung der Prosa, und verbunden mit kurzen biographischen Notizen über die betreffenden Autoren. Memorieren einzelner kleinerer Abschnitte. Vermehrung des Wortvorrathes. Dictate. Kleine Sprechübungen im Anschlusse an die Lectüre. Alle 14 Tage eine umfangreichere Hausarbeit; alle 4 Wochen eine Schularbeit.

VI. Classe, wöchentlich 3 Stunden. Abschluss des grammatischen Unterrichtes. Participialconstructionen, erschöpfende Darstellung der Regeln über die Participes; die Periode; elliptische Sätze. Stilistische Übungen. Lectüre größerer Fragmente descriptiver und didactischer Prosa, so wie Muster der Epik, Lyrik und didactischer Poesie, verbunden mit kurzen biographischen Notizen über die betreffenden Autoren. Sprechübungen im Anschlusse an die Lectüre. Haus- und Schularbeiten wie in der V. Classe. Der Unterricht bedient sich versuchsweise der französischen Sprache.

VII. Classe, wöchentlich 3 Stunden. Cursorische Wiederholung der wichtigsten grammatischen Lehren. Lectüre von längeren Musterstücken rhetorischer, reflectierender oder philosophisch-historischer Prosa, so wie dramatischer Dichtung, nach Umständen eines ganzen classischen Dramas, verbunden mit biographischen Notizen über die betreffenden Autoren. Leichte französische Aufsätze im Anschlusse an die Lectüre, und in der Schule vorbereitete Briefe. Sprechübungen. Der Unterricht bedient sich gelegentlich der französischen Sprache. Haus- und Schularbeiten wie in der V. Classe.

(Für die I. und II. Classe: Plötz, Elementar-Grammatik; für die anderen Classen: Plötz, Schulgrammatik; lectures choisies. Bechtel, franz. Chrestomathie.)

Englische Sprache.

Lehrziel. Richtige Aussprache, Sicherheit in der Formenlehre und Syntax; Fertigkeit in dem Übersetzen nicht allzu schwerer vornehmlich prosaischer Literaturwerke aus dem Englischen ins Deutsche, so wie leichter Prosa aus dem Deutschen ins Englische.

V. Classe, wöchentlich 3 Stunden. Lese- und Aussprache-Lehre auf Grund der leicht verständlichen Lautgesetze; die Betonung mit Hinweis auf den germanischen und romanischen Ursprung der Wörter. Formenlehre sämmtlicher Redetheile mit Übergehung der veralteten oder speciellen Fächern eigenen Formen. Syntax des einfachen Satzes; das Verhältnis des Nebensatzes zum Hauptsatze, so weit die Kenntnis desselben zum Verständnisse einfacher Lesestücke erforderlich ist. Mündliches und schriftliches Übersetzen englischer Sätze in das Deutsche und umgekehrt. Englische Dictate über den in der Grammatik und beim Lesen behandelten Lehrstoff. Alle 14 Tage die Übersetzung einer größeren Anzahl Sätze ins Englische als Hausarbeit. Im II. Semester Lesen leichter Erzählungen in Prosa.

VI. Classe, wöchentlich 3 Stunden. Vervollständigung der Formenlehre durch die anomalen und schwierigen Elemente (Pluralbildung

der Composita). Syntax sämmtlicher Redetheile, des einfachen und zusammengesetzten Satzes in den üblichen Constructionen. Die nothwendigsten Elemente der Wortbildung im Anschlusse an die deutsche und die französische Literatur. Alle 14 Tage eine umfangreichere Übersetzung aus der Unterrichtssprache ins Englische. Dictate im Anschlusse an die Lectüre. Lectüre von Musterstücken erzählender, descriptiver und epistolarer Gattung, so wie leichter Gedichte auf Grund eines Lesebuches.

VII. Classe, wöchentlich 3 Stunden. Vervollständigung der Syntax durch die schwierigeren Participial- und Gerundial-Constructionen, die elliptischen Sätze und die Interpunction. Alle 4 Wochen eine schriftliche Übersetzung aus der Unterrichtssprache ins Englische als Haus- und einer solchen, zeitweilig eines schwierigen Abschnittes aus einem englischen Prosawerk in die Unterrichtssprache als Schul-Arbeit. Lectüre historischer, reflectierender und oratorischer Prosa, so wie der Hauptscenen eines Dramas von Shakespeare und abgeschlossener Fragmente aus der classischen Epik oder Didaktik. Versuche mündlicher Reproduction des Gelesenen in englischer Sprache.

(Sonnenburg, Grammatik der englischen Sprache. Lectüre **hier und im Französischen nach Auswahl.)**

Geographie und Geschichte.

Lehrziel für die Unterrealschule. Allgemeine Kenntnis der natürlichen Beschaffenheit der Erdoberfläche und der politischen Reiche mit besonderer Hervorhebung der österreichisch-ungarischen Monarchie. Bekanntschaft mit den hervorragendsten Personen und Ereignissen aus der Sagenwelt und der eigentlichen Geschichte.

Lehrziel für die gesammte Realschule. Kenntnis der topischen Verhältnisse und der wichtigsten physikalischen Erscheinungen auf der Erdoberfläche. Völker- und Länderkunde mit besonderer Berücksichtigung der österreichisch-ungarischen Monarchie. Kenntnis der Hauptbegebenheiten aus der inneren und äußeren Geschichte der wichtigeren Völker nach ihrem pragmatischen Zusammenhange, und insbesondere der historischen Entwicklung Österreich-Ungarns.

I. Classe, wöchentlich 3 Stunden. Die Hauptformen des Festen und Flüssigen auf der Erde, ihre Anordnung und Vertheilung und die politischen Abgrenzungen der Erdtheile als übersichtliche Beschreibung der Erdoberfläche nach ihrer natürlichen Beschaffenheit und politischen Eintheilung, auf Grund des Kartenbildes. Fundamentalsätze der mathematischen und physikalischen Geographie, so weit sie zum Verständnis der einfachsten Erscheinungen unentbehrlich sind und anschaulich erörtert werden können.

II. Classe, wöchentlich 4 Stunden. *A.* Geographie, 2 Stunden. Specielle Geographie Asiens und Afrikas in physikalischer, topo-

graphischer und ethnographischer Beziehung. Übersicht der Bodengestalt, der Stromgebiete und der Länder Europas: specielle Geographie der Länder des südlichen Europa in der angegebenen Weise. *B.* Geschichte, 2 Stunden. Geschichte des Alterthums, hauptsächlich der Griechen und Römer, mit besonderer Hervorhebung des sagenhaften und biographischen Stoffes.

III. Classe, wöchentlich 4 Stunden. *A.* Geographie, 2 Stunden. Specielle Geographie des übrigen Europa mit Ausschluss der österreichisch-ungarischen Monarchie, in der angegebenen Weise. *B.* Geschichte, 2 Stunden. Geschichte des Mittelalters unter steter Berücksichtigung der vaterländischen Momente.

IV. Classe, wöchentlich 4 Stunden. *A.* Geographie, 2 Stunden. Specielle Geographie Amerikas, Australiens und der österreichisch-ungarischen Monarchie, mit Berücksichtigung der Verfassungsverhältnisse des Kaiserstaates. *B.* Geschichte, 2 Stunden. Übersicht der Geschichte der Neuzeit, mit eingehenderer Behandlung der Geschichte von Österreich.

Anmerkung 1. Das Zeichnen der Karten, theils als Skizzen einzelner Objecte aus freier Hand und aus dem Gedächtnisse, theils als schematische Darstellungen, theils als Kartenbilder in der einfachsten Form auf Grundlage des Gradnetzes wird in allen Classen vorgenommen.

Anmerkung 2. In Classe V. VI. und VII. tritt die Geographie nicht mehr selbständig, sondern nur in Verbindung mit dem Geschichtsunterrichte auf, wo sie als gelegentliche, durch irgend welchen Anlass gebotene und Früheres ergänzende Wiederholung, vorzugsweise aber zur Erläuterung historischer Thatsachen im weiteren Sinne eine Stelle findet.

V. Classe, wöchentlich 3 Stunden. Geschichte des Alterthums, namentlich der Griechen und Römer, mit besonderer Hervorhebung der culturhistorischen Momente und mit fortwährender Berücksichtigung der Geographie.

VI. Classe, wöchentlich 3 Stunden. Geschichte des Mittelalters und der Neuzeit bis zum westphälischen Frieden in gleicher Behandlungsweise und mit specieller Rücksicht auf die österreichisch-ungarische Monarchie.

VII. Classe, wöchentlich 3 Stunden. Geschichte der Neuzeit seit dem westphälischen Frieden in derselben Behandlungsweise. Kurze Übersicht der Statistik Österreich-Ungarns mit Hervorhebung der Verfassungsverhältnisse.

(Für die I. Classe, Seidlitz, Schulgeographie, Vorstufe. Für die anderen Classen: Seidlitz, Kleine Schulgeographie. Atlanten von Kozenn, Sydow oder Stieler. Trampler, Statistik. Hannak, Geschichte für die Unterclassen. Hannak, Vaterlandskunde. Gindely, Geschichte für die Oberclassen. Geschichts-Atlanten von Kiepert-Wolff.)

Mathematik.

Lehrziel: Gründliche Kenntnis und sichere Durchübung der elementaren Mathematik.

I. Classe, wöchentlich 3 Stunden. Erörterung des decadischen Zahlensystemes. Die vier ersten Grundoperationen mit unbenannten und mit einfach benannten Zahlen ohne und mit Decimalien. Erklärung des metrischen Maß- und Gewichtssystemes. Grundzüge der Theilbarkeit der Zahlen; größtes gemeinsames Maß und kleinstes gemeinsames Vielfache. Gemeine Brüche. Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche und umgekehrt. Das Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen.

II. Classe, wöchentlich 3 Stunden. Abgekürzte Multiplication und abgekürzte Division. Das Rechnen mit periodischen und mit unvollständigen Decimalbrüchen mit Rücksicht auf die nothwendigen Abkürzungen. Das Wichtigste aus der Maß- und Gewichtskunde, aus dem Geld- und Münzwesen. Maß-, Gewichts- und Münzreduction, Schlussrechnung (Zurückführung auf die Einheit) auf einfache und zusammengesetzte Aufgaben angewandt. Lehre von den Verhältnissen und Proportionen, deren Anwendung: Regeldetri, Kettensatz; Procent-, einfache Zins-, Discont- und Terminrechnung.

III. Classe, wöchentlich 3 Stunden. Theilregel, Durchschnitts- und Allegationsrechnung. Die vier Grundoperationen in allgemeinen Zahlen mit ein- und mehrgliedrigen Ausdrücken. Quadrierung und Cubierung ein- und mehrgliedriger algebraischer Ausdrücke so wie decadischer Zahlen. Ausziehung der zweiten und dritten Wurzel aus decadischen Zahlen. Fortgesetzte Übungen im Rechnen mit besonderen Zahlen zur Wiederholung des arithmetischen Lehrstoffes der früheren Classen, angewandt vorzugsweise auf Rechnungsaufgaben des bürgerlichen Geschäftslebens. Zinseszinsenrechnung.

IV. Classe, wöchentlich 4 Stunden. Allgemeine Arithmetik. Wissenschaftlich durchgeführte Lehre von den vier ersten Rechnungsoperationen. Grundlehren der Theilbarkeit der Zahlen. Theorie des größten gemeinsamen Maßes und des kleinsten gemeinsamen Vielfachen, angewandt auch auf Polynome. Lehre von den gemeinen Brüchen; Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche und umgekehrt. Gründliches Eingehen in das Rechnen mit Decimalien, insbesondere in das Verfahren der abgekürzten Multiplication und Division. Lehre von den Verhältnissen und Proportionen nebst Anwendungen. Lehre von der Auflösung der Gleichungen des ersten Grades mit einer und mit mehreren Unbekannten nebst Anwendung auf praktisch wichtige Aufgaben.

V. Classe, wöchentlich 5 Stunden. Allgemeine Arithmetik. Kettenbrüche. Unbestimmte (diophantische) Gleichungen des ersten Grades. Lehre von den Potenzen und Wurzelgrößen, und insbesondere das Quadrieren und Cubieren mehrgliedriger Ausdrücke, so wie das Ausziehen der zweiten und dritten Wurzel aus mehrgliedrigen Ausdrücken und aus besonderen Zahlen. Die Lehre von den Logarithmen

und deren Beziehung zu der Potenzlehre. Das System der Brigg'schen Logarithmen. Die Einrichtung und der Gebrauch der Logarithmen-Tafeln. Gleichungen des zweiten Grades mit einer Unbekannten.

Geometrie der Ebene (Planimetrie) streng wissenschaftlich behandelt. Geometrische Grundbegriffe. Die gerade Linie, der Winkel, seine Arten und seine Messung. Parallele Linien. Das Dreieck, seine Grundeigenschaften; Congruenz der Dreiecke und die daraus sich ergebenden Eigenschaften des Dreieckes. Das Vieleck, seine Grundeigenschaften; Congruenz der Vielecke, das reguläre Vieleck. Eingehendere Behandlung des Viereckes. Proportionalität der Strecken und Ähnlichkeit der ebenen Figuren und zwar: Ähnlichkeit der Dreiecke und daraus sich ergebende Eigenschaften des Dreieckes; Ähnlichkeit der Vielecke. Flächeninhalt geradliniger Figuren, einiges über Verwandlung und Theilung derselben. Die Lehre vom Kreise, regelmäßige, dem Kreise eingeschriebene und umgeschriebene Vielecke. Kreismessung.

VI. Classe, wöchentlich 5 Stunden. Allgemeine Arithmetik. Arithmetische und geometrische Progressionen. Anwendungen auf Zinseszinsen- und Rentenrechnung. Combinationslehre. Binomischer Lehrsatz für ganze und positive Exponenten. Behandlung solcher höherer Gleichungen, welche auf quadratische zurückgeführt werden können; quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten, in einfachen Fällen (symmetrische Gleichungen) mit mehreren Unbekannten. Exponentialgleichungen. Fortgesetzte Übungen im Gebrauche der logarithmischen Tafeln. Behandlung einiger der einfachsten Fälle von unbestimmten Gleichungen des zweiten Grades mit zwei Unbekannten.

Geometrie, 1. Goniometrie und zwar Begriff der goniometrischen Functionen; Beziehungen zwischen den Functionen desselben Winkels, verschiedener in einem bestimmten Zusammenhange mit einander stehender Winkel, ferner einfacher und aus diesen zusammengesetzter Winkel. Gebrauch trigonometrischer Tafeln. Einige Aufgaben über goniometrische Gleichungen.

2. Ebene Trigonometrie. Hauptsätze zur Auflösung des rechtwinkeligen Dreiecks und specielle Behandlung der betreffenden Hauptfälle. Anwendung auf die Auflösung gleichschenkeliger Dreiecke und auf die regelmäßigen Vielecke. Hauptsätze zur Auflösung schiefwinkeliger Dreiecke. Besondere Behandlung der Hauptfälle der Auflösung schiefwinkeliger Dreiecke. Anwendung auf einige combinierte Fälle, so wie auf Aufgaben der Cyklometrie und der praktischen Geometrie.

3. Geometrie des Raumes (Stereometrie). Die wichtigsten Sätze über die Lage der Geraden im Raume gegen einander so wie zu einer Ebene, und über die Lage der Ebenen gegen einander. Grundeigenschaften der körperlichen Ecke überhaupt, insbesondere der dreiseitigen körperlichen Ecke (die Polarecke); Congruenz und Symmetrie. Eintheilung der Körper. Grundeigenschaften und Congruenz der Prismen überhaupt, des Parallelepipeds insbesondere und der Pyramiden. Berechnung der Oberfläche und des Rauminhaltes der

Prismen, der Pyramiden, des Pyramidalstutzes und des Prismatoids. Ähnlichkeit der Pyramiden und der Polyeder. Die regulären Polyeder. Grundeigenschaften des Cylinders, des Kegels, der Kugel. Berechnung des Rauminhaltes dieser Körper und der Oberfläche des geraden Cylinders, des geraden, ganzen und abgekürzten Kegels und der Kugel. Einige Aufgaben über Berechnung der Oberfläche und des Rauminhaltes von Rotationskörpern.

VII. Classe, wöchentlich 5 Stunden. Allgemeine Arithmetik. Grundlehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Durchführung einiger Aufgaben aus dem Gebiete der Lebensversicherungs-Rechnung. — Die Zerlegung imaginärer Ausdrücke in ihren reellen und imaginären Theil, die Berechnung des Moduls und Arguments, und die graphische Darstellung complexer Größen.

Geometrie. Grundlehren der analytischen Geometrie der Ebene. Als Einleitung einiges über Anwendung der Algebra auf die Geometrie. Erläuterung der gebräuchlichsten Coordinatensysteme. Transformation der Coordinaten. Analytische Behandlung der geraden Linie, des Kreises, der Parabel, Ellipse und Hyperbel: Jede dieser Curven insbesondere, ausgehend von ihrer speciellen Grundeigenschaft und mit Einschränkung auf jene wichtigsten Eigenschaften dieser Linien, welche auf Brennpunkte, Tangenten und Normalen sich beziehen, stets mit Zugrundelegung des rechtwinkeligen Coordinatensystemes. Quadratur der Parabel und der Ellipse. — Polargleichung des Kreises und jeder der Kegelschnittslinien unter Annahme des Brennpunktes als Pol, und der Hauptachse als Polarachse.

Sphärische Trigonometrie. Als Einleitung die Erörterung der wichtigsten Grundeigenschaften des sphärischen Dreieckes (das Polardreieck). — Grundformeln und Behandlung der Hauptfälle der Auflösung rechtwinkeliger sphärischer Dreiecke, sodann in gleicher Weise der schiefwinkeligen Dreiecke. Flächeninhalt des sphärischen Dreieckes. — Anwendung der sphärischen Trigonometrie auf Stereometrie und auf einige der einfachsten Aufgaben aus der sphärischen Astronomie.

Wiederholung des gesammten arithmetischen und geometrischen Lehrstoffes der oberen Classen, vornehmlich in praktischer Weise durch Lösung von Übungsaufgaben. (Villicus, Arithmetik für die Unterclassen. In der IV. und V. Classe die mathematischen Lehrbücher von Ševčik-Salomon; in der VI. Classe jene von Haberl und Wiegand; in der VII. Classe Ševčik. Aufgaben-Sammlungen von Heis und Zampieri.)

Naturgeschichte.

Lehrziel für die Unterrealschule. Auf Anschauung gegründete, im Unterscheiden geübte Bekanntschaft mit den wichtigsten Formen der organischen und unorganischen Welt.

Lehrziel für die gesammte Realschule. Systematische Übersicht der Thier- und Pflanzengruppen auf Grund der Bekanntschaft mit den wichtigsten Thatsachen aus ihrer Anatomie, Physiologie und Morphologie. Kenntnis der Formen und Eigenschaften der wichtigeren Mineralien, sowie der wichtigsten Thatsachen aus dem Gebiete der Geologie.

I. Classe, wöchentlich 3 Stunden. Anschauungsunterricht, und zwar: I. Semester: Wirbelthiere, vorwiegend Säugethiere und Vögel; eine Anzahl passend ausgewählter Formen der übrigen Classen. II. Semester: Wirbellose Thiere, vorzugsweise Gliederthiere, namentlich Insecten; einige der wichtigsten und bekanntesten Formen aus der Abtheilung der Weich- und Strahlthiere.

II. Classe, wöchentlich 3 Stunden. Anschauungsunterricht, und zwar: I. Semester: Mineralogie. Beobachtung und Beschreibung einer mäßigen Anzahl von Mineralarten ohne besondere Rücksichtnahme auf Systematik mit gelegentlicher Vorweisung der gewöhnlichsten Gesteinsformen. II. Semester: Botanik. Beobachtung und Beschreibung einer Anzahl von Samenpflanzen verschiedener Ordnungen; allmähliche Anbahnung der Auffassung einiger natürlichen Familien; Einbeziehung einiger Formen der Sporenpflanzen in den Kreis der Betrachtung.

V. Classe, wöchentlich 3 Stunden. Zoologie. Das Wichtigste über den Bau des Menschen und die Verrichtungen der Organe desselben; Behandlung der Classen der Wirbelthiere und der wichtigeren Gruppen der wirbellosen Thiere mit Rücksichtnahme auf anatomische, morphologische und entwicklungsgeschichtliche Verhältnisse, jedoch unter Ausschluss alles entbehrlichen systematischen Details.

VI. Classe, wöchentlich 2 Stunden. Botanik. Betrachtung der Gruppen des Pflanzenreichs in ihrer natürlichen Anordnung mit Rücksichtnahme auf den anatomisch-morphologischen Bau derselben und auf die Lebensverrichtungen der Pflanze im allgemeinen; der Charakter der wichtigsten Pflanzenfamilien ist zu entwickeln, alles entbehrliche systematische Detail jedoch bleibt ausgeschlossen.

VII. Classe, wöchentlich 3 Stunden. I. Semester: Mineralogie. Kurze Darstellung der Krystallographie, dann Behandlung der wichtigsten Mineralien hinsichtlich der physikalischen, chemischen und sonstigen belehrenden Beziehungen nach einem Systeme, jedoch mit Ausschluss aller seltenen oder der Anschauung der Schüler nicht zugänglichen Formen. II. Semester. Elemente der Geologie. Physikalische und chemische Veränderungen im Großen in zusammenfassender kurzer Darstellung unter Bezugnahme auf passende Beispiele; die häufigsten Gebirgsgesteine und die wesentlichsten Verhältnisse des Gebirgsbaues, wo möglich durch Illustrierung an naheliegenden Beispielen; kurze Beschreibung der geologischen Weltalter mit häufigen Rückblicken bei Besprechung der vorweltlichen Thier- und Pflanzenformen auf die Formen der Gegenwart und mit gelegentlicher Hinweisung auf stammverwandtschaftliche Beziehungen der Lebewesen. (Für die Unterclassen: Pokorny, Naturgeschichte.

Für die V. Classe: Woldrich, Zoologie; für die VI. Classe: Wretschko, Botanik; für die VII. Classe: Hochstetter und Bisching, Mineralogie und Geologie).

Physik.

Lehrziel für die Unterrealschule. Durch das Experiment vermittelte Kenntnis der leichtfasslichen Naturerscheinungen und ihrer Gesetze, mit einiger Berücksichtigung der praktischen Anwendungen.

Lehrziel für die gesammte Realschule. Verständnis der wichtigsten Naturerscheinungen, vermittelt durch experimentelle und andere Beobachtungen unter Anwendung der Rechnung, soweit hierzu elementar-mathematische Kenntnisse ausreichen.

III. Classe, wöchentlich 3 Stunden. Allgemeine Eigenschaften der Körper. Aggregationszustände. Wärmelehre: Volums- und Aggregationsänderungen, Temperatur, Wärmemengen, Leitung und Strahlung. — Magnetismus: Natürliche Magnete, Erregung des Magnetismus in Eisen und Stahl; Magnetismus des Erdkörpers; Declination, Compass. — Elektricität: Grundbegriffe, Vertheilung (Influenz); einfache Elektrisiermaschine. Galvanismus, galvanische Elemente. Wirkungen des galvanischen Stromes. Inductionserscheinungen. — Akustik: Das Einfachste über Entstehung, Fortpflanzung und Wahrnehmung des Schalles. Entstehung der Töne im allgemeinen, Maß der Tonhöhe (Sirene). Tonerzeugung durch Saiten, Stimmgabeln, Platten, Pfeifen, Stimm- und Hörorgan.

IV. Classe, wöchentlich 3 Stunden. Mechanik: Einfachste Bewegungsarten, Bewegungsparallelogramm, Kräfteparallelogramm. Begriff der Masse, erläutert mittelst der Atwood'schen Fallmaschine; Schwerkraft, Schwerpunkt. Der Hebel als Wagebalken. Pendel. Entstehung krummliniger Bewegung, Fliehkraft. Bewegungshindernisse. Experimentelle Ermittelung statischer Verhältnisse an einfachen Maschinen. — Hydrostatische Fundamentalgesetze. Specifisches Gewicht, relative Dichte. Segner's Rad. — Torricelli's Versuch, Barometer, Mariotte'sches Gesetz, Luftpumpe. — (Geometrische) Optik: Geradlinige Fortpflanzung des Lichtes, Reflexionsgesetz, plane und sphärische Spiegel; Brechung des Lichtes; Farbenzerstreuung, Sonnenspectrum; Sammel- und Zerstreuungslinsen, Construction und Demonstration der Linsenbilder; Camera obscura. Das Auge, Lupe, astronomisches Fernrohr, zusammengesetztes Mikroskop. Galilei'sches Fernrohr. Sonnenspectrum. Strahlende Wärme.

VI. Classe, wöchentlich 3 Stunden. Methode der Physik. Mechanik: Statik des materiellen Punktes und starrer Systeme von zwei und mehreren fest verbundenen Angriffspunkten. Dynamik des materiellen Punktes. Mechanische Arbeit, lebendige Kraft. Gesetze der schwingenden Bewegung. Krummlinige Bewegung. Elemente der Dynamik starrer Systeme, Trägheitsmomente; Wage. Begriff des Princips der virtuellen Bewegungen. Erläuterung desselben am Hebel und

an der schiefen Ebene, Anwendung desselben auf die Decimalwage. Einige Erscheinungen, welche auf der Rotation des Erdkörpers beruhen. — Hydrostatischer Druck, Auftrieb; Ausflussgeschwindigkeit. — Gesetze von Mariotte und Gay-Lussac. Barometrische Höhenmessung. — Wellenlehre: Reflexion, einfache Brechung, Interferenz. — Akustik: Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in festen Körpern und in Gasen. Monochord, Tonleiter.

VII. Classe, wöchentlich 4 Stunden. Magnetismus: Magnetisches Moment eines Stabes. Erdmagnetische Horizontalintensität. Weber'scher Apparat. — Elektricität: Coulomb'sches Gesetz; elektrische Influenz, Ansammlungsapparate. Ohm'sches Gesetz; chemische Stromeinheit, Siemens'sche Widerstandseinheit; Proportionalität der chemischen und der magnetischen Action; Weber'sche Stromeinheit, Weber'sche Tangenten-Boussole. Magnetoelektrische und elektrodynamische Induction. Andeutung einiger technischen Anwendungen im Gebiete der Elektricität und des Magnetismus. Thermosäule. — Optik: Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes. Gesetz der Reflexion, Gesetz der Brechung, Anwendung zur Berechnung und Construction der durch Linsen erzeugten Bilder. Sphärische, chromatische Abweichung. Fernrohre und Mikroskope. Interferenz- und Beugungserscheinungen. Polarisiertes Licht. Doppelte Brechung. Chemische Wirkungen des Lichtes. — Wärmelehre: Ausdehnungscoefficienten, Temperatur-Correctionen; Luftthermometer. Calorimetrie. Eigenschaften der Dämpfe, die Dampfmaschine. Hygrometrie. Erzeugung der Wärme durch mechanische Arbeit und umgekehrt. — Astronomische Grundbegriffe. Tägliche Erscheinungen des gestirnten Himmels. Astronomische Coordinaten. Bewegung der Erde, Präcession der Nachtgleichen. Zeitrechnung. (Für die Unterclassen: Krist, Naturlehre. Für die Oberclassen: Münch, Lehrbuch der Physik.)

Chemie.

Lehrziel. Auf experimentellem Wege erworbenes Verständnis der stoffliche Veränderungen bewirkenden Vorgänge, der Bedingungen ihres Zustandekommens und der Gesetzmäßigkeit ihres Auftretens. Übersichtliche Kenntnis der chemischen Grundstoffe und ihrer Verbindungen mit besonderer Bezugnahme auf ihr Vorkommen und ihre Bedeutung für den Haushalt der Natur, sowie auf ihre industrielle Verwerthung.

IV. Classe, wöchentlich 3 Stunden. Vorbereitender Theil. Vorführung der wichtigsten physikalisch-chemischen Erscheinungen und Processe. Gedrängte Charakteristik der Elemente und der verschiedenen Arten der aus ihnen entstehenden Verbindungen.

V. Classe, wöchentlich 3 Stunden. Specielle Chemie, I. Theil: Anorganische Chemie.

VI. Classe, wöchentlich 3 Stunden. Specielle Chemie, II. Theil: Chemie der kohlenstoffhaltigen Verbindungen. (Organische Chemie.) Theoreme der allgemeinen Chemie; Constitution chemischer Verbin-

dungen. — Praktische Arbeiten (im Laboratorium) vorgeschrittener Schüler der letzten zwei Classen der Oberrealschule können nur außerhalb der obligaten Unterrichtsstunden stattfinden. (Für die IV. Classe: Kauer, Elemente der Chemie. Für die V. und VI. Classe: Mitteregger, Lehrbuch der Chemie.)

Geometrisches Zeichnen*).

Lehrziel für die Unterrealschule. Kenntnis der wichtigsten Lehrsätze der Geometrie und ihrer Anwendungen in der geometrischen Constructionslehre; Fertigkeit im Linearzeichnen.

Lehrziel für die gesammte Realschule. Kenntnis der wichtigsten Lehrsätze und Aufgaben der Projectionslehre und sichere Handhabung derselben in ihrer Anwendung auf die Schattenlehre und die Darstellung einfacher technischer Objecte.

II. Classe, wöchentlich 3 Stunden. *a*) Geometrie. Elemente der Planimetrie bis zur Flächenberechnung. *b*) Geometrisches Zeichnen. Übungen im Gebrauche der Reißinstrumente. Constructionszeichenübungen im Anschlusse an den in der Planimetrie abgehandelten Lehrstoff und unter Berücksichtigung der einfachen ornamentalen Formen.

III. Classe, wöchentlich 3 Stunden. *a*) Geometrie. Flächengleiche Figuren und ihre Verwandlung, Flächenberechnung im Einklange mit dem bezüglichen mathematischen Lehrstoffe der III. Classe. Anwendung der algebraischen Grundoperationen zur Lösung einfacher Aufgaben der Planimetrie. *b*) Geometrisches Zeichnen. Die in der II. Classe geübten Constructionen werden fortgesetzt, mit Berücksichtigung des in der Geometrie behandelten Lehrstoffes vervollständigt und ornamentale Anwendungen auf Fälle und Beispiele aus der technischen Praxis hinzugefügt. — Vorwürfe hiezu können den Zeichenvorlagen von Anděl, Hertle, Teirich u. A. entnommen werden.

IV. Classe, wöchentlich 3 Stunden. *a*) Geometrie. Elemente der Stereometrie. Lage der Geraden und Ebenen gegeneinander mit Rücksicht auf die Bedürfnisse des Unterrichtes in der darstellenden Geometrie. Prisma, Pyramide, Cylinder, Kegel und Kugel; Größenbestimmung der Oberfläche und des Rauminhaltes dieser Körper. — *b*) Geometrisches Zeichnen. Erklärung und Darstellung der Kegelschnittslinien, elementare Entwicklung ihrer wichtigsten Eigenschaften und deren Anwendung zu Tangenten-Constructionen. — Darstellung des Punktes, der Geraden und der gewöhnlichen geometrischen Körper, sowie der einfachsten technischen Objecte mittelst zweier orthogonaler Projectionsbilder auf Grund bloßer Anschauung und im Anschlusse an den zugehörigen Stoff der Stereometrie.

V. Classe, wöchentlich 3 Stunden. Wiederholung der wichtigsten Lehrsätze über die Lagenverhältnisse der Geraden und Ebenen. —

---

*) Genauer: Geometrie und geometrisches Zeichnen in der Unterrealschule, Elemente der darstellenden Geometrie in der Oberrealschule.

Durchführung der Elementar-Aufgaben der darstellenden Geometrie über orthogonale Projection mit Rücksicht auf die Bestimmung der Schlagschatten begrenzter Linien und ebener Figuren, vorzugsweise bei parallelen Lichtstrahlen.

VI. Classe, wöchentlich 3 Stunden. Orthogonale Projection der Pyramiden und Prismen, ebene Schnitte und Netze dieser Körper; Schattenbestimmungen. — Das Wichtigste über die Darstellung der krummen Linien. — Darstellung der Cylinder-, Kegel- und Rotationsflächen, letztere mit der Beschränkung auf die Flächen zweiter Ordnung; ebene Schnitte und Berührungsebenen, sowie einfache Beispiele von Durchdringungen dieser Flächen. — Die Bestimmung der Selbstschatten-Grenzlinien und der Schlagschatten.

VII. Classe, wöchentlich 3 Stunden. Vervollständigung des in der V. und VI. Classe vorgenommenen Lehr- und Übungsstoffes, betreffend die Berührungsaufgaben und Schattenconstructionen. Elemente der Linearperspective und Anwendung derselben zur perspectivischen Darstellung geometrischer Körper und einfacher technischer Objecte. Wiederholung der wichtigsten Partien aus dem Gesammtgebiete der darstellenden Geometrie. — (Streißler, Formenlehre für die Unterclassen; Streißler, darst. Geometrie für die Oberclassen.)

Freihandzeichnen

nach dem hier folgenden Lehrplan vom 9. August 1873, Z. 6708 D., jedoch mit der Einschränkung des Unterrichtes in der sechsten Classe auf zwei wöchentliche Stunden. Das Modellieren bleibt der freien Theilnahme der tüchtigeren Schüler vorbehalten.

Lehrziel: Größtmögliche Fertigkeit im freien Auffassen und Darstellen technischer Objecte nach perspectivischen Grundsätzen; Gewandtheit im Zeichnen des Ornaments und stilgerechtes Verständnis desselben; correcte Darstellung der menschlichen Gesichtsformen. Sonach im allgemeinen: Verständnis der Formenwelt und Bildung des Schönheitssinnes.

Erste Unterrichtsstufe (I. und II. Classe). Anschauungslehre. Zeichnen ebener geometrischer Gebilde aus freier Hand nach den Vorzeichnungen, die der Lehrer an der Tafel entwirft und mit kurzen, zum Verständnis nöthigen Erklärungen begleitet, nämlich: gerade und krumme Linien, Winkel, Dreiecke, Vielecke, Kreise, Ellipsen, Combinationen dieser Figuren. Das geometrische Ornament; Elemente des Flachornaments. Zeichnen räumlicher geometrischer Gebilde aus freier Hand nach perspectivischen Grundsätzen, durchgeführt an passenden Draht- und Holzmodellen in nachstehender Reihenfolge: Gerade und krumme Linien, Polygone, Kreise, stereometrische Körper und deren Combinationen; einfache technische Objecte.

Zweite Unterrichtsstufe (III. und IV. Classe). Übungen im Ornamentenzeichnen nach Entwürfen des Lehrers an der Schultafel, ferner nach farblosen wie auch polychromen Musterblättern, wobei der Schüler in passender Weise über die Stilart des Ornaments

zu belehren ist. Studien nach den plastischen Ornamenten, so wie nach geeigneten, schwierigeren ornamentalen Musterblättern, wobei gelegentlich auch die menschliche und die thierische Figur in den Kreis der Übungen einzubeziehen ist. Gedächtnis-Zeichenübungen, wie auch fortgesetzte perspectivische Darstellungen geeigneter technischer Objecte.

Dritte Unterrichtsstufe (V., VI. und VII. Classe). Die Proportionen des menschlichen Gesichtes und Kopfes werden besprochen und nach den Vorzeichnungen des Lehrers an der Schultafel in Conturen eingeübt. Gesichts- und Kopfstudien nach geeigneten Gyps-Modellen. Fortgesetzte Übungen im Ornamentzeichnen und freie Wiedergabe der Zeichnungsobjecte aus dem Gedächtnisse nach Maßgabe der Zeit und der Fähigkeiten des Schülers.

Bei der Ausführung der Zeichnungen ist der Erzielung correcter Conturen stets das Hauptaugenmerk zuzuwenden; ferner soll der Schüler mit den hauptsächlichsten Darstellungsmanieren bekannt gemacht, insbesondere aber in der Handhabung des Pinsels unterwiesen werden. In richtiger Würdigung des Grundsatzes, dass das Zeichnen eines der wichtigsten Bildungsmittel ist, muss der Individualität des Schülers und seiner Begabung auf allen Stufen des Unterrichts, insbesondere aber bei der Ausführung der Zeichnungen, möglichst Rechnung getragen werden.

Schönschreiben.

Ziel: Leserliche und gefällige Handschrift. I. und II. Classe, wöchentlich je 1 Stunde. Übungen nach Vorlagen mit Ausschluss jeder Art von Kunstschriften. Die französische Rondeschrift kann, wenn es die Zeit gestattet, nach Vorlagen eingeübt werden.

Turnen

nach dem hier folgenden Lehrplane für die Realschulen des Königreiches Böhmen. Hoher k. k. Ministerial-Erlass vom 20. September 1875, Z. 14.258.

Ziel: Ebenmäßige Kräftigung und Erziehung des Körpers zu gewandter Bewegung, Befestigung der Gesundheit und geistigen Frische, Weckung und Ausbildung der Willenskraft, Ausdauer und des Ordnungssinnes.

Vorbemerkung.

Die heute noch zulässige Voraussetzung, dass die Schüler aus den verschiedenen Schulkategorien oder aus dem Privatunterrichte eine ungleiche oder unvollständige Vorbereitung mitbringen, oder dass diese sogar gänzlich fehle, wird bei allen Übungsarten die Noth-

wendigkeit einer grundlegenden und zusammenfassenden Wiederholung der Elemente mit mehr oder weniger raschen Übergängen, beziehungsweise Neueinübung derselben, begründen. Sie sind in der Jahresaufgabe der I. Classe angedeutet.

I. Classe.

(Alter 10—11 Jahre), wöchentlich 2 Stunden.

Ordnungsübungen. Durchbildung der Reihe und größerer Gliederungen derselben (zu einem 3—4gliedrigen Körper); Richtung, Fühlung, Stellungswechsel durch $^1/_4$ und $^1/_2$ Drehung; Auflösen und Wiederherstellen; Gehen und Laufen erst außer, dann im Tact und mit Gleichtritt, Ziehen auf verschiedenen Ganglinien; Vorziehen der Reihen; Öffnen und Schließen vorwärts und seitwärts (erst mit Händefassen); die genannten Übungen auch mit Rotten; Bildung kleinerer Reihen durch Reihungen erster Ordnung. Schwenken mit kleineren Reihen um gleichnamige Flügel. Letztere Formen erst an Ort.

Freiübungen. Grund- als Ausgangsstellung. Einfache Bewegungen der Glieder und Gelenke im Stehen; Hüpfen auf beiden Füßen, auch in Schrittstellungen, oder auf einem Fuße; Kniewippen, tiefe Hockstellung bei geschlossenen Füßen; Verbindung mit Armhebhalten oder übereinstimmenden Armbewegungen; Rumpfbeugen nach den verschiedenen Richtungen (rückwärts erst in der Rückschrittstellung). Rumpfdrehen in aufrechter Stellung; Drehen im Hüpfen bis zu $^1/_2$ Drehung, alles erst an Ort, dann von Ort, einzeln, paarweise oder zu dreien, endlich in grösseren Reihen. Schrittarten organisch entwickelt, bis Wiegelaufen; Dauerlauf bis höchstens 3 Minuten (160 Schritte in der Minute). Die Forderung nach Dauer und Maß allmählich zu steigern.

Stabübungen mit Maßbeziehung auf die durch Freiübungen erlangte Fertigkeit.

Langes Schwungseil. Durchlaufen, Hüpfen an Ort auf beiden Füßen. Springen über das ruhig gehaltene Seil (erste Form des Freisprunges). Hüpfen auf einem Fuße, mit Drehen; Überspringen des geschwungenen Seiles. Einlaufen und Ausspringen oder umgekehrt.

Freispringen geradeaus ohne Zuordnung von Beinthätigkeiten, zu mäßiger Weite und Höhe.

Schwebebaum. Aufsteigen und Abspringen; Gehen, erst mit Nachstellen in verschiedenen Richtungen, ohne Zuordnung von Beinthätigkeiten.

Wagrechte Leitern. Hangstehen; Streckhang und Hangeln mit verschiedenen Griffen (Kammgriff ausgeschlossen), erst an den Aussenflächen der Leiter und mit kleineren Spannen; Beugehang mittelst Abstoß erreicht (Kammgriff), Dauerhalte darin, langsames Senken aus demselben.

Senkrechte und schräge Leitern. Steigen vorlings mit wechsel- oder gleichhandigen Griffen.

Stangengerüst. Klettervorübungen; Klettern erst an einer Stange, dann am Tau; Schlusswechsel an einer oder zwei Stangen; Hang an zwei Stangen, Klettern mit Schlusswechsel.

Liegestütz vorlings am Boden (als Einleitung der Stützübungen).

Barren. Seitstütz auf einem Helm, Querstütz mit Innensitz hinter der Hand; Fortbewegung rückwärts mit diesem Sitz ohne und mit Zwischensprüngen. Schrägstütz mit seitlicher Verschiebung rechts und links. Stütz mit Grätschen oder Knieheben, Hang-Überdrehen aus dem Stande zum Liegehang oder Stand.

Spiele. Ortsübliche Bewegungsspiele; Zeck, schwarzer Mann; Katze und Maus; Kreislaufen um die Wette, Massentauziehen.

II. Classe.

(Alter 11—12 Jahre), wöchentlich 2 Stunden.

Ordnungsübungen. Drehen, Reihen, Öffnen und Schließen und Schwenken auch während des Gehens von Ort; Reihungen zweiter Ordnung; Öffnen und Schließen aus und zur Mitte; Schwenken um die Mitte und um ungleichnamige Flügel, in Flankenreihen um vordere Führer, fortgesetztes Schwenken.

Freiübungen. Wechsel von Gang- und Laufarten und Laufrichtungen; Bogenspreizen, Rumpfkreisen, Rumpfdrehen in Rumpfbeugehalten; Hüpfen mit grösserem Drehmaße; Schrittarten bis Schrittwechsel- und Schottisch-Hüpfen; Dauerlauf bis zu 5 Minuten.

Stabübungen wie oben.

Langes Schwungseil. Hüpfen in tiefer Hockstellung, mit Anfersen; Durchlaufen und Überspringen von zweien zugleich.

Freispringen versuchsweise mit Doppelspreizen oder Beinstoßen.

Sturmspringen. Erst auf die schiefe Ebene übertragene Freiübungen, sodann nach ein oder zwei Tritten Niedersprung seitwärts vom Brette, endlich Sprung über die obere, höchstens ein Meter hoch stehende Kante.

Bockspringen. Nur als gemischter Hochsprung, von der Stelle und mit Anlauf (Vorübung: Grätschen und Reitsitz).

Wagrechte Leitern. Beugehalten in verschiedenen Winkeln (aus dem Senken); Dauerhang mit Knieheben oder Grätschen; Griffwechsel bis $^1/_4$ Armdrehung, Wechselhang; Schwingen an Ort (Schwengel), Kreisschwingen der Beine.

Senkrechte Leiter. Hüpfsteigen.

Schräge Leiter. Steigen rücklings.

Stangengerüst. Klettern mit Umkreisen; Hang an zwei

Stangen und Beinbewegungen, Wanderklettern, Abklettern mit gleichhandigen Griffen.

Reck. Stützhüpfen (brusthoch); Griffwechsel erst mit Aufliegen, dann im Stütz; Hangeln im Querhange; Unter- und Oberarmhang (Stange kopf- und schulterhoch); Liegehangarten, Niederlassen aus dem Hangstande.

Schaukelringe. Niederlassen im Hangstand, Kreisschwingen im Hangstand; Durchschweben, Schwengel, Schwingen mit Abstoß, Überdrehen aus dem Stande zum Stand, Liegehang oder Grätschschwebehang.

Liegestütz rücklings.

Barren. Außensitze vor der Hand im Wechsel mit Stand oder Stütz. Innensitze vor der Hand auch mit Fortbewegung vorwärts. Stützeln an Ort auch mit Beinbewegungen.

Spiele. Wie im ersten Jahre, dazu: Fuchs aus dem Loch, Henne und Geier.

III. Classe.

(Alter 12—13 Jahre), wöchentlich 2 Stunden.

Ordnungsübungen. Gegen- und Walzschwenken, Schwenkungen, Drehungen und Reibungen in Verbindung; Schlängeln durch offene Reihenabstände. Kette, Reigenaufzüge.

Freiübungen. Kniewippen wechselbeinig in Schrittstellungen oder im Stand auf einem Fuße mit Aufstemmen der Ferse oder Fußspitze des andern; Fechterstellung und Ausfall; frühere Übungen während des Hüpfens auf einem Bein, Schritt- und Kreuz-Zwirbeln. Einschaltung von Zwischentritten bei Schrittarten. Dauerlauf bis 8 Minuten.

Hantelübungen mit $1—1\frac{1}{2}$ Kilo schweren Hanteln.

Schwebebaum. Stellungswechsel, Begegnen und Ausweichen. Gehen mit Kniewippen und in Fechterstellung.

Freispringen mit $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{2}$ Drehung beim Nachsprunge.

Sturmspringen bis $1\frac{1}{5}$ Meter hoch.

Bockspringen zu höherem Maße.

Wagrechte Leitern. Hang und Hangeln mit mäßigem Schwunge. Zuckhangen an Ort. Armwippen aus und zu Beugehalten; Griffwechsel mit $\frac{1}{2}$ Armdrehungen, Hangeln mit Kammgriff.

Senkrechte Leiter. Steigen rücklings.

Schräge Leiter. Steigen an der untern Seite.

Stangengerüst. Klettern an zwei Stangen. Hangeln an Ort und aufwärts, erst mit gestreckten Armen.

Reck. Stützeln; Drehen aus dem Stütz zum Quer- und Seitsitz; Abschwung vorwärts und rückwärts. Überdrehen zum Liegehang; Schwingen im Aufschwunge aus demselben; Griffwechsel im Liege- und im reinen Hange.

Schaukelringe. Schwingen mit Abstoß, im Beugehange; Kreisschwingen der Beine.

Rundlauf. Laufen ohne und mit Drehung, auch mit gemischtem Hang.

Barren. Außensitze hinter der Hand mit Fortbewegung rückwärts; Schwingen fortgesetzt; Wende; Überdrehen aus dem Stand mit gemischtem oder Ellengriff.

Spiele. Die früheren, Bärenschlagen, Kettenreißen.

IV. Classe.

(Alter 13—14 Jahre), wöchentlich 2 Stunden.

Ordnungsübungen. Öffnen und Schließen nach zwei Richtungen gleichzeitig; Schwenken größerer Reihen und des Reihenkörpers.

Freiübungen. Mannigfaltige Wechsel, Zusammensetzungen und Folgen von Übungen; Dauerlauf bis 10 Minuten.

Hantelübungen.

Schwebebaum. Wiederholung und Weiterbildung. Schwebekampf.

Freispringen. Drehsprung aus dem Stande mit $^1/_4$ und $^1/_2$, mit Anlauf nur mit $^1/_2$ Drehung und der Drehrichtung gleichnamigem Abstoßfuße.

Sturmspringen bis $1^1/_4$ Meter.

Bockspringen, auch Knie- und Stehsprung; Spreiz- und Kehr-Aufsitzen; Wechsel von Stütz und Sitz.

Wagrechte Leitern. Armbeugen aus dem Streckhange bis zum spitzen Winkel; Zuckhangeln; Drehhangeln.

Senkrechte Leiter. Hangeln abwärts mit Anlegen der Füße.

Schräge Leiter. Hangeln aufwärts.

Stangengerüst. Klettern mit gleichhandigen Griffen.

Reck. Durchschwung, Nest, Felgeaufschwung; Welle mit eingehängtem Knie; Felge, Hangschwingen.

Schaukelringe. Wiederholung. Wechselhang mit Drehung.

Rundlauf. Galopphüpfen; Kreisschwingen mit Galoppabstoß; Laufen rückwärts; Übertreten seitwärts; Übertragung von Schaukelringübungen.

Barren. Außensitze vor und hinter den Händen im Wechsel; Schwingen mit Beinbewegungen und Beinhaltungen; Liegestütz, Kehre; Stützeln und Stützhüpfen im Liege- und freien Stütz, in Ellbogenstütz; Aufstemmen mit einem Arm; Schwingen, Hang. Überdrehen rückwärts aus dem Grätschsitz zum Stand oder Liegehang.

Ziehen und Schieben.

Spiele. Fußball, Grenzball, Schlagball, Hangeln und Klettern um die Wette.

V. Classe.

(Alter 14—15 Jahre), wöchentlich 2 Stunden.

Ordnungsübungen. Reihenkörpergefüge, die früher geübten Umgestaltungen im Laufe sicher auszuführen.

Freiübungen. Stand auf einem Bein als Ausgangsstellung. Schräg- und Wagschweben mit einem Bein, Kniewippen etc.; Dauer- und Wettlauf.

Hantel- und Eisenstabübungen. (Gewicht bis zwei Kilogramm.)

Freispringen. Hoch, weit, über zwei Schnüre von allmählich zu steigerndem Abstande.

Sturmspringen bis $1^2/_5$ Meter.

Bockspringen mit allmählich abgerücktem Brette, mit $^1/_4$ und $^1/_2$ Drehungen am Niedersprungsort.

Pferdspringen aus dem Stand oder mit Anlauf: Spreiz-Kehraufsitzen, Flanke, Kehre (erst ohne Pauschen). Hock- und Spreizhockübungen (erst mit Pauschen). Hintersprünge: Aufsitzen mit Grätschen, Spreizen und Hocken, Fechtsprünge mit Kehrbewegungen, Wechsel vom Stütz und Sitz ohne und mit Schwung (Pferd zwischen hüft — brusthoch).

Wagrechte Leitern. Liegehangeln.

Schräge Leiter. Stützeln im Streckstütz und Ziehen im Unterarmstütz aufwärts.

Stangengerüst. Hangeln mit gebeugten Armen aufwärts, Zuckhangeln abwärts.

Reck. Drehhangeln an und von Ort; Unter- und Oberarmhang, Aufschwünge, Durchschwung aus dem Hange; Schwebehang, Felgeaufzug.

Schaukelringe. Niederspringen am Ende des ersten bis fünften Rückschwunges; Schwingen mit bestimmter Trittfolge beim Abstoß (bei Vor- oder Rückschwung); Schwingen ohne Abstoß mit Beinheben (gestreckt) beim Vorschwung.

Rundlauf. Kreisschwingen rückwärts, Überspringen die Bahn kreuzender Hindernisse (Stab, Schnur).

Barren. Im Ellbogenstütz: Schwingen im Wechsel mit Außensitzen; Schwingen fortgesetzt; Aufstemmen wechselarmig und gleicharmig aus dem Ellbogenliegestütz; Überdrehen vorwärts aus dem Grätschsitze mit Unterarmhang zum Stand oder Grätschsitz (Rolle); Überdrehen rückwärts aus dem Stand zum Grätschsitz.

Ziehen und Schieben.

Spiele. Ballspiele, Barlaufen.

VI. Classe.

(Alter 15—16 Jahre), wöchentlich 2 Stunden.

Ordnungsübungen. Gefüge von ungleichen Reihenkörpern.

Freiübungen, anstrengendere, z. B. Schrittarten und Ausfallformen mit Sprüngen.

Hantel- und Eisenstabübungen zum Theil mit schwereren Gewichten.

Freispringen über feste Gegenstände von allmählich steigender Höhe.

Sturmspringen über eine vorgespannte Schnur bei gleicher oder veränderter Bretthöhe.

Stabspringen erst weit, dann hoch.

Bockspringen über eine vor- oder hintergestellte Schnur.

Pferdspringen. Spreiz- und Hockbewegungen auch aus dem Stütz- oder mit Zwischensprüngen fortgesetzt. Kehre und Hocke mit $^1/_4$ bis $^1/_2$ Drehungen; Wendeaufsitzen und Wende. Hintersprünge: Kehrbewegungen, halbe und ganze Spreize mit Abstoß beider Füße, Fechtsprünge mit Wendebewegungen.

Wagrechte Leitern. Schwingen mit Zuckhangen an Ort.

Schräge Leiter. Zuckhangeln auf und abwärts.

Reck. Schwingen im Unter- und Oberarmhange vorlings und rücklings, Hangwechsel (aus Hand- zu Armhang) beim Rückschwung, Speiche, Sitzwellen und Sitzaufschwünge versuchsweise; Armwippen im Stütz vorlings, Spreiz- und Kehraufsitzen im Stütz, Reckunterschwung aus dem Stande (Stange schulterhoch).

Schaukelringe. Schwingen mit Beinstoßen, mit Armbeugen nach einem Abstoss beim Rück- oder Vorschwunge. Niedersprung mit dem ersten bis fünften Vorschwung (mit Vorsicht). Überdrehen aus dem Beugehang.

Rundlauf mit verschränktem Stütz (Durchgreifen zwischen den Sprossen der Handleitern).

Barren. Senken aus dem Streckstütz zu Halten mit verschiedenen Beugewinkeln; Armbeugen und Armstrecken, erst im Liege-, dann stufenweise fortschreitend im freien Stütz; Aufstemmen wechsel- und gleicharmig aus dem Ellbogenstütz; Schwingen im Ellbogenstütz mit Beinhalten und Beinbewegungen; Unterarmstehen, Schwingen im Streckstütz mit Nachgeben der Arme am Ende des Vor- oder Rückschwunges; Beinkreisen am Ende und in der Mitte des Barrens.

Ziehen, Schieben, Heben und Tragen mit allmählicher Steigerung der Last.

Ringvorübungen.

Turnspiele.

VII. Classe.

(Alter 16—17 Jahre), wöchentlich 2 Stunden.

Ordnungsübungen kommen nun weniger selbständig als im Dienste der Frei-Hantelübungen etc. zur Anwendung.

Freiübungen, Hantel- und Eisenstabübungen wie im Vorjahre, nach Bedarf erweitert.

Frei-, Sturm- und Stabspringen in Übung erhalten und möglichst zu voller Beherrschung gebracht.

Pferdspringen. Die Übungen theils durch passend angereihte Formen erweitert, theils durch erschwerende Veränderungen, wie: gänzliche Beseitigung oder Abrückung des Sprungbrettes, durch Höherstellen des Pferdes, wechselndes oder gleichzeitiges Verstellen der Hände, zugeordnete Drehungen, Schwebestütz etc. zu größerer Sicherheit und Vollendung gebracht.

Wagrechte Leitern. Zuckhangeln mit Schwung.

Senkrechte Leitern. Zuckhangeln auf- und abwärts.

Stangengerüst. Zuckhangeln mit Schwung auf und abwärts.

Reck. Armbeugen und Armstrecken im Stütz rücklings, Stützeln rücklings; Schwingen im Knickstütz rücklings (versuchsweise Welle); Aufstemmen aus dem Arm- oder Handhange mit oder ohne Schwung, wechsel- oder gleicharmig; Reck-Unterschwung mit Ansprung, aus dem Stütz (versuchsweise); Reckspringen.

Schaukelringe. Überdrehen aus dem Streckhange; Arm abstrecken, Armbeugen und Armstrecken, erst im Liegestütz; Schwingen mit Abstoß im Knickstütz, versuchsweise im Streckstütz; Aufstemmen ohne oder mit Schwung (versuchsweise).

Barren. Schwingen im Knickstütz (erst unterbrochen durch Außensitze). Überdrehen aus dem Stütz, erst am Ende des Barrens und mit nachgebenden Armen (versuchsweise).

Ziehen, Schieben, Heben, Tragen, Ringen, Turnspiele.

c) Unobligate Lehrgegenstände.

1. Italienische Sprache in drei Abtheilungen zu je drei wöchentlichen Unterrichtsstunden. (Mussafia, Ital. Sprachlehre. Zamboni, Ital. Anthologie.) Schülerzahl: 17.

2. Stenographie in zwei Abtheilungen mit je zwei Stunden. (Gabelsberger's stenograph. Lehrgebäude. Faulmann, Schule der Praxis.) Schülerzahl: 59.

3. Gesang in zwei Abtheilungen mit je zwei Stunden. (Schmid, dreißig dreistimmige Schulgesänge.) Schülerzahl: 90

4. Modellieren mit sechs wöchentlichen Unterrichtsstunden. Schülerzahl: 22.

d) Classenvorstände.

I. Classe, 1. Abth.: Prof. Pospischill; 2. Abth. Prof. Münster. II. Classe, 1. Abth.: Prof. Längle; 2. Abth. Prof. Kunz. III. Classe, 1. Abth.: Prof. Bayer; 2. Abth. Prof. Hofmann. IV. Classe: Prof. Colin. V. Classe: Prof. Mayr. VI. Classe: Prof. Konrath. VII. Classe: Prof. Gebhart.

Die Fächervertheilung mit Rücksicht auf die betreffenden Classen ist bei dem Personalstand des Lehrkörpers angeführt.

e) In den Oberclassen behandelte Themen aus dem deutschen Sprachunterrichte.

V. Classe.

Siegfrieds Tod. — Der Arme und der Reiche. — Adler und Taube. — Über das Promenieren. — Pegasus im Joche. — Aus Vergils Aeneis. — Die Schwestern (Poesie und Prosa). — Der wilde Jäger. — Der Leichtsinnige schadet sich und anderen (Chrie). — Von den sieben Zechbrüdern. — Novelle. (Nach Goethe.) — Böse Gesellschaften verderben gute Sitten. — Sprüche in Prosa. (Chrie.) — Ein Fest zur Erinnerung an einen wohlverdienten Mann. — Selbst erbaut sich Unheil, wer andern Böses bereitet. Ein bösartiger Plan ist am schädlichsten dem, der ihn fasset. (Hesiod, Werke und Tage, v. 263.)

VI. Classe.

Arbeit ist keine Last, sondern eine Wohlthat. — Der Schule wähne niemals dich entwachsen, sie setzet sich durchs ganze Leben fort. — Die Treue, ein Grundzug der Charaktere im Nibelungenliede. — Der Edle lebt auch nach dem Tode fort Und ist so wirksam, als er lebte. — Siegfrieds Tod. — In welchem Verhältnisse steht das Gudrunlied zum Nibelungenliede dem Stoffe, der Form und der Entstehung nach? — Nicht um deine Mitgesellen sorge, wie sie mögen bau'n; dafür lass den Meister sorgen: Deine Stelle baue recht. — Die Schlacht von Sedgemoor nebst einer kurzen Charakteristik des Herzogs von Monmouth (nach Macaulay). — Lessing's Minna von Barnhelm: Vorfabel, Fabel, Charaktere der handelnden Personen. — Die Lebensbedingungen der Pflanzen. — Das Mütterchen in Vossens Idylle „Der siebzigste Geburtstag“. — Maria Stuart's Vertheidigung vor ihren Richtern.

VII. Classe.

Wie du dich änderst, so ändert sich dein Schicksal. — Was verleitet den Menschen, die Wahrheit nicht zu sagen? (Chrie.) — Iphigenie auf Tauris. — Spiel des Schicksals. — Gesang der Geister über den Wassern. — Torquato Tasso. — Euterpe (Hermann und Dorothea). — Wert und Wesen der Poesie (Schillers Graf von Habsburg). — Natur und Cultur (Schiller, der Spaziergang). — Frei-

gewählter Sinnspruch. (Abhandlung. Schularbeit). — Begeisterung ist die Quelle großer Thaten (Abhandl.) „Einem ist sie die hohe, himmlische Göttin, dem andern Eine tüchtige Kuh, die ihn mit Butter versorgt“. (Schiller: Was heißt und zu welchem Ende studiert man Universalgeschichte?) — Die Schönheit des Sterbens in der Blüte der Jugend. — „Umarme mich, mein Sohn! Dir ist der härt're Kampf gelungen. Nimm dieses Kreuz! Es ist der Lohn der Demuth, die sich selbst bezwungen.“ (Der Kampf mit dem Drachen.)

Lectüre:

V. Classe. Die Grundzüge der Metrik und Poetik. Die drei Hauptgattungen der Dichtkunst mit entsprechender Lectüre nach Eggers Lesebuch I. B. 1. Th. Die Grundformen und Hauptrichtungen der Prosa. Übungen über Tropen und Figuren.

VI. Classe. I. Semester: Auswahl aus dem Nibelungenliede und den Dichtungen Walthers, nach dem mhd. Lesebuche von Jauker und Noë. II. Semester: Prosaische Musterstücke und Proben lyrischer Poesie aus der nhd. Literatur-Periode, zum Theil nach Eggers Lesebuche, zum Theil aus Einzelausgaben der betreffenden Classiker; außerdem Lessings Minna von Barnhelm und Schillers Maria Stuart.

VII. Classe. Literaturkunde von der zweiten Hälfte des 18. bis zur zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts mit den einschlägigen Proben der Autoren. Als Grundlage dienten Eggers Lesebücher. Freie Vorträge der Schüler. Alles nach Vorschrift.

Lehrmittelsammlungen.

Dieselben sind, Dank der Fürsorge der städtischen Mittelschulen-Deputation, auch im Schuljahre 1879/80 recht ansehnlich vermehrt worden, wie aus der nachstehenden Übersicht zu entnehmen ist.

Lehrmittel für Geographie und Geschichte. Administrativkarte von Niederösterreich (Fortsetzung). Zwei Stereoskopen-Apparate mit Bildern. Eine Partie Geschichtsbilder. (Geschenk des Herrn Prof. Dr. G. Mayer.) Wandkarten der Erdtheile nach Sydow und Kiepert.
Custos: *E. Walser.*

Lehrmittel für Physik. Compressionsluftpumpe sammt Recipient und Manometer-Apparat zum Vergleichen von Widerständen verschiedener Drähte; ein polarisiertes Relais. Schirm mit Spalte für Projection. Apparat für Ausdehnung der Stäbe, mit Siedegefäß; Langen'sche Wasserwagen; Bunsen'sches Eiscalorimeter; Hypsometer. Bunsen'scher Gebläsebrenner. Custos: *C. Schindler.*

Lehrmittel für Chemie. Mehrere Jahrgänge der Berichte über die Fortschritte der chemischen Technologie von Wager.
Custos: *L. Mayer.*

Lehrmittel für Naturgeschichte. Angekauft wurden: 46 Arten Insecten, dann: Lorenz, Wald und Klima; Zoologischer Anzeiger; Schlechtendal und Wünsche, Insecten, 2. Band; Espinas, die historischen Thiergesellschaften, sowie die Fortsetzungen mehrerer Werke.

Geschenkt wurden: Eine schöne und lehrreich zusammengestellte Sammlung von Gesteinsstücken, von Herrn Werdmüller v. Elgg; ein Fuchs, ein Dachs und ein Specht, ausgestopft, von Herrn Oberförster Swalla; zwei Raubvögel, ausgestopft, von Herrn Carl Demel; zwei Trilobiten von dem Schüler Ernst R. v. Kuh; vier Holzopale von dem Schüler Carl Wagner und 4 Tafeln von Kotschy's Eichen Europa's und des Orientes von dem Maturanten Inzinger Rudolf.

Außerdem unterstützten viele Schüler den Unterricht mit naturhistorischen Objecten, von welchen Schülern besonders hervorzuheben sind: Abeles Rudolf, Bittner Richard, Breisacher Franz, Geßl Johann, Groß Wilhelm, Katz Egon, Mayer Siegfried, Markl August, Pirker Josef, Plach Georg, Schraml Johann, Seifert Franz, Steindl Ludwig, August Turnau Edl. v. Dobczyce, Wagner Emerich und Weil Felix. Auch der frühere Schüler der Anstalt, Herr Ernst Flatz, unterstützte den botanischen Unterricht mit lehrreichen frischen Objecten.

Custos: *Dr. Gustav Mayr.*

Lehrmittel für geometrisches und Freihandzeichnen. Fortsetzungen von: Wiener Neubauten (Lützow-Tischler); Säulenordnungen (Hauser); Bildende Kunst (Schnaase); Geschichtsbilder (Langl); Ornamentik (Anděl), Müller und Mothes, Archäologisches Wörterbuch; Machold, Anatomie des Pferdes. Eine Partie Gypsmodelle.

Custoden: *K. Beyer, D. Pospischill, E. Walser.*

Bibliothek. Sprachen und deren Literatur. Mätzner E., Altenglische Sprachproben; Dr. Alex. Schmidt, Shakespeare-Lexikon; Furness, A new Variorum Edition of Shakespeare 5 Bde.; Dr. Franz X. Wegele, Dante Allighieri's Leben und Werke; Lotheissen F., Geschichte der französischen Literatur im XVII. Jahrhundert; Isler M., Briefe von Benjamin Constant; Dr. v. Wurzbach C., Biographisches Lexikon des Kaiserthums Österreich (antiquarisch); Goethe's Werke, Auswahl in 16 Bänden; Warton Th., History of English Poetry; Mähly J., Geschichte der antiken Literatur; Stratmann Fr. H., Dictionary of the old English Language.

Geschichte und Geographie. Dr. Krones F., Geschichte Österreichs für die reifere Jugend, in 2 Theilen; Müller Friedr., Allgemeine Ethnographie; Körner Friedr., die Erde, ihr Bau und organisches Leben; Liebermann, ungedruckte Anglo-Normännische Geschichtsquellen; Opérations Géodésiques Astronomiques (Geschenk des k. k. militär-geographischen Instituts); Kaemmel Otto, Die Anfänge des deutschen Lebens in Österreich; Weller F., die kaiserlichen Burgen und Schlösser in Bild und Wort; Hölder's geographische Jugend- und Volksbibliothek; Honegger, Katechismus der Culturgeschichte; Horanni J. B., Atlas novus Terrarum Orbis Imperia et Status geographice demonstrans (Geschenk eines Unbekannten durch Vermittlung des Herrn k. k. Landesschulinspectors Dr. Wretschko);

Stacke L., deutsche Geschichte mit Abbildungen; Armand, Amerikanische Jagd- und Reisebilder (antiquarisch); Krusch B., Studien zur christlich - mittelalterlichen Chronologie; Bericht der Handels- und Gewerbekammer in Budweis, Jahrgang 1871—75; Navigazione e Commercio in Porti Austriachi, Nel 1878; Movimento Commerciale di Trieste, Nel 1878, die drei letztangeführten Werke Geschenk des k. k. Ministeriums für Unterricht und Cultus; Geschichte des k. k. Infanterie-Regiments Hoch- und Deutschmeister von Gustav Ritter Aron von Treuenfels, Geschenk des Herrn Bürgermeisters; Dr. Brachelli H. F., Statistische Skizze der europäischen Staaten; Hübner, Statistische Tafeln aller Länder der Erde; Urban Emanuel, Die Spinnerin am Kreuze bei Wien (Geschenk des hohen n. ö. Landesschulrathes).

Mathematik und technische Fächer. Ruland N., Praktische Anleitung zum gründlichen Unterricht in der Mathematik; Königsberger Leo, Zur Geschichte der Theorie der elliptischen Transcendenten, ein Heft; Močnik, Arithmetik für Unter-Gymnasien; Močnik, Geometrische Anschauungslehre; Dr. Frischauf J., Einleitung in die analytische Geometrie; Dr. Schlömilch, Handbuch der Mathematik.

Physik. Wood J. G., Common Objects of the Microscope (Geschenk des Herrn Prof. Hellwich); Riemann B., Schwere, Elektricität und Magnetismus; Siegmund F., Die Wunder der Physik und Chemie; Lockyer J. N., Die Beobachtung der Sterne.

Verschiedenes. Meyers Conversations-Lexikon; Programm für den Huldigungsfestzug in Wien (Geschenk des löblichen Gemeinderathes); Spieß A., Turnbuch für Schulen; Feierliche Sitzung der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, 5 Hefte (Geschenk des Herrn Probecandidaten Kramer).

Zu den Zeitschriften kamen noch hinzu: Steinmeyer E., Zeitschrift für deutsches Alterthum und deutsche Literatur; Seibert, Zeitschrift für Schulgeographie.

Die Fortsetzungen der bereits in den früheren Berichten angeführten, durch Kauf oder Schenkung erworbenen Werke, worunter auch die vom k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht gespendeten Berichte verschiedener Handels- und Gewerkammern.

Bibliothekar: *M. J. Prager.*

Achtzehnter Jahresbericht

des

Unterstützungsfondes für arme und würdige Schüler der Anstalt.

Einnahmen.

	fl.	kr.	fl.	kr.
Cassarest vom Schuljahre 1878/79	—	—	1225	32
Hinzugekommen im Schuljahre 1879/80:				
Vom Herrn Mully, Fabriksbesitzer	20	—		
Von einem ungenannt sein wollenden Wohlthäter	10	—		
Vom Lehrkörper der Ertrag eines Zeugnisses	2	—		
Von einer unbekannten Frau	1	—		
An Rabatt von der Hölder'schen Buchhandlung	50	96		
In obiger Buchhandlung verlegte, zum Geschenke erhaltene Bücher im Werte von	20	70	104	66
Von den Schülern der Anstalt, und zwar:				
I. Classe, Abthl. a.				
Madl Ernst	2	—		
Brandeis, Bauer, Cserwinka, Demel, Freund, Janisch, Katz, Kohn, Weichsel à fl. 1	9	—		
Berz, Friedmann Emil, Kollinsky, Swaty, Ullmann	1	90	12	90
I. Classe, Abthl. b.				
Reska, Schmidt à fl. 2	4	—		
Abeles, Dollischek, Freund, Knechtl, Lion, Mayer, Slonek, Spieß, Konrad, Voltolini, Weiß à fl. 1	10	—		
Bruck, Neudolt, Reitter, Wagenseil, Threun, Kramer, Torbé, Czerny, Thurner	3	21	17	21
II. Classe, Abthl. a.				
Geßl, Groß, Heimann, Jäger, Weiß à fl. 2	10	—		
Scheckenbach	1	25		
v. Cronenberg, Fischer, Hochstetter, Lesainsky, Schäffler, Sittner, Tasch, Feuerstein à fl. 1	8	—		
Fußenegger, Hajek, Jacobi, Keller, Manussi, Konrady, Reich Josef & Julius, Vogl, Feldscharek, Beredik, Wagner	4	25	23	50
II. Classe, Abthl. b.				
Horovitz, Plach à fl. 3	6	—		
Marmorosch, Merkl, Fournier à fl. 2	6	—		
Polz, Brauner, Hauer, Juller, Hoch, Blaschek, Erban, Feuerstein, Zeiß, Stolle, Bonyhard à fl. 1	11	—		
Katz, Kirchner, Busch, Keller, Gansinger, Gwiggner, Sacher, Janitschek, Guttmann, Röhr, Krebs, Zehethuber, Stastny, Oberschwandtner, Gößl, Schacha, Wawra	6	25	29	25
Transport	..	..	1412	84

	fl.	kr.	fl.	kr.
Transport....	..	..	1412	84
III. Classe, Abthl. a.				
Salcher	5	—		
Milde	2	—		
Chvostek, Danhauser, Groß, Kühhas .... à fl. 1	4	—		
Dvořak, Kadlčik, Keller, Wittmann, Richter, Sandner, Witt, Scherer	2	80	13	80
III. Classe, Abthl. b.				
Seutter, Ronacher, Fischer .... à fl. 5	15	—		
Geier	1	50		
Müller, Plank, Littner, Kopp .... à fl. 1	4	—		
Kratky, Feichtinger, Reisinger, Sattmann	1	20	21	70
IV. Classe.				
Kollmann	5	—		
Kryspin, Scharf .... à fl. 3	6	—		
Bause, Braun, Zimara .... à fl. 2	6	—		
Lefort, Holmes, Schmid, Zeiß, Bauer, Sandner, Weiß, Zimmer .... à fl. 1	8	—		
Mehl, Fasol	1	—	26	—
V. Classe.				
v. Schivizhoffen, Beer, v. Turnau, Geiringer . à fl. 2	8	—		
v. Traxler, Fischer, Zimmermann, Pacher, Engelmann, Junker, Frauenfeld, Blaschek, Vogel, Teirich, Wagner .... à fl. 1	11	—		
Parzer, Schuster, Schebek, Krug, Semmler, Bauer ..	2	10	21	10
VI. Classe.				
v. Keller Max	6	—		
v. Leon, v. Weil .... à fl. 5	10	—		
Ciccimarra	1	30		
Bauer, Fulda, Kahene, Lustig, Řehak .... à fl. 1	5	—		
Bauer Philipp, Zmesskal	—	70	23	—
VII. Classe.				
Flatz	5	34		
Reich	2	—		
Kloger, Zimmermann	2	54		
Großl, Hafen, Lemberger, Sadger, Stein, Schwinner, Müller, Blau .... à fl. 1	8	—		
Fränkl, Hrach, Leiß, Liebmann	2	12	20	—
Von dem Lehrkörper der Anstalt, und zwar:				
Vom Herrn Director Walser, k. k. Regierungsrath ..	2	—		
Von den Professoren: Beyer, Colin, Gebhart, Pospischill, Ševčik .... à fl. 2	10	—		
Längle	1	50		
Hoffmann Rob., Marckhl, Dr. Konrath, Dr. Mayr, Prager, Mayer, Schindler, Münster, Heinz, Dr. Zamboni, Schmid, Skallitzky, Dr. Pawliczek, Linsbauer, Seeger, Hofmann Wenzel, Beintrexler, Kunz, Hoffmann Julius, Korber .... à fl. 1	20	—	33	50
Summe der Einnahmen....	..	..	1571	94

Mit Büchern beschenkten den Fond die Herren Polytechniker Russo und Fallenböck; ferner die Studierenden: Flatz, Göstl, Höller, Fischer Theodor, Valduga, Flach, Kollmann, Scholz, Zacherl, Kothanek, Zimmermann, Heiß, Kryspin, Bauer, Lefort, Strohmayer, Schuster, Ciccimarra, Herrnfeld, Dechet, Kothanyi, Fulda, Mayer, Schacherl und die Angehörigen des leider zu früh verstorbenen Schülers der V. Cl. Filz.

Ausgaben.

	fl.	kr.
Für angekaufte neue 88 Stück Lehrbücher und Atlanten..	121	14
Für das Einbinden von 216 Stück diverser Schulbücher und Atlanten..	67	15
Für Reißzeug-Reparaturen............................	4	50
Für Lehrmittelbeitrag und Barunterstützung.............	4	—
Für Bargeld-Vertheilung an vier Schüler zu Weihnachten à fl. 10	40	—
Für Bargeld-Vertheilung an vier Schüler am Schlusse des Schuljahres ....à fl. 10	40	—
Für den Ankauf von Zeichnungspapier	6	40
Summe der Ausgaben.....	283	19
Cassarest für das Schuljahr 1880/81	1288	75

Hierzu kommen aber noch die Interessen, da der Cassarest in der Ersten österr. Sparcasse nutzbringend angelegt ist.

Der opferwilligen Beitragsleistung edler Gönner und vieler Schüler der Anstalt ist es in erster Linie zu danken, dass es auch heuer möglich war, eine ausgiebige Unterstützung an Lehrbehelfen und Bargeld vielen armen Schülern der Anstalt angedeihen zu lassen.

Der Berichterstatter hofft durch Aufzählung nachstehender statistischer Daten zu zeigen, wie wichtig und segensreich dieser Fond für die arme, so sehr der Unterstützung bedürftigen Jugend ist, um dadurch die milde Hand auch für die Zukunft zur Darreichung von Beiträgen bereit zu finden.

Es wurden betheilt, in der

I.	Classe	Abtheilung	*a*)	7	Schüler	mit	36	Stück Bücher,
I.	„	„	*b*)	10	„	„	77	„ „
II.	„	„	*a*)	12	„	„	102	„ „
II.	„	„	*b*)	16	„	„	107	„ „
III.	„	„	*a*)	14	„	„	118	„ „
III.	„	„	*b*)	3	„	„	22	„ „
IV.	„	„		14	„	„	110	„ „
V.	„	„		10	„	„	95	„ „
VI.	„	„		7	„	„	56	„ „
VII.	„	„		4	„	„	50	„ „

Im Ganzen: 97 Schüler mit 773 Stück Bücher.

Der Lehrkörper hat ferner den Beschluss gefasst, so lange die Interessen des Fondes dazu ausreichen, jährlich eine bestimmte Summe baren Geldes an arme, würdige Schüler zweimal im Jahre, und zwar vor Weihnachten und am Schlusse des Schuljahres, zur Vertheilung zu bringen.

Diese Vertheilung ist in diesem Schuljahre am 23. December 1879 zum ersten Male vorgenommen worden. Diesem Acte der Humanität wurde noch dadurch eine größere Weihe verliehen, weil in dieser Zeit das 25jährige Dienstjubiläum des hochverdienten Directors dieser Anstalt, unter dessen Leitung die Gründung dieses Fondes stattfand, in der Schule festlich begangen wurde.

Mögen die edlen Gönner auch in Zukunft des Unterstützungsfondes eingedenk sein!

Mit diesem Zurufe und mit dem besten Danke im Namen der unterstützten Schüler schließt der Berichterstatter seinen Bericht.

Wien, im Juli 1880.

D. Pospischill,
Cassier des Unterstützungsfondes.

Beiträge
zur
Geschichte und Statistik der Anstalt.

---

a) Chronik der Realschule.

Im letzten Jahresberichte wurde der Übertritt des Herrn Professors L. Bahr in den bleibenden Ruhestand signalisiert. An seine Stelle trat laut Beschlusses des löblichen Gemeinderathes vom 25. Juli 1879, Z. 3054, M. Z. 205.843, der Professor der deutschen und französischen Sprache an der Marine-Unterrealschule in Pola, Herr Simon Laengle; die Genehmigung dieser Wahl erfolgte laut Erlasses des löblichen n. ö. Landesschulrathes vom 18. August 1879, Z. 5009.

Durch das allerhöchste Handschreiben Seiner k. k. apostolischen Majestät des Kaisers wurde Se. Excellenz der Herr Ministerpräsident Carl von Stremayr vom Vorsitze im Ministerrathe in Gnaden enthoben und bei gleichzeitiger Leitung des Ministeriums für Culturs und Unterricht zum Justizminister ernannt. — Diese Änderung währte bis zum 16. Februar 1880, an welchem Tage Se. k. k. apostolische Majestät den bisherigen Statthalter von Niederösterreich, Se. Excellenz den Herrn Conrad Freiherrn von Eybesfeld, zum Minister für Cultus und Unterricht zu ernennen geruhten.

Das Schuljahr begann nach Ausscheidung der mangelhaft vorbereiteten Aufnahmsaspiranten in vorgeschriebener Weise am 16. September mit 490 Schülern, welche in sieben regelmäßigen und drei Parallelclassen untergebracht wurden.

Die Organisation des Unterrichtes für das Schuljahr 1879/80 gieng, wir alljährlich unter der Intervention der hochlöblichen k. k. Unterrichtsbehörde einerseits, anderseits der beschließenden und ausführenden Körperschaften der löblichen Commune ungestört vor sich, und es wurden demgemäß laut Beschlusses des löblichen Gemeinderathes vom 24. October 1879, Z. 5245, M. Z. 229.478, mit Genehmigung des hochlöblichen k. k. Landesschulrathes vom 12. November 1879, Z. 7337, bestellt die Herren: Dr. Johann Pawlicsek zum suppl. Lehrer der Religion für den erkrankten Professor Franz Krügner; Franz Kunz für Geschichte und Geographie, Ferdinand Münster für Mathematik, Alois Seeger und Dagobert Beintrexler für

deutsche und französische Sprache, Julius Hofmann für Naturgeschichte, sämmtlich in suppletorischer Eigenschaft. Ferner noch Linsbauer Karl, Hofmann Wenzel und Korber Adolf als Assistenten für die Zeichenfächer, Stork Balthasar und Salzmann Markus als Assistenten für das Turnen. Nach dem im Laufe des Schuljahres erfolgten Austreten des letzteren wurde dessen Stelle von dem L. A. C. Herrn Johann Bolek (G. R. B. vom 9. April 1880, Z. 1672, M. Z. 72.321) eingenommen. Dem ausgeschiedenen Herrn M. Salzmann sind wir für seinen guten, erfolgreichen Unterricht zu Dank verpflichtet.

In allen diesen auf die Bestellung und Besoldung der Lehrkräfte, ferner auf die Beschaffung von Lehrmitteln, Schulgeldbefreiungen u. s. w. Bezug habenden Fällen konnte die Schulleitung stets auf die Hilfe des überaus schulfreundlichen, thatkräftigen und bewährten Magistratsrathes Herrn Alexander Krenn, sowie auf die höchst dankenswerte Intervention der städtischen Mittelschulen-Deputation rechnen, welche, wie im Vorjahre, aus folgenden Herren Gemeinderäthen besteht:

Dr. Capelmann Richard, Sectionsrath im k. k. Ackerbau-Ministerium.

Dr. Weiser Josef, k. k. Regierungsrath und Oberrealschuldirector, emeritierter Hochschulprofessor, Director der Volksschul-Prüfungs-Commission etc.

Wiener Wilhelm, Ritter der eisernen Krone, Schriftsteller, Redacteur der „Presse“, Mitglied des n. ö. Landesschulrathes u. s. w.

Am 3. und 6. October 1879, so wie am 10. Februar fanden an der Anstalt unter dem Vorsitze des Herrn Landesschulen-Inspectors Dr. Mathias Wretschko die nachträglichen Maturitäts-Prüfungen statt. Ebenso intervenierte der Herr Inspector zu wiederholten Malen gelegentlich der Organisation des Unterrichts, Zusammenstellung der Lectionspläne, Zuweisung der Lehramts-Candidaten, so wie überhaupt in allen auf die Hebung und Förderung des Unterrichtes berechneten Maßregeln in wirkungsvollster Weise.

Laut des Beschlusses vom 14. April 1880, Z. 5, M. Z. 285.229, hat sich der löbliche Gemeinderath bestimmt gefunden, den bisherigen Religionslehrer, Professor Franz Krügner, auf sein Ansuchen in den bleibenden Ruhestand zu versetzen.

Herr Franz Krügner hat den Religionsunterricht an dieser Anstalt durch mehr als 15 Jahre mit großem Eifer und unterstützt von ungewöhnlich reichem Wissen geleitet; auch war er früher schon jahrelang an der Volksschule und an der Gumpendorfer Unterrealschule in lehramtlicher Thätigkeit und erlangte mit Recht den Ruf eines vorzüglichen Exhortators. Möge ihm die ersehnte Ruhe die in den letzten Jahren erschütterte Gesundheit wieder bringen!

Mit der Leitung der Maturitäts-Prüfungen, welche an dieser Anstalt in den ersten Julitagen stattfanden, wurde der Herr Dr. Josef Kolbe, k. k. Professor an der technischen Hochschule und Obmann der zweiten Section des k. k. n. ö. Landesschulrathes betraut. Wir können

nicht unterlassen, ihm im Namen der Examinanden für die mit großer Umsicht und Thatkraft geleiteten Prüfungen den schuldigsten Dank auszusprechen.

Am 27. April 1880 hat die Anstalt einen sehr braven und fleißigen Schüler der V. Classe, Filz Felix, durch den Tod verloren. Er wurde unter allgemeiner Theilnahme seiner Mitschüler und Lehrer am 29. April zur Erde bestattet.

Der Schluss der beiden Semester erfolgte in vorgeschriebener Weise u. z. jener des ersten Semesters am 14. Februar, jener des zweiten am 15. Juli.

Weitere die Entwicklung der Anstalt berührende Ereignisse, sowie wichtige Verordnungen in chronologischer Reihenfolge.

1. Erlass des hohen k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht vom 24. Juli 1879, Z. 11.541, Anträge auf Zulassung eines bisher an der Anstalt nicht im Gebrauche befindlichen, allgemein approbierten Lehrtextes an Stelle eines bisher gebrauchten sind drei Monate vor dem Schlusse des Schuljahres einzubringen.

2. Erlass des hohen k. k. Ministeriums für Cultus und Unterricht vom 28. Juni 1879, Z. 4281. Schüler, welche aus der Religionslehre an der Volksschule die Noten gut oder sehr gut erhielten, dürfen von der Aufnahmsprüfung aus diesem Gegenstande losgezählt werden.

3. Beschluss des löblichen Gemeinderathes vom 27. August 1879, Z. 4845, womit die Anzahl der in einer Turnriege befindlichen Schüler mit 30—35 festgesetzt wird.

4. Erlass des hohen k. k. n. ö. Landesschulrathes vom 15. October 1879, Z. 6215. Im schulpflichtigen Alter stehende Schüler, welche während des Schuljahres aus dem Verbande der Mittelschule entlassen werden, sind dem Wiener Bezirksschulrathe sofort anzuzeigen.

5. Beschluss des löblichen Gemeinderathes vom 31. October 1879, Z. 3060. Normative Bestimmungen über Schulgeldbefreiungen, wodurch die an Staatsanstalten geltenden Vorschriften auf die Communal-Mittelschulen ausgedehnt werden.

6. Erlass des hohen k. k. Ministeriums für Cultus und Unterricht vom 22. November 1879, Z. 18.485, betreffend die Regelung der deutschen Ortographie an Mittelschulen.

7. Erlass des hohen k. k. n. ö. Landesschulrathes vom 27. Februar 1880, Z. 8119. Verordnung, betreffend das Vorkommen und die Verhütung der Ausbreitung von übertragbaren Krankheiten des jugendlichen Alters in Schulen.

8. Mit dem Erlasse des hohen k. k. Ministeriums für Cultus und Unterricht vom 27. April 1880, Z. 3814, wird der Normallehrplan mit einigen Modificationen für das nächste Schuljahr 1880/1 eingeführt. (Siehe Schulnachrichten dieses Jahresberichtes.)

9. Laut Beschlusses des löblichen Gemeinderathes vom 23. December 1879 wurde dem Director dieser Anstalt anlässlich seines 25 jährigen Dienstjubiläums die Auszeichnung zu Theil, das Bürgerrecht der Stadt Wien zuerkannt zu erhalten.

b) Personalstand des Lehrkörpers.

Professoren und Lehrer der obligaten Lehrgegenstände.

Walser, Eduard, Director der Oberrealschule, Mitglied des Landesschulrathes und der wissenschaftlichen Realschulprüfungs-Commission, k. k. Regierungsrath und Schulrath, lehrte darstellende Geometrie in der 5., 6. und 7. Classe. Wohnt im Schulgebäude.

Beyer, Robert, lehrte das Freihandzeichnen in der 2ª., 3ª., 5. und 7. Classe. Wohnt VII., Burggasse 98.

Colin, Franz, lehrte französische Sprache in der 3ᵇ., 4., 5., 6. und 7. Classe. Wohnt Hernals, Syringgasse 5.

Gebhart, Johann, lehrte deutsche Sprache in der 5. und 7. Classe, ferner Geographie in beiden Abtheilungen der 1. Classe. Wohnt IX., Liechtensteinstraße 21.

Heinz, Johann, unterrichtete im Turnen. Wohnt VII., Stiftgasse 33.

Hofmann, Robert, lehrte Mathematik in der 5. und 6. Classe, ferner Physik in 3ᵇ. Wohnt IX., Turngasse 13.

Dr. Konrath, Mathias, lehrte die englische Sprache in den Oberclassen, ferner die deutsche Sprache in der 3ᵇ. und 6. Classe. Wohnt VII., Zieglergasse 49.

Krügner, Franz, Weltpriester und Exhortator, war bis zu seiner am 14. April 1879 erfolgten Pensionirung krankheitshalber beurlaubt.

Laengle Simon, lehrte deutsche und französische Sprache in den beiden Abtheilungen der 2. Classe. Wohnt IX.,

Marckhl, Hugo, unterrichtete im Freihandzeichnen in der 2ᵇ., 3ᵇ., 4. und 6. Classe. Wohnt I., Seitenstettengasse 2.

Mayer, Lorenz, lehrte die Chemie an der Anstalt. Wohnt Währing Schulgasse 59.

Dr. Mayr, Gustav, lehrte Naturgeschichte in der 1ª., 2ª., 5., 6. und 7. Classe. Wohnt III., Hauptstrasse 75.

Pospischill, Dionis, lehrte Geometrie und geometrisches Zeichnen in der 1., 2., 3. und 4. Classe. Wohnt VIII., Mariatreugasse 6.

Prager, Moriz, lehrte Geographie und Geschichte in der 5., 6. und 7. Classe, ferner Geschichte und französische Sprache in der 3. Classe Abtheilung a. Wohnt I., Schottensteig 13.

Schindler, Carl, lehrte Physik in der 7., 6., 4. und 3ª. Classe Wohnt I., Kleeblattgasse 13.

Ševčík, Franz, Docent der Mathematik an der k. k. technischen Hochschule in Wien, lehrte Mathematik in der 3., 4. und 7. Classe. Wohnt II., Obere Donaustraße 23.

Professoren und Lehrer der nicht obligaten Lehrfächer.

Faulmann, Carl, Stenographie. Wohnt IV., Neugasse 26.

Schmid, Ernst, Gesang. Wohnt IX., Seegasse 22.

Skallitzky, Eduard, Kalligraphie. Wohnt VI., Nelkengasse 6.

Weitman, Josef, Modellieren. Wohnt II., Treustrasse 18.

Dr. Zamboni, Philipp, Italienische Sprache. Wohnt IV., Maierhofgasse 5.

Supplierende Professoren und Assistenten.

Beintrexler, Dagobert, lehrte Deutsch und Franz. in 1[b] und Deutsch in 3[a]. Wohnt IX., Schlickgasse 3.

Hoffmann, Julius, lehrte Naturgeschichte in der 1[b]. und 2[b]. Classe, ferner Geographie in 3[a]. Wohnt IX., Berggasse 20.

Kunz, Franz, unterichtete Geschichte und Geographie in der 2., 3. und 4. Classe. Wohnt IX., Ditrichsteingasse 3.

Münster, Ferdinand, lehrte Mathematik in der 1. und 2. Classe. Wohnt IV., Paniglgasse 17.

Seeger, Alois, lehrte Deutsch und Franz. in 1[a]. und Deutsch in der 4. Classe. Wohnt IX., Maria-Theresienstraße 11.

Paulicsek Johann, Dr. der Theologie, lehrte die kathol. Religion in allen Classen. Wohnt I., Petersplatz.

Hofmann, Wenzl, lehrte Geometrie und geometrisches Zeichnen in der 3. Classe, 2. Abtheilung, und war Assistent im geometrischen Zeichnen. Wohnt IX., van Swietengasse 1.

Linsbauer, Carl, Assistent im Freihandzeichnen. Wohnt VII., Burggasse 116.

Korber, Adolf, Assistent im Freihandzeichnen. Wohnt VIII., Kochgasse 11.

Storck, Balthasar, Assistent im Turnen. Wohnt VII., Neustiftgasse 64.

Bolek, Johann, Assistent im Turnen. Wohnt V., Kliebergasse 13.

Schuldiener.

Franz, Josef, wohnt im Schulgebäude.

Kreuter, Mathäus, Laborant, wohnt im Schulhause.

Tauber, Franz.

Hofmann, Johann.

Puschko, Georg.

Huber, Georg, Hausdiener, wohnt im Schulhause.

c) Stand der Schülerzahl.

Classe	Nach der Nationalität				Nach der Gemeinde-genossenschaft		Zusammen
	Deutsche	Slaven	Ungarn	Ausländer	Einheimische	Auswärtige	
I. (in 2 Abtheilungen)	112	1	—	1	112	2	114
II. (in 2 Abtheilungen)	112	—	—	2	113	1	114
III. (in 2 Abtheilungen)	75	1	—	1	73	—	77
IV.	57	—	—	1	58	—	58
V.	43	2	—	—	42	3	45
VI.	39	1	2	—	39	3	42
VII.							
Zusammen.....	469	5	3	5	465	17	482

Classe	Nach der Religion				Das Schulgeld zahlende	Vom Schulgelde befreite	Betrag sämmtlicher Schulgelder
	Katholik.	Protestanten	Israeliten	Griechisch nicht unierte			
I. (in 2 Abtheilungen)	82	3	29	—	96	18	3400
II. (in 2 Abtheilungen)	93	5	16	—	85	29	2883
III. (in 2 Abtheilungen)	62	5	10	—	52	25	1642
IV.	49	2	7	—	36	22	1226
V.	40	—	5	—	27	18	1034
VI.	31	1	9	1	26	16	1108
VII.	19	1	12	—	24	8	1066
Zusammen.....	376	17	88	1	346	136	12359 *)

Nach dem Ergebnisse der Classification.

Von der Gesammtzahl am Ende des zweiten Semesters erhielten	I. Classe (in 2 Abth.)	II. Classe (in 2 Abth.)	III. Classe (in 2 Abth.)	IV. Classe	V. Classe	VI. Classe	VII. Classe
die Vorzugsclasse	7	6	5	3	9	4	6
die erste Classe	69	67	35	26	17	25	23
die zweite Classe	15	23	14	12	4	4	1
die dritte Classe.....	6	4	—	1	—	—	—
ungeprüft blieben....	—	1	1	1	—	1	—
zur Wiederholungsprüfung werden zugelassen	12	10	9	7	4	6	1

*) Hierunter sind 300 fl. Aufnahmstaxen und 942 fl. Lehrmittelbeiträge. Vier Schüler waren im Genusse von Stipendien, und zwar: einer mit 100 fl., zwei mit 300 fl., einer mit 315 fl. jährlich.

Das Ergebnis der Nachtrags- und Wiederholungsprüfungen im September 1877 war ein günstiges. In der I. Classe haben von 9 Schülern 8, in der II. Cl. von 8 Schülern 7, in der III. Cl. von 11 Schülern 9, in der IV. Cl. von 5 Schülern 4, in der V. Cl. von 7 Schülern 6, in der VI. Cl. von 7 Schülern alle die Prüfung gut bestanden.

d) Maturitätsprüfungen im Julitermine 1880.

Von den 32 Schülern der siebenten Classe wendeten sich zwei praktischen Berufszweigen zu; alle anderen meldeten sich zur Ablegung der Maturitätsprüfung, deren Erfolg aus der Tabelle zu entnehmen ist.

Namen der Abiturienten	Geburtsort	Alter in Jahren	Studiendauer an Mittelschulen seit	Gewählter Beruf	Erfolg der Maturitäts-Prüfung
Blau Julius	Wien	18	1874	Hochsch. f. Bodencultur	reif
Blumenfeld Ignaz	Lemberg	17	1873	Universität	„
Drapal Ludwig	Wien	17	1874	Technik	„
Eschler Ferdinand	„	18·9	1874	Chemie	reprobiert
Fitz Ferdinand	„	16	1874	Technik	reif m. Ausz.
Flatz Rudolf	„	18	1874	„	reif
Fränkel Siegmund	Miskolcz	17	1874	„	reif m. Ausz.
Fuchs Eduard	Waag-Neustadl	18·9	1873	Lehramt	reif
Grossl Richard	Wien	17	1874	Technik	reif m. Ausz.
Hafen Max	Lodz (Russl.)	18	1874	„	reif
Hrach Ferdinand	Wien	17·9	1874	„	reif m. Ausz.
Hrusa Franz	„	18	1874	Universität	reif
Inzinger Rudolf	„	19	1874	„	„
Kloger Robert	„	17·6	1875	Lehramt	„
Landesberger Siegfried	Lemberg	17	1874	Bergakademie	„
Leiss Josef	Wien	16·7	1874	Technik	reif m. Ausz.
Lemberger Rudolf	„	16	1874	„	reif
Liebmann Rudolf	Jassy	16·4	1874	„	„
Müller Adolf	Grafenwörth	17	1874	Universität	„
Pitasch Rudolf	Hinterbrühl	19	1874	Handelsakademie	„
Reich Felix	Wien	16	1874	pract. Lebensber.	„
Rett Franz	„	17	1874	Technik	„
Sadger Salomon	Neusandecz	18	1874	„	„
Schwinner Otto	Wien	18	1874	Bergakademie	„
Seidlhuber Victor	„	17·5	1874	Beamter	reprobiert
Stein Paul	„	17	1874	Technik	reif
Tomaskiewicz Karl	„	16·6	1874	Beamter	repariert
Wandruschka Victor	Nyregyháza	17	1874	Technik	reif
Winter Oskar	Slotwina	16·9	1874	„	reif m. Ausz
Zimmermann Franz	Wien	18·7	1874	„	reif

Themata für die schriftlichen Maturitätsprüfungen.

I. Deutsche Sprache:

Euch, ihr Götter, gehört der Kaufmann. Güter zu suchen
Geht er; doch an sein Schiff knüpfet das Gute sich an.
Schiller.

II. Deutsch-Französisch: Gustav Adolph (aus Schillers Geschichte des 30jährigen Krieges).

III. Französisch-Deutsch: Sismondi, la Pucelle d'Orléans (Bechtels Chrestomathie, p. 126).

IV. Englisch: Ein Abschnitt aus einem Briefe der Lady Montague (Herrig, p. 240 f.)

V. Mathematik:

1. Jemand hat ein Capital von 1800 zu 5% mit Zinseszinsen angelegt und gibt noch jährlich 400 fl. in Raten nach, die der Capitalisationsart entsprechen. Zu welchem Betrage wächst dadurch das Capital nach 10 Jahren an: *a*) bei ganzjähriger, *b*) bei halbjähriger Capitalisation?

2. Die Hälfte eines regelmäßigen Zwölfeckes rotiere um den Durchmesser des ihm umgeschriebenen Kreises als Achse; man soll die Formel für die Oberfläche O des so erzeugten Körpers ableiten und diese dann für den speciellen Wert: $a = s_{12} = 1 \cdot 2^m$ berechnen. (Das Resultat mit 5 Decim.)

3. In einem ebenen Dreick seien gegeben:

$$a = 254 \cdot 29^m,$$
$$b = 301 \cdot 597^m,$$
$$\sphericalangle C = 72^0\, 49'\, 25'';$$

es sollen die Winkel A und B, die Seite c, der Flächeninhalt F, sowie auch die Halbmesser R und r der dem Dreiecke umschriebenen und eingeschriebenen Kreise berechnet werden.

4. Man soll die Gleichung einer Geraden L und deren Neigungswinkel β und β' gegen die Achsen bestimmen, welche durch einen Punkt $(x' = -3 \cdot 4,\ y' = -2 \cdot 8)$ geht und mit der Geraden $\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{5} = 1\right)$ den Winkel $\alpha = 50^0\, 38'\, 54''$ bildet.

VI. Darstellende Geometrie:

1. Durchschnitt einer Kugel mit einem dreiseitigen unregelmäßigen Prisma.

2. An einem Säulencapitäl sind die erforderlichen Schatten bei parallelen Lichtstrahlen zu construieren.

3. Perspective eines rechteckigen, mit einem Halbcylinder gedeckten Kästchens nach gegebener Skizze.

e) Verzeichnis sämmtlicher öffentlicher Schüler im Schuljahre 1879/80.

Die mit * bezeichneten Schüler erhielten die Vorzugsclasse.

I. Classe. Abtheilung *A*.

(55 Schüler.)

Bauer Friedrich.
Berr Eugen.
Brandeis Victor.
Brandner Karl.
Chromy Karl.
Cohn Heinrich.
Cservinka Karl.
Demel Karl.
Franke Adolf.
*Freund Leo.
Friedmann Alfred.
Friedmann Emil.
Gebauer Max.
Gruber Richard.
Habit Ferdinand.
Hajek Hermann.
Hamburg Abraham.
Haneschka Josef.
Holowich Desider.
Jakobi Ludwig.
Janisch Josef.
Janusch Josef.
Kaufmann Leo.
Katz Max.
Knab Josef.
Kohn Friedrich.
Koller Sigmund.
Korpitsch Karl.
Kollinsky Emil.
Madl Ernst.
Mayer Julius.
Mitteregger Ludwig.
*Neudecker Alois.
Nissel Alfred.
*Nowottny Karl.
Platt Josef.
Porubszky Rudolf.
Rausch Victor.
Reim Johann.
Scheibein Julius.
Scheyrer Eduard.
Schindlecker Josef.
Schindlmaiser Rudolf.
Schmidt Eduard.
Schön Samuel.
Schreiber Josef.
Schwarzinger Franz.
Serda Alois.
Swaty Richard.
Ullmann Josef.
Wawrinetz Max.
Weichsel Paul.
Weiss Theodor.
Wondraček Rudolf.
Winter Gabriel (im II. Semester eingetreten).

I. Classe. Abtheilung *B*.

(58 Schüler.)

Abeles Rudolf.
Bittner Richard.
v. Blumfeld Emil.
Braun Heinrich.
Bruck Friedrich.
Czerny Josef.
Dollischek Karl.
Fegerl Leopold.
Frenzl Karl.
Freund Gustav.
Hagenauer Heinrich.
Haager Anton.
Hangl Rudolf.
Hatschek Ernst.
Knechtl Johann.
Kramer Josef.
Krousky Adolf.
Kwassinger Eduard.
*Leisek Alexander.
Lion Ludwig.
*Lukesch Johann.
Mayer Siegfried.
Mollo Victor.
Muschka Johann.
Neudolt Josef.
Popper Sigmund.
Pottokar Leopold.
Rathner Rudolf.
Reitter Johann.
Reska Karl.
Roth Alois.
Schindlecker Fritz.
*Schinnerer Paul.
Schmidt Rudolf.
Schwarz Gustav.
Singer Hermann.
Slonek Julius.
*Spies Johann.
Spies Konrad.
Stern Berthold.
Threun Theodor.
Thurner Adolf.
Terzer Josef.
Torbé Nathan.
Voltolini Arthur.
Wagenseil Martin.
Wagner Franz.
Walter Wenzel.
Wastel Victor.
Watzke Alfred.
Weiss Max.
Willisch Moritz.
Winternitz Otto.
Wodiczka Karl.
Zeugswetter Franz.
Zuschrader Leopold.
Fürst Karl.
Högl Friedrich (im II. Semester eingetreten).

II. Classe. Abtheilung *A.*

(56 Schüler.)

*Beredick Karl.
Blau Wilhelm.
Braun Otto.
Bujan Johann.
v. Cronenberg Lothar.
Dragann Franz.
Feldscharek Heinrich.
Feuerstein August.
Fischer Leopold.
Fussenegger Emil.
Geitler Friedrich.
Gessl Johann.
Goldstein Albert.
Goldstein Karl.
Gross Wilhelm.
*Günther Josef.
Hajek Emanuel.
Hatter Karl.
Heimann Eduard.
Hochstätter Heinrich.
Jacobi Adolf.
Jaeger Martin.
v. Iufeld Johann.
John Gustav.
John Constantin.
Jurezčka Vinzenz.
Kallinger August.
Keller Eduard.
Kessler Arnold.
Kmunke Rudolf.
Konrady Gustav.
Kousal Theodor.
Lessainsky Heinrich.
Lichtenstern Alexander.
List Franz.
v. Manussi Robert.
Melichar Alexander.
Plecher Johann.
Pirker Josef.
Pokorny Jacob.
Raffelsberger August.
Reich Josef.
Reich Julius.
Richter Konrad.
Ruhrhofer Karl.
Schacherl Leopold.
Schäffler Rudolf.
Scheckenbach Johann.
Schreiber Hugo.
Seibt Rudolf.
Sittner Eduard.
Tasch Franz.
Taubert Richard.
Vogl Wilhelm.
Wagner Konrad.
Weiss Moritz.

II. Classe. Abtheilung *B.*

(58 Schüler.)

Blaschek August.
Bonyhard Jakob.
Brauner Friedrich.
Breisacher Franz.
Busch Emil.
Denhof Ludwig.
Ehgartner Josef.
Erban Franz.
Feuerstein Arthur.
Fournier Franz.
Gansinger Hermann.
Göstl Emil.
Guthmann Victor.
Gwiggner Anton.
Hatter Josef.
Hauer Anton.
Hladufka Adolf.
Hoch Emil.
Höller August.
*Horowitz Moritz.
Janeczek Julius.
Juller Adolf.
Just Johann.
Katz Egon.
Keller Friedrich.
Klemm Karl.
Kirchner Karl.
*Kostner Johann.
Krebs Samuel.
Lichtblau Martin.
Löw Fritz.
Mantsch Josef.
Marmorosch Max.
Matauschek Franz.
Merkl August.
Oberschwandtner Otto.
Oratsch Edmund.
Plach Georg.
Polz Edl. v. Ruttersheim Rudolf.
Riha Ludwig.
Röhr Hugo.
Sacher Ludwig.
Salvenmoser Heinrich
Schacha Karl.
Schafranek Gustav.
Schreiber Karl.
*Seifert Franz.
Stastny Josef.
Steindl Ludwig.
Stolle Gustav.
Swalla Heinrich.
Wagner Gustav.
Wawra Karl.
Werner Josef.
Zeiss Oscar.
*Zehethuber Leopold.
Zeugswetter Anton.
Scholtes Aug. (im II. Semester eingetreten).

III. Classe. Abtheilung *A.*

(39 Schüler.)

*Braun Julius.
Bujan Robert.
Chwostek Alois.
Dannhauser Alfred.
Dwořák Julius.
Eisenhut Josef.
Fegerl Rudolf.
Fischer Theodor.
Fuchs Emil.
Gassinger Alfred.
v. Gerelli Rudolf.
Groß Otto.
Honvèry Edmund.
Kadlczik Valentin.
Keller Emil.
Kühhas Franz.
Laferl Ernst.
Milde Albert.
Müller Josef.
Mully Heinrich.
Nittmann Johann.

Nowak Wilhelm.
Oratsch Rudolf.
Petrasch Josef.
Podjus Maxmilian.
Prohaska Vinzenz.
Richter Wilhelm.
Salcher Ferdinand.
Sandner Karl.
Scheibein Hermann.
Scherer Franz.
Schrötter Karl.
Souczek Johann.
Stanék Karl.
Valduga Isidor.
Weitz Leon.
Welsch Ernst.
Wiener Mosko.
Witt Adolf.

III. Classe. Abtheilung *B.*

(38 Schüler.)

Beyer Max.
Bioul Josef.
Brauner David.
Brunner Wilhelm.
Chauvet Ludwig.
Dechet Gustav.
Drucker Moritz.
Eichele Karl.
Eisenhut Josef.
Feichtinger Ignaz.
*Fritscher Franz.
Geier Georg.
Grinzenberger Franz.
Herzfeld Alexander.
Huschak Moritz.
Jacobovitz Rudolf.
Kattus Johann.
Kopp Karl.
Kratky Ferdinand.
Löblich Friedrich.
Mulacz Anton.
Müller Hermann.
Niessner Johann.
*Nowotny Leopold.
Ortmann Richard.
Plank Rudolf.
Pokorny Karl.
Reisinger Ludwig.
Ronacher Alois.
Sattmann Heinrich.
Schmid Adolf.
Schmid Hugo.
*v. Seutter Erhard.
*Sittner Johann.
Stanzl Rudolf.
v. Szalay Hermann.
Valentin Anton.
Fischer Paul (im II. Semester eingetreten).

IV. Classe.

(58 Schüler.)

Bauer Anton.
Bause Victor.
Becke Arnold.
Bittner Wilhelm.
Braun Karl.
Bültemeyer Heinrich.
Denk Hermann.
Ebgartner Karl.
Eltz Edgar.
Fasol Theodor.
Fegerl Johann.
*Fischer Theodor.
Gauß Karl.
Goldemund Heinrich.
Gruber Ludwig.
Grünberg Victor.
Hauer Wilhelm.
Heiß Ferdinand.
Hernfeld Simon.
Holmes Heinrich.
Kaufmann Friedrich.
Knöpfelmacher Siegfried.
Kollmann Rudolf.
Kothanek Franz.
Kryspin Karl.
Kutschera Franz.
Lefort Alexander.
Mähling Franz.
Mehl Gustav.
Mehl Rafael.
Niemetz Adolf.
Oberschwandtner Ludw.
Pomp Ferdinand.
Prosniz Franz.
Reinhold Edmund.
Ripper Max.
Rupprecht Alois.
Sandner Stefan.
*Scharf Richard.
Schlechta Franz.
Schmeiser Bernhard.
Schmid Victor.
Scholz August.
Schwarz Ladislaus.
Stack Ludwig.
Steingruber Alfred.
Stier Karl.
Strohmayer Karl.
Ulrich Karl.
*Ulrich Ottokar.
Urban Johann.
Völkl Karl.
Weiß Louis.
Winter Edmund.
Zacherl Alfred.
Zeiß Victor.
Zimara Josef.
Zimmer Franz.

V. Classe.

(42 Schüler.)

*Alt Wilhelm.
*Bandian Alexander.
*Barczuch Gustav.
Bauer Friedrich.
Beer Max.
Blaschek Otto.
*Eckstein Josef.
Engelmann Eduard.
Filz Felix.
Fischer Karl.
Fraunfeld Otto.
Gandolfi Eduard.
Geiringer Gustav.
Hayne Otto.
Heinz Karl.
Hölbling Victor.
Junker Karl.
Kotanyi Hugo.

Krug Johann.
Lemberger Siegfried.
Pacher von Theinburg Rudolf.
Parzer Johann.
Saal Rudolf.
Schebeck Karl.
Schiviz Edl. v. Schiviz-hoffen Robert.
*Schuster Johann.
*Seibt Josef.
Semmler Ludwig.
Sternlicht Rudolf.
Teirich Anton.
Trampler Felix.
Traxler v. Schrollheim Anton.
*Turnau Edl. v. Dobczyce August.
Vogt Johann.
Wagner Karl.
Wellek Victor.
Wessely Philipp.
*Winkler Alois.
*Winter Julius.
Zimmermann Rudolf.
Hofmann Karl.
Kuh Ernst (im II. Semester eingetreten).

VI. Classe.

(42 Schüler.)

Bauer Julius.
Bauer Karl.
Bauer von Bauernthal Philipp.
Braun Ludwig.
Ciccimarra Richard.
Doblinger Josef.
Dragann Josef.
*Falger Anton.
Fehr Walther.
Fulda Eugen.
Göstl Otto.
*Jarolimek Vincenz.
Kahane Moses.
v. Keller Max.
Keller Otto.
Koch Leopold.
Koleda Rudolf.
Kolisch Heinrich.
Kopetz Heinrich.
v. Leon Jaques.
Lustig Alfred.
*Manzer Rudolf.
Petrich Franz.
Popper Josef.
Rehák Adolf.
Reinhold Max.
Rett Victor.
Sasso Constantin.
Schick Johann.
Schmid Wilhelm.
Schöhr Johann.
Schraml Johann.
Simmel Stefan.
Tlach Gustav.
*Ulrich Johann.
Wagner Emerich.
Walter Eduard.
v. Weil Felix.
Wertheim Rudolf.
Wessely Ludwig.
Wimmer Franz.
Zmeßkal Karl.

VII. Classe.

(32 Schüler.)

Blau Julius.
Blumenfeld Ignaz.
Drapal Ludwig.
Eschler Ferdinand.
Fitz Ferdinand.
Flatz Rudolf.
*Fränkel Siegmund.
Fuchs Eduard.
Gröschl Karl.
*Großl Richard.
Hafen Maximilian.
*Hrach Ferdinand.
Hrusa Franz.
Inzinger Rudolf.
Kloger Robert.
Landesberger Siegfried.
*Leiß Josef.
Lemberger Rudolf.
Liebmann Adolf.
Müller Adolf.
Pitasch Rudolf.
Puschner Karl.
Reich Felix.
Rett Franz.
*Sadger Salomon.
Schwinner Otto.
Seidelhuber Victor.
Stein Paul.
Tomaszkiewicz Karl.
Wandruschka Victor.
*Winter Oscar.
Zimmermann Franz.

Aufnahme

der

Schüler für das kommende Schuljahr.

Die Aufnahme der in diese Anstalt neu eintretenden Schüler für das Schuljahr 1880—81 findet am 12. und 13. September d. J. von 8—12 Uhr Vormittags in der Directionskanzlei (Stadt, Schottenbasteigasse Nr. 7, 1. Stock) statt. Schüler, welche im Vorjahre an der Anstalt studierten, haben sich zur Aufnahme **schon am 11. September** zwischen 8—12 Uhr Vormittags zu melden.

Die Aufnahms - Bedingungen für die eintretenden Schüler sind folgende:

1. Schüler, welche in die erste Classe einzutreten wünschen, haben sich nach den Bestimmungen des hohen k. k. Ministerial-Erlasses vom 14. März 1870, Z. 2370, einer Aufnahmsprüfung an der Realschule zu unterziehen. Es wird hierbei erfordert: Jenes Maß von Wissen in der Religion, welches in den ersten vier Jahrescursen der Volksschule erworben werden kann; Fertigkeit im Lesen und Schreiben der deutschen Sprache, Kenntnis der Elemente aus der deutschen Formenlehre, Fertigkeit im Analysieren, Bekanntschaft mit den Regeln der Orthographie und Interpunction und richtige Anwendung derselben beim Dictandoschreiben; Übung in den vier Grundrechnungsarten in ganzen Zahlen. (Schüler, welche aus der Religionslehre an der Volksschule die Noten „gut“ oder „sehr gut“ erhielten, werden von der Aufnahmsprüfung aus diesem Gegenstande dispensiert.)
2. Zum Eintritte in eine höhere als die erste Classe der Realschule ist für alle diejenigen Aufnahmsbewerber, welche nicht ein Zeugnis über die an einer öffentlichen Realschule zurückgelegte unmittelbar vorhergehende Realschul-Classe beizubringen vermögen, also auch für die von Bürgerschulen an Realschulen übertreten wollenden Schüler eine Aufnahmsprüfung aus sämmtlichen obligaten Lehrgegenständen erforderlich, für welche die im hohen k. k. Ministerial-Erlasse vom 19. Mai 1870, Z. 3257, festgesetzte Prüfungstaxe von 12 fl. zu erlegen ist. — Das Ergebnis dieser Aufnahmsprüfung hat zu entscheiden, in welche

Classe der Realschule ein Schüler mit Rücksicht auf die dazu erforderlichen Kenntnisse aufgenommen werden kann. (Erlass des h. k. k. L. S. R. vom 8. October 1873, Z. 5454.)

3. Jene Schüler, welche eine Zeit lang in ihren Studien ausgesetzt hatten und dieselben nun wieder fortsetzen wollen, haben ein glaubwürdiges Zeugnis über diese Unterbrechung beizubringen.

4. Bei der Aufnahme eines Schülers sind 2 fl. an Aufnahmstaxen zu entrichten.

Das Schulgeld, welches im Laufe des ersten Monats abgefordert wird, beträgt an den Oberrealclassen halbjährig 20 fl., an den Unterrealclassen 15 fl.; außerdem hat jeder Schüler den ganzjährigen Lehrmittelbeitrag von 2 fl. zu leisten.

Bezüglich der Befreiung von der Zahlung des Schulgeldes wird der Director den P. T. Eltern, deren **Anwesenheit bei der Schüleraufnahme dringend wünschenswert erscheint,** die geeignete Auskunft ertheilen.

5. Jeder Schüler erhält einen Classificationsbogen (Ausweis), welcher nach entsprechender Ausfüllung der vorgezeichneten Rubriken alsbald dem Classenvorstand zurückzustellen ist. Um die Eltern oder deren Stellvertreter in steter Kenntnis über die Sitten und den Fortschritt der Schüler zu erhalten, werden außer den halbjährigen großen Classificationen noch viermal im Jahre Censuren gehalten, und die Classifications-Ergebnisse müssen von den Schülern jedesmal den Eltern zu Einsicht und Unterschrift vorgelegt werden. Zu diesen Censuren wird der obige Ausweis benützt.

Die Aufnahme von Privatisten unterliegt denselben Bedingungen, wie die der öffentlichen Schüler.

Das nächste Schuljahr beginnt am 16. September.

Gewerbliche Fortbildungsschule.

Commission zur Leitung der Gewerbeschulen.

Herr Dr. Moriz **Weitlof**, Advocat und Landtagsabgeordneter, Landesausschuss-Stellvertreter, Obmann; Special-Inspector dieser Schule.

„ Dr. Joh. Ferd. **Schrank**, Mitglied (Vertreter der Gemeinde).

„ Dr. Wenzel **Lustkandl**, nied.-österr. Landesausschuss, Obmann-Stellvertreter, (Vertreter des Landesausschusses).

„ Dr. Rudolf **Sonndorfer**, Director der Handelsakademie (Vertreter des Landesausschusses).

„ Wilhelm **Bächer**, Gemeinderath und Mitglied der Gewerbeschul-Commission.

„ Gustav Ritter v. **Leon**, Großhändler, Vertreter der Handelskammer.

„ Isidor **Schneck**, Gummiwarenfabrikant, Vertreter der Handelskammer.

„ Dr. Julius **Spängler**, Director der k. k. Oberrealschule in der Leopoldstadt,
„ Dr. Josef **Hoffer**, Advocat, Gemeinderath und Mitglied des Landesschulrathes.
„ Heinrich **Schramm**, k. k. Landesschul-Inspector für Gewerbeschulen,

} Vertreter des Landesschulrathes.

„ Johann **Junghanns**, Goldarbeiter,
„ Franz **Löblich**, Gemeinderath und Vorstand der Genossenschaft der Kupferschmiede,
„ Karl **Lustig**, Gemeinderath und Vorstand-Stellvertreter der Genossenschaft der Goldarbeiter,
„ Ferdinand **Reder**, Cassaverwalter der Commission,
„ Leopold **Fried**, Vorstand der Genossenschaft der Spirituosenerzeuger,
„ Johann **Tiefenstädter**, Vorstand-Stellvertreter der Anstreicher-Genossenschaft,
„ Ignaz **Kronstorfer**, Vorstand der Genossenschaft der Schuhmacher,
„ Johann **Dürbeck**, Vorstand der Genossenschaft der Schmiede.

} Vertreter der Genossenschaften.

Die zahlreichen Agenden und Verwaltungsgeschäfte der Gewerbeschulen wurden, wie bisher, von dem ständigen Secretär der Commission, Herrn Landesarchivar Alois **König**, mit großer Geschäftskenntnis, Umsicht und Sorgfalt versehen.

Lehrplan

der

gewerblichen Fortbildungsschule für männliche Hilfsarbeiter.

I. Jahrgang.

(In den Lehrplan dieses Jahrganges wurden jene Lehrgegenstände aufgenommen, deren Kenntnis für jeden Gewerbetreibenden wünschenswert ist. Es hat daher der Lehrling sämmtliche Lehrgegenstände dieser Classe in der vom Stundenplane bezeichneten Weise zu besuchen.)

Deutsche Sprache und Geschäftsaufsätze.

a) Allgemeine Übungen im mündlichen und schriftlichen Gedankenausdrucke an der Hand eines entsprechenden Lesebuches. Dictate und Nachbildungen einfacher Lesestücke. Die Schüler sind auf die häufig vorkommenden Verstöße gegen die Sprachgesetze aufmerksam zu machen und an eine sprachlich und orthographisch richtige Darstellung zu gewöhnen.

b) Geschäftsaufsätze: Briefe aus dem Familien- und Geschäftsleben, mit entsprechender Unterweisung über die äußere Form derselben, über Titulaturen u. s. w. — Öffentliche Ankündigungen und Circulare. — Zeugnisse. — Quittungen. — Rechnungen, Anweisungen, Schuldscheine. — Gesuche und Eingaben an Behörden. (Wöchentlich $1\frac{1}{2}$ Stunden.)

Anmerkung. Verträge, Reverse und ähnliche Urkunden, zu deren Ausfertigung eine genauere Kenntnis der einschlägigen Gesetze und Verordnungen erforderlich ist, sind bei diesem Unterrichte grundsätzlich auszuschließen. Aufgaben zur häuslichen Bearbeitung sind in der Regel nicht zu geben.

Geographie. Elemente der mathematischen und physikalischen Geographie, soweit sie dem Verständnisse des Schülers zugänglich sind. Übersicht der Meere und Welttheile auf der Erdoberfläche. — Europa, politische Eintheilung, die wichtigsten Gebirgszüge, Flüsse und Städte. — Österreich-Ungarn, politische Eintheilung, Gebirge, Hauptflüsse und die in politischer oder gewerblicher Hinsicht bemerkenswerten Städte. Die Hauptlinien der in Wien einmündenden Eisenbahnen. (Wöchentlich $\frac{1}{2}$ Stunde.)

Rechnen und gewerbliche Buchführung.

a) Rechnen: Kurze Wiederholung der vier Grundoperationen mit Decimalbrüchen und deren Anwendung auf die im gewerblichen Leben vorkommenden Umrechnungen der Maße und Gewichte. Das Wichtigste über die Theilbarkeit der Zahlen. Das Rechnen mit ge-

meinen Brüchen, soweit es für den folgenden Unterricht nothwendig ist. Wälsche Praktik. Die Schlussrechnung. Der Kettensatz. Einfache Procent-, Zins-, Gesellschafts- und Mischungsrechnungen, in einem dem Bedürfnisse des Gewerbetreibenden angemessenen Umfange.

b) Gewerbliche Buchführung (im II. Semester): Die einfachste Art der Vormerkung der im gewerblichen Leben vorkommenden Geschäftsfälle. Das Journal, das Hauptbuch und das Bestellungsbuch. Durchführung eines kurzen, als Beispiel gewählten Geschäftsverlaufes. (Wöchentlich 2 Stunden.)

Anmerkung. Mit dem Unterrichte in der gewerblichen Buchführung ist erst dann zu beginnen, wenn der Lehrstoff des Rechnens zum größeren Theile durchgenommen worden ist.

Geometrie. Die geometrischen Elementarbegriffe: Punkt, Linie, Fläche (Ebene) und Körper. Der Kreis, der Winkel. — Dreieck, Viereck. Begriff der Congruenz und Ähnlichkeit. Das Wichtigste über regelmäßige Vielecke. — Flächenberechnungen der Parallelogramme, Dreiecke, Trapeze und des Kreises, soweit dieselben in den Gewerben Anwendung finden können und unter gleichzeitiger Berücksichtigung des Quadratwurzel-Ausziehens. Der pythagoräische Lehrsatz. Besprechung der am häufigsten vorkommenden geometrischen Körperformen. Berechnung der Oberfläche und des Rauminhaltes der einfachsten eckigen und krummflächigen Körper. (Wöchentlich 1 Stunde.)

Geometrisches Zeichnen. Einübung des Zeichnens und des Ausziehens gerader Linien und Kreise an einfachen geometrischen Formen nach Vorzeichnungen auf der Tafel. Construction und Theilung bestimmter Winkel. Construction von Perpendikeln und Parallelen. Construction der Dreiecke, Vierecke und der regelmäßigen Vielecke. Maßstäbe. Kreisconstructionen in ihren praktischen Anwendungen. Construction der Ellipse. — Grundriss, Aufriss und Querschnitt, in leicht fasslicher Art erklärt und durch Zeichnung versinnlicht. — Anwendung der erklärten Construction zum präcisen und correcten Nachzeichnen einfacher architektonischer und maschinentechnischer Objecte nach zweckmäßig gewählten Vorlagen. (Wöchentlich 4 Stunden.)

Freihandzeichnen. Anknüpfend an die mitgebrachten Kenntnisse der Schüler ist zunächst das Zeichnen des geometrischen, dann des einfachen freien Ornamentes nach zweckmäßig gewählten Vorlagen in möglichst großem Maßstabe fortzusetzen und der Schüler zur genauen und reinen Ausführung der Contouren zu verhalten. — Das Zeichnen nach einfachen plastischen Vorlagen (elementare geometrische Körperformen, architektonische Gliederungen, das Blattornament der verschiedenen Stylarten) mit möglichst einfacher Art der Schattengebung. — Je nach dem künftigen Berufe des Schülers kann auch die Ausführung der Ornamente in Farben geübt, so wie auch die Anleitung zum Zeichnen der menschlichen Figur jenen Schülern gegeben werden, welche des figuralen Zeichnens zur Ausübung ihres Gewerbes bedürfen. (Wöchentlich 4 Stunden.)

Anmerkung. Wenn es die örtlichen Verhältnisse gestatten, ist den Schülern die Möglichkeit zu bieten, neben dem Freihandzeichnen auch das Zirkelzeichnen zu üben.

II. Jahrgang.

(In diesen Jahrgang werden vorwiegend Fachgegenstände aufgenommen, und es hat der Schüler nur jene Gegenstände zu besuchen, welche ihm für sein Gewerbe von Nutzen sein können. Welche von den nachbezeichneten Lehrfächern in den Lehrplan einer Fortbildungsschule aufzunehmen sind, wird von Fall zu Fall vom k. k. n. ö. Landesschulrathe bestimmt.)

Zeichnen für Baugewerbe. Stein- und Ziegelverbände, Holzverbindungen, einfache Dachstühle, Oberböden. Das Zeichnen der verschiedenen Arten der Gewölbe, Stiegen, Fenster und Thüren, Heizanlagen, Aborte u. s. w. nach cotierten, zweckmäßig gewählten und mit den entsprechenden Detailzeichnungen versehenen Vorlagen. Das Copieren von Bauplänen und einfachen Façaden. Der Unterricht ist stets mit den zum Verständnisse nöthigen Erklärungen zu begleiten, und es sind die Schüler nach Thunlichkeit auch mit den einfachsten und gebräuchlichsten Ausführungs-Manieren der Bauzeichnungen vertraut zu machen. (Wöchentlich 3—4 Stunden.)

Zeichnen für Maschinengewerbe. Das Copieren einfacher Maschinentheile, wie Schrauben, Nietenverbindungen, Lager, Wellen, Kuppellungen, Kurbeln u. s. w. nach cotierten und richtig construierten Vorlagen, wobei auf die Genauigkeit in der Ausführung besonderes Gewicht zu legen ist. Übungen im Aufnehmen und in der projectivischen Darstellung einzelner Maschinenbestandtheile nach Modellen, unter Gebrauch des Maßstabes. Das Zeichnen von Motoren und einfacheren Arbeitsmaschinen nach guten Vorlagen.

Für Bauschlosser, Spengler und ähnliche Metallgewerbe sind, unter Berücksichtigung der Bedürfnisse des betreffenden Gewerbes, entsprechende Vorlagen auszuwählen und zum Nachzeichnen zu verwenden.

Gleichzeitig sind die Schüler mit der in der Praxis üblichen Manier der Markierung des Materiales bekannt zu machen, und es sind ihnen auch die zum Verständnisse der Zeichnungen nöthigen Erklärungen zu geben. (Wöchentlich 3 bis 4 Stunden.)

Zeichnen für Kunst- und Kleingewerbe. Das Nachbilden von mustergiltigen und in ihrer Reihenfolge zweckmäßig gewählten stilreinen Vorlagen und Objecten aus dem Gebiete der Kunstindustrie, bei deren Wahl sowohl auf die Zeichenfertigkeit, als auch auf das Gewerbe des betreffenden Schülers Rücksicht zu nehmen ist. Je nach Bedürfnis auch das Zeichnen der menschlichen Figur oder ihrer Theile, nach plastischen Vorlagen.

Für Schüler, welche nicht einem Kunstgewerbe angehören, sind die Vorlagen derart zu wählen, dass die zur Darstellung gebrachten Objecte zur gewerblichen Thätigkeit der Schüler in möglichst naher Beziehung stehen, oder doch zur Ausbildung des Geschmackes beitragen können.

Je nach der Fähigkeit des Schülers und je nach dem Bedürfnisse seines Gewerbes kann auch die Anleitung zur Ausführung der Zeichnungen durch Schattierung oder durch Farben gegeben werden; doch sind dabei zeitraubende oder in der Praxis des betreffenden

Gewerbes wenig verwendete Manieren zu vermeiden und auf die Reinheit der Zeichnung und die Genauigkeit der Umrisse stets das größte Gewicht zu legen. (Wöchentlich 3—4 Stunden.)

Modellieren. Übungen in der Nachbildung plastischer Vorlagen in Thon und Wachs, in stufenweise aufsteigender Reihenfolge und bei zweckmäßiger, dem Gewerbe des betreffenden Lehrlings angemessener Auswahl der Objecte. (Wöchentlich 2—4 Stunden.)

Physik. Allgemeine Eigenschaften der Körper. Das Wichtigste über Schwere und Luftdruck. Wärme. Wirkungen der Wärme, Thermometer (Wärmeleitung und Wärmestrahlung). Schmelzen, Sieden Verdampfen. Destillation. (Wolken, Thau, Regen. Wärmequellen.) — Mechanik: Bewegung und Gleichgewicht im allgemeinen. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte. Die einfachen Maschinen. (Der freie Fall, das Pendel.) — Populäre Erklärung der Grundgesetze der Hydrostatik und Hydraulik. Hydraulische Presse. Wasserräder. Das Wichtigste über Areometer. — Die Spannkraft der Gase und Dämpfe in ihrer Abhängigkeit vom Volumen und Temperatur. Heber, Pumpen und Spritzen. — Princip der Dampfmaschine. — Natürliche und künstliche Magnete. Die Magnetnadel. — Die Reibungs-Elektricität. Die Elektrisiermaschine. Gewitter und Blitzableiter. — Die galvanische Elektricität und galvanische Ketten. (Das Wichtigste über Galvanoplastik.) Elektromagnete; der elektromagnetische Telegraph. (Die wichtigsten Anwendungen aus der Lehre vom Schalle und vom Lichte.)

Der Unterricht hat sich stets auf das Experiment zu stützen, und es ist auf die praktische Anwendung der betreffenden Lehrsätze im gewerblichen Leben besonders Rücksicht zu nehmen. (Wöchentlich 1 bis 2 Stunden.)

Anmerkung. Kann diesem Gegenstande nur eine Stunde wöchentlich zugewendet werden, so haben die in den Klammern bezeichneten Theile des Lehrstoffes zu entfallen. An jenen Fortbildungsschulen, an welchen die „Mechanik“ einen besonderen Unterrichtsgegenstand bildet, sind die Gesetze der Bewegung und des Gleichgewichtes fester, flüssiger und luftförmiger Körper der „Mechanik“ zuzuweisen, und die dadurch gewonnene Zeit insbesondere zur eingehenderen Besprechung der Wirkungen der Wärme und der galvanischen Elektricität zu verwenden.

Gewerbliche Chemie. Begriff von chemischen Erscheinungen. Elemente. Verbindungen. Sauerstoff, Verbrennung, Athmung. (Oxyd, Base, Säure, Salz.) — Wasserstoff, Knallgas, Wasser. — Kohlenstoff (Diamant, Graphit, Kohle), Kohlenoxyd, Kohlensäure (Sodawasser). — Beheizung und Beleuchtung. — Stickstoff, Luft, Salpetersäure, Ammoniak. — Schwefel, schwefelige Säure, Schwefelsäure. — Chlor, Bleiche (Chlorkalk), Salzsäure, Königswasser. — Jod, Fluor, Glasätzen.) — Phosphor, Zündhölzchen. — Kiesel, Quarz, Sand. — Kalium und Natrium. Pottasche, Lauge (Seife, Salpeter, Schießpulver). Soda, Kochsalz (Glaubersalz, Borax). — Calcium, Kalkstein, Kalkbrennen (Cement, Gyps). — Aluminium, Thon, dessen Reinigung und Verarbeitung, Glas- und Thonwaaren - Fabrication. — Eisen, Hochofenprocess, Schmiedeeisen und Stahl. (Rost, Hammerschlag, Ocker, Eisenvitriol). Chrom, Chromfarben. — Zink, Zinkweiß. — Kupfer, Grünspan, Kupfervitriol. — Zinn, Verzinnen, Löthen. — Blei, Blei-

weiss, Mennige (Bleizucker). — Die in den Gewerben am häufigsten vorkommenden Legierungen. — Das Wichtigste über Silber, Gold, Platin, Quecksilber und Arsen. — Einiges über organische Stoffe: Cyan, Blutlaugensalz, Berlinerblau. — Stärke, Gummi, Zucker. — Zellstoff, Holz, Papier. — Trockene Destillation, Theer, Leuchtgas u. s. w. — Fette Öle (Glycerin, Seifen) und ätherische Öle. — Alkohol, Gährung, geistige Getränke, Essig. — (Nahrungsmittel.) — Das Wichtigste über Gerbstoffe und Lederbereitung, dann über Farbstoffe und Färberei. (Wöchentlich 1—2 Stunden.)

Anmerkung. Aus diesem Lehrstoffe werden nach Massgabe der verfügbaren Zeit nur jene Partien hervorzuheben und ausführlicher zu behandeln sein, welche in den im Orte am stärksten vertretenen Gewerben Anwendung finden können. Die Erklärungen der chemischen Vorgänge sind, mit Vermeidung jedes wissenschaftlichen Details, möglichst populär zu halten und stets durch Versuche zu unterstützen.

Projectionslehre. Orthogonale Projectionen ebener Figuren und einfacher geometrischer Körperformen. Die wichtigsten Aufgaben über die Gerade und Ebene — Elemente der Schattenlehre. Durchschnitte der Körper mit Körpern und Ebenen, mit steter Rücksichtnahme auf die Bedürfnisse des Bau- und Maschinenzeichnens und auf die gewerbliche Praxis. — Construction der Körpernetze. Eventuell einiges über Parallel-Perspective. (Wöchentlich 1 Stunde.)

Elemente der Bauconstructionslehre. Übersicht der Baumaterialien. Verschiedene Arten des Mauerwerkes. Pflasterungen. Erklärung der wichtigsten Holz-, Stein- und Eisenverbindungen und ihre Anwendung beim Baue von einfachen Dachstühlen und einfachen Gewölben. Stiegen, Fenster, Thüren und Thore. Das Wichtigste über Heizanlagen und Aborte.

Anschließend an diese Erklärungen ist der Unterricht im Bauzeichnen fortzuführen. (Wöchentlich 1 Stunde.)

Elemente der Mechanik und Maschinenlehre. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte. Die einfachen Maschinen. Schwerpunkt und Stabilität. Das Wichtigste über die Festigkeit der Materialien, so weit die Erklärungen dem Verständnisse der Schüler zugänglich sind. Die Arten der Bewegung. Der freie Fall. Widerstände der Bewegung. Der Begriff der mechanischen Arbeit. Nutzeffect. Das Einfachste und Wichtigste über Gleichgewicht und Bewegung tropfbarer und luftförmiger Flüssigkeiten. Wasserräder. Barometer und Manometer. — Feuerungen und Dampfkessel. Beschreibung und Erklärung der wesentlichsten Theile einer Dampfmaschine.

Der Unterricht ist durch zweckmäßige Vorzeichnungen an der Tafel, sowie auch nach Thunlichkeit durch Demonstrationen an Modellen zu unterstützen. (Wöchentlich 1—2 Stunden.)

Buchführung und Gewerbegesetzkunde. Begriff des Wechsel, die Arten der Wechsel und die gesetzlichen Erfordernisse der Wechsel. Allgemeine Erläuterungen über die Conti. Die wichtigsten gesetzlichen Bestimmungen über die Führung der Geschäftsbücher. Erklärung der Einrichtung der wesentlichen Geschäftsbücher bei der einfachen Buchhaltung nach kaufmännischer Art. Einübung des Ein-

tragens der Geschäftsfälle in die einzelnen Bücher auf Grund einer als Beispiel angenommenen Geschäftserzählung aus der Gewerbepraxis. Gleichzeitig sind die dabei vorkommenden Berechnungen (Provision, Sensarie, Discont, so wie auch einfache Waren- und Effectenberechnungen) zu erklären und auszuführen.

Besprechung und Erklärung der für den Gewerbetreibenden im allgemeinen wissenswerten Bestimmungen der Gewerbeordnung (Kais. Patent vom 20. December 1859, Reichsgesetzblatt Nr. 227). Das Wichtigste über das Privilegiengesetz (Kais. Patent vom 15. August 1852, Reichsgesetzblatt Nr. 183), das Marken- und Musterschutzgesetz (Kais. Patent vom 7. December 1858, Reichsgesetzblatt Nr. 230) und das Hausierpatent (Kais. Patent vom 4. September 1852, Reichsgesetzblatt Nr. 252). (Wöchentlich 1—2 Stunden.)

Die wöchentliche Stundenzahl belief sich für den Schüler auf 7 bis 9 an drei bis vier Tagen; doch gab es auch Lehrlinge und Gehilfen, die fünfmal in der Woche zur Schule kamen. Die Unterrichtszeit ist Sonntags von 9 bis 12 Uhr vormittags, ferner mit Ausnahme der zwei letzten Wochentage täglich abends von $6\frac{1}{2}$ bis $8\frac{1}{2}$ Uhr.

Die löbliche Handels- und Gewerbekammer verwendete auch im heurigen Schuljahre wieder einen Betrag von 20 fl. aus der „dritten Grutsch-Stiftung“ in dankenswerter Weise zum Ankaufe von Zeichenrequisiten für mittellose Lehrlinge dieser gewerblichen Fortbildungsschule.

Inspiciert wurde diese Anstalt öfters im Schuljahre durch den Special-Inspector dieser Schule und Präsidenten der Gewerbeschul-Commission, Herrn Landtagsabgeordneten Dr. Moritz Weitlof. Die Frequenz-Verhältnisse sowohl, wie nicht minder die Fortschritte der Schüler erfuhren hiebei die entsprechende Würdigung, und bemerken wir auch, dass die am Schlusse des zweiten Semesters veranstaltete gemeinschaftliche Ausstellung der Schülerarbeiten im großen Ausstellungspalast im Prater sich allgemeiner Anerkennung erfreute.

Gewerbeschüler - Verzeichnis.

Bildhauer	4
Binder	5
Buchbinder	10
Buchdrucker und Schriftsetzer	10
Chirurgische Instrumentenmacher	2
Deckenmacher	1
Drechsler	3
Eisendreher und Gießer	3
Färber	1
Futteralmacher	2
Galanteriewarenarbeiter	2
Glaser	1
Gold- und Silberarbeiter	5
Graveure und Ciseleure	4
Hafner	1
Handschuhmacher	2
Kammacher	1
Kürschner	1
Lackierer	4
Lithographen und Steindrucker	5
Maurer	8
Mechaniker und Maschinisten	15
Riemer	1
Sattler	3
Schlosser	28
Schmiede	10
Schneider	7
Schuhmacher	4
Steinmetze	20
Spengler	2
Tapezierer	7
Tischler	17
Wagner	7
Zimmerleute	1
Zusammen	197

Unter den 197 Schülern befanden sich 29 Gehilfen.